Неуниформизуемые множества со счетными сечениями на заданном уровне проективной иерархии*

Владимир Григорьевич Кановей†

Василий Александрович Любецкий‡

24 сентября 2018 г.

УДК 510.225 и 510.223

Аннотация

Развивая исследование в [6], мы строим модель теории множеств, в которой, для заданного $n \geq 2$, принцип униформизации не выполняется для некоторого плоского множества типа $\mathit{\Pi}^1_n$, все вертикальные сечения которого являются счетными множествами, при том, что все плоские множества типа $\mathbf{\Sigma}^1_n$ со счетными вертикальными сеченими униформизуемы. Таким образом, в этой модели униформизация для множеств со счетными сечениями нарушается на заданном уровне проективной иерархии, сохраняясь на более низких уровнях.

Ключевые слова: униформизация, форсинг, класс Витали.

1 Введение

Проблема униформизации была введена в дескриптивную теорию множеств Н. Н. Лузиным в заметке [29] и в более подробной статье [30]. [1] Плоское мно-

*Исследование В. Г. Кановея выполнено за счет гранта РФФИ 17-01-00705. В. Г. Кановей также благодарен Институту Эрвина Шредингера (Вена, Австрия) за поддержку этого исследования в ходе визита в декабре 2016 года. Исследование В. А. Любецкого выполнено за счет гранта РНФ 14-50-00150.

†ИППИ РАН и МИИТ, `kanovei@googlemail.com` — автор для контактов.

‡ИППИ РАН, `lyubetsk@iitp.ru`

[1] Эти публикации не вошли в том II Собрания сочинений Лузина [10], но их основные положения рассмотрены, частично переведены и детально проанализированы В. А. Успенским в [9]. Лузин приводит в [29] выдержку из письма Адамара в «пяти письмах» [17], которую можно понимать в том смысле, что Адамар делает различие между «чистым» цермеловским выбором и выбором элементов при помощи конкретной, эффективно определенной функции. Это дало Лузину повод связать с именем Адамара проблему униформизации в титулах статей [29, 30]. Успенский показал в [9, § 4], что роль Адамара здесь определенно преувеличена, а приоритет в связи с униформизацией и лежащими в ее основе понятиями принадлежит самому Лузину.

жество Q вещественной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ называется *униформным* (или *однозначным*), если оно пересекается каждой вертикальной прямой не более чем в одной точке. Если $Q \subseteq P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, множество Q униформно, и его проекция на первую ось совпадает с проекцией множества P, то множество Q *униформизует* множество P. Иначе говоря, униформизовать данное плоское множество P — значит, выбрать по одной точке q_x в каждом непустом вертикальном сечении P_x множества P, а затем свести все выбранные точки q_x, а точнее, все пары вида $\langle x, q_x \rangle$, в одно униформизующее множество $Q \subseteq P$. *Проблема униформизации*, по Лузину, состоит в том, чтобы выяснить, *возможно или нет определить точечное множество E, для которого нельзя было бы назвать никакого униформизующего множества E'*. (Перевод взят из [9, стр. 105], курсив Лузина и Успенского.)

Современная теория множеств дала строгие определения для тех понятий, которые в «наивной» теории множеств выражались словами: назвать, определить, эффективно построить, и им подобными. Именно, наиболее широким классом эффективно определимых множеств считается класс ROD (real-ordinal definable) всех множеств, которые определимы формулой с вещественными числами и ординалами в роли параметров определения. Выделяется подкласс OD $\subseteq$ ROD (ordinal definable) всех *ординально определимых* множеств, т.е. таких, которые определимы формулой с ординалами (но не вещественными числами) в роли параметров.

Более специальными подклассами в ROD и OD являются, соответственно, *проективные классы* $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, и $\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$ и *эффективно проективные классы* Σ^1_n, Π^1_n, и $\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$; здесь $n \geq 1$. О проективной иерархии см. в книге [32], а также в [1], [3], [4], [7], [26]. Напомним, что для уровня $n = 1$, $\mathbf{\Delta}^1_1$ = борелевские множества, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ = суслинские, или A-множества, $\mathbf{\Pi}^1_1$ = косуслинские, или CA-множества.

Наиболее важным результатом об униформизации в классической дескриптивной теории множеств считается следующая теорема.

Теорема 1.1 (Новиков – Кондо – Аддисон). *Если P — плоское множество одного из классов $\mathbf{\Pi}^1_1$, Π^1_1, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, Σ^1_2, то оно может быть униформизовано множеством того же класса.*

Здесь П. С. Новикову принадлежит сам метод выбора точки в непустом сечении данного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества, изложенный в работе [31], Кондо [27] — полученный на основе этого метода результат для $\mathbf{\Pi}^1_1$, Аддисону [12, 11] — перенос теоремы на «эффективный» класс Π^1_1, а распространение результата на классы $\mathbf{\Sigma}^1_2$, Σ^1_2 происходит простым рассуждением. Подробнее об этих и других теоремах в связи с униформизацией и близкими вопросами см. в указанных выше источниках, а в отношении более современных результатов — в [35, 33, 18, 13, 15, 14], а также во вводной части нашей статьи [6].

Для класса $\mathbf{\Pi}^1_2$ и более высоких проективных классов подобные теоремы униформизации невозможны из-за того, что существуют модели теории множеств, в которых то или иное плоское множество P класса $\mathbf{\Pi}^1_2$ не униформизуется не только проективным (любого класса), но и вообще ROD множеством. Первая такая модель была построена Леви в [28, теорема 3], и в ней искомый пример образует плоское Π^1_2-множество $P = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \notin \mathrm{L}[x]\}$, которое там не униформизуется никаким ROD-множеством. Класс $\mathrm{L}[x]$ содержит все множества, конструктивные по Гёделю *относительно* x.

Отметим, что каждое вертикальное сечение $P_x = \mathbb{R} \smallsetminus \mathrm{L}[x]$ указанного множества P — либо пустое (если $\mathbb{R} \subseteq \mathrm{L}[x]$), либо же несчетное множество, т.е. оно в принципе не может быть непустым конечным или счетным. (А, к примеру, в модели Соловея из [34] все сечения P_x вообще ко-счетны.) Вопрос существования неуниформизуемых $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеств со *счетными* вертикальными сечениями оставался открытым до работы [22], где была построена модель, содержащая такое множество. Затем был получен более точный результат:

Теорема 1.2 (доказана в [6], случай $\mathfrak{n} = 2$ в следующей теореме 2.1)**.** *Существует модель теории* **ZFC**, *в которой имеется плоское Π^1_2-множество $W \subseteq \mathbb{R}^2$, все непустые вертикальные сечения которого W_x являются классами Витали*[2]*, и которое не униформизуется никаким* ROD *множеством.*

Доказательство использовало метод генерического расширения гёделева конструктивного универсума L при помощи форсинга, являющегося произведением несчетного числа копий минимального форсинга Йенсена [20]. (Об этом форсинге см. также 28A в [19].) Другие результаты, полученные этим же методом, включают счетное Π^1_2-множество, не содержащее ни одного определимого элемента [5], класс Витали с такими же свойствами [21], и OD пара Грошек – Лейвера, состоящая из классов Витали. См. [6, 2.6] о том, чем обусловлен интерес к классам Витали в контексте этих результатов.

2 Главные результаты

Продолжая это исследование, мы доказываем здесь следующую теорему:

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{n} \geq 3$. Существует модель теории множеств* **ZFC**, *в которой истинно следующее*:

(i) *имеется плоское $\Pi^1_{\mathfrak{n}}$-множество $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, все вертикальные сечения $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$ которого являются классами Витали, и которое нельзя униформизовать никаким ROD множеством.*

(ii) *если $p \in \mathbb{R}$ то каждое $\Sigma^1_{\mathfrak{n}}(p)$-множество $P' \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, все вертикальные сечения которого не более чем счетны, униформизуется множеством класса $\Delta^1_{\mathfrak{n}+1}(p)$, в частности, ROD множеством.*

[2] Напомним, что *классом Витали* в $\mathbb{R}$ называется всякое множество вида $x + \mathbb{Q}$, т.е. сдвиг множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Следуя современному стилю в дескриптивной теории множеств, основанному на определенных технических преимуществах, в существенной части рассуждений мы будем рассматривать не вещественную прямую $\mathbb{R}$ с отношением эквивалентности Витали, а канторов дисконтинуум 2^ω с отношением эквивалентности[3] E_0. Таким образом, будет доказана следующая теорема:

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathfrak{n} \geq 3$. *Существует модель теории множеств* **ZFC**, *в которой истинно следующее*:

(i) *имеется плоское* $\Pi^1_{\mathfrak{n}}$*-множество* $W \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$, *все вертикальные сечения* $W_x = \{y : \langle x, y\rangle \in W\}$ *которого являются* E_0*-классами, и которое нельзя униформизовать никаким ROD множеством.*

(ii) *если* $p \in \mathbb{R}$ *то каждое* $\Sigma^1_{\mathfrak{n}}(p)$*-множество* $W' \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$, *все вертикальные сечения* $W'_x = \{y : \langle x, y\rangle \in W'\}$ *которого не более чем счетны, униформизуется множеством класса* $\Delta^1_{\mathfrak{n}+1}(p)$.

Вывод теоремы 2.1 из теоремы 2.2. Переход от множества W как в 2.2(i) к множеству P как в 2.1(i) производится, при помощи простых топологических аргументов, аналогично такому же переходу в [6, § 17], и мы не будем этого касаться. Вывод же 2.1(ii) из 2.2(ii) получается при помощи эффективного гомеоморфизма между $\mathbb{R}$ и ко-счетным множеством $X = \{x \in 2^\omega : \forall\, m\, \exists\, j \geq m\, (x(j) = 0)\}$, являющегося суперпозицией арктангенса, линейной функции для сжатия интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ в интервал $(0, 1)$, и разложения чисел из $(0, 1)$ в двоичные дроби с недостатком. □

3 Структура статьи

Доказательство теоремы 2.2 организовано следующим образом.

Понятия, связанные с совершенными деревьями в множестве диадических кортежей $2^{<\omega}$, вводятся в §§ 4,5. Выделяется множество **LT** *больших* деревьев — по существу, тех, отношение E_0 на которых не допускает борелевской трансверсали. Каждое множество $P \subseteq \mathbf{LT}$, замкнутое относительно обрезки деревьев по кортежам и E_0-*инвариантное*, т.е. инвариантное относительно того действия кортежей, которым индуцируется отношение E_0 (замечание 4.1), рассматривается (см. § 6) как форсинг, присоединяющий P-генерическую точку $x \in 2^\omega$. Фактически, в силу E_0-инвариантности, присоединяется E_0-класс эквивалентности $[x]_{\mathsf{E}_0} = \{y \in 2^\omega : x \mathrel{\mathsf{E}_0} y\}$ генерических точек.

Далее, в § 7 вводится множество **MT** всех *мультидеревьев*, тождественное степени $\mathbf{LT}^{\omega_1}$ со счетной базой, и мы изучаем свойства мультидеревьев (включая поведение непрерывных функций на мультидеревьях) в §§ 8–11.

[3] Напомним, что отношение E_0 определяется на 2^ω так, что $x \mathrel{\mathsf{E}_0} y$, когда равенство $x(n) = y(n)$ выполнено для всех, кроме конечного числа, индексов n. Если $X, Y \subseteq 2^\omega$, то $X \equiv_{\mathsf{E}_0} Y$ означает, что каждая точка $a \in X$ E_0-эквивалентна некоторой точке $b \in Y$, и наоборот. См. об этом в наших книгах [2, 3, 26].

Рассуждая в геделевом конструктивном универсуме L, мы строим форсинг для доказательства теоремы 2.2 в § 15 как произведение $\mathbb{\Pi} = \prod_{\xi<\omega_1} \mathbb{P}(\xi) \subseteq$ **MT** со счетной базой, где каждый сомножитель $\mathbb{P}(\xi) \subseteq$ **LT** определяется как объединение $\mathbb{P}(\xi) = \bigcup_{\xi\le\alpha<\omega_1} \mathbb{P}_\alpha(\xi)$, члены которого — счетные E_0-инвариантные множества $\mathbb{P}_\alpha(\xi) \subseteq$ **LT** в L, предплотные в $\mathbb{P}(\xi)$. Именно $\mathbb{\Pi}$-генерическое расширение класса L будет моделью для теоремы 2.2. Каждый сомножитель $\mathbb{P}(\xi)$ при этом присоединяет $\mathbb{P}(\xi)$-генерическую точку x_ξ, и всё расширение тождественно $\mathrm{L}[\langle x_\xi\rangle_{\xi<\omega_1}]$. Выделим первое ключевое свойство форсинга $\mathbb{\Pi}$:

(1) если $\xi < \omega_1$, то множество $\mathbb{P}(\xi)$ E_0-инвариантно.

Следующий главный момент построения форсингов $\mathbb{P}(\xi)$, общий с техникой построения форсинга Йенсена в [20] и в некоторых других случаях, состоит в том, чтобы каждый последующий «слой» $\mathbb{P}_\alpha(\xi)$ был в определенном роде *генерическим* над уже образованными «слоями» $\mathbb{P}_\gamma(\xi)$, $\gamma < \alpha$. Это основано на довольно сложной конструкции в §§ 12 – 14, включающей технику расщепления совершенных деревьев. Этим достигается сохранение кардиналов (лемма 16.3), непрерывное чтение имен (лемма 17.4), а также то, что

(2) для любого индекса $\xi < \omega_1$, множество всех $\mathbb{P}(\xi)$-генерических точек в расширении тождественно E_0-классу $[x_\xi]_{\mathsf{E}_0}$ самой генерической точки x_ξ, а также тождественно пересечению $Y_\xi = \bigcap_{\xi\le\alpha<\omega_1} \bigcup_{T\in\mathbb{P}_\alpha(\xi)} [T]$.

Собственно говоря, нам важно лишь равенство $[x_\xi]_{\mathsf{E}_0} = Y_\xi$ (теорема 18.1). Переход от единственного генерического объекта, как у Йенсена, к E_0-классу генерических точек здесь обеспечивается E_0-инвариантностью по (1). Как следствие, в $\mathbb{\Pi}$-генерическом расширении определимость множества $W = \{\langle \xi, y\rangle : \xi < \omega_1 \wedge y \in [x_\xi]_{\mathsf{E}_0}\}$ (который является основой примера для 2.2(i)) следует из определимости индексированного множества $\langle \mathbb{P}_\alpha(\xi)\rangle_{\xi\le\alpha<\omega_1}$ в L (§ 19).

Следуя этой идее, мы доказали теорему 1.2 в [6] (т.е. случай $\mathbb{n} = 2$ в теореме 2.2), причем ROD-неуниформизуемость множества W следует как в [6] так и здесь из E_0-инвариантности каждой компоненты форсинга $\mathbb{\Pi}$ по (1).

Основной случай $\mathbb{n} \ge 3$ в теореме 2.2 отличается необходимостью доказывать утверждение (ii) в расширении, что для $\mathbb{n} = 2$ выполнено автоматически по теореме 1.1. Мы обеспечим 2.2(ii) через посредство следующего свойства, которое будет истинно в $\mathbb{\Pi}$-генерических расширениях:

(3) если $x \in 2^\omega$, и $X \subseteq 2^\omega$ — счетное $\Sigma^1_{\mathbb{n}}(x)$-множество, то $X \subseteq \mathrm{L}[x]$.

Это свойство, даже для $\mathrm{OD}(x)$-множеств X, выполнено в коэновских и некоторых других генерических моделях, см. [23]. Оно также выполнено в **MT**-генерических расширениях универсума L, где оно основано на пермутационной инвариантности форсинга $\mathbf{MT} = \mathbf{LT}^{\omega_1}$ и на особом свойстве этих расширений, состоящем в том, что

(4) если $x, y \in 2^\omega$ в **MT**-генерическом расширении $\mathbf{L}[\langle x_\xi \rangle_{\xi<\omega_1}]$, и $y \notin \mathbf{L}[x]$, то найдется ординал ξ такой, что $x_\xi \in \mathbf{L}[y]$ но $x \in \mathbf{L}[\langle x_\eta \rangle_{\eta \neq \xi}]$

(ср. с теоремой 20 в [25] для ω_1-степени форсинга Сакса). Для $\mathbb{P}$-генерических расширений, (4) также имеет место (теорема 17.5, основанная на исследовании непрерывных функций на мультидеревьях в § 8). Однако прямо вывести отсюда (3) не удается, так как форсинг $\mathbb{P} = \prod_\xi \mathbb{P}(\xi)$ не обладает пермутационной инвариантностью из-за попарного различия компонент $\mathbb{P}(\xi)$.

Это заставляет модифицировать конструкцию форсинга следующим образом. Вообще, построение $\mathbb{P}$ можно представить как выбор максимальной цепи в определенном частично-упорядоченном множестве $\mathscr{P}$ мощности $\aleph_1$.

(5) Мы требуем, чтобы эта максимальная цепь пересекала все множества, плотные в $\mathscr{P}$, и имеющие класс определимости $\mathbf{\Sigma}^1_{\mathfrak{n}-1}$. (Теорема 15.4, пункт (ii) которой содержит свойство, более гибкое, чем эта простая генеричность, но и более сложное для прямой формулировки.)

Оценка определимости этого построения (теорема 15.4) позволяет вывести класс $\Pi^1_{\mathfrak{n}}$ множества W (см. выше) в соответствующих генерических расширениях. Кроме того, полученное множество $\mathbb{P}$ оказывается достаточно «генерическим» в **MT** в том смысле, что оно пересекает все множества, плотные в **MT**, и имеющие класс определимости $\mathbf{\Sigma}^1_{\mathfrak{n}-1}$ (лемма 16.4). Это влечет определенную степень «похожести» $\mathbb{P}$-генерических и пермутационно-инвариантных **MT**-генерических расширений, вплоть до $\mathfrak{n}$-ого уровня проективной иерархии. Отсюда, посредством непростых рассуждений в §§ 20–22, использующих также (4), мы выводим (3) в $\mathbb{P}$-генерических расширениях, обходя упомянутую выше проблему с пермутационной неинвариантностью $\mathbb{P}$, что и ведет к свойству, сформулированному в пункте (ii) теоремы 2.2.

4 Деревья

Здесь и в следующем разделе, мы в краткой форме повторим некоторые определения из [16] о совершенных деревьях и их преобразованиях, и приведем некоторые результаты.

Кортежи. $2^{<\omega}$ есть множество всех кортежей (конечных последовательностей) чисел $0, 1$, включающее *пустой кортеж* Λ. Если $t \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$, то $t^\frown i$ есть продолжение кортежа t числом i справа. Если $s, t \in 2^{<\omega}$ то $s \subseteq t$ означает, что кортеж t продолжает s (включая случай $s = t$), а $s \subset t$ означает собственное продолжение. Длина кортежа s обозначается $\mathtt{lh}(s)$, и $2^n = \{s \in 2^{<\omega} : \mathtt{lh}(s) = n\}$ (кортежи длины n).

Действие. Каждый кортеж $s \in 2^{<\omega}$ *действует* на 2^ω так, что если $x \in 2^\omega$ то $(s \cdot x)(k) = x(k) + s(k) \pmod 2$ при $k < \mathtt{lh}(s)$, а иначе просто $(s \cdot x)(k) = x(k)$. Если $X \subseteq 2^\omega$ и $s \in 2^{<\omega}$ то положим $s \cdot X = \{s \cdot x : x \in X\}$.

Замечание 4.1. Это действие кортежей на 2^ω индуцирует отношение E_0 (сноска 3) в том смысле, что если $x, y \in 2^\omega$ то $x \mathrel{\mathsf{E}_0} y$ равносильно тому, что $y = s \cdot x$ для какого-то кортежа $s \in 2^{<\omega}$. $\square$

Аналогично, если $s \in 2^m$, $t \in 2^n$, $m \le n$, то определим кортеж $s \cdot t \in 2^n$ условиями $(s \cdot t)(k) = t(k) + s(k) \pmod 2$ при $k < m$ и $(s \cdot t)(k) = t(k)$ при $m \le k < n$. Если же $m > n$, то пусть $s \cdot t = (s \restriction n) \cdot t$. В обоих случаях, $\mathtt{lh}(s \cdot t) = \mathtt{lh}(t)$. Положим $s \cdot T = \{s \cdot t : t \in T\}$ для $T \subseteq 2^{<\omega}$.

Деревья. Множество $T \subseteq 2^{<\omega}$ называется *деревом*, когда для любых кортежей $s \subset t$ из $2^{<\omega}$, из $t \in T$ следует $s \in T$. Если $T \subseteq 2^{<\omega}$ — дерево и $u \in T$, то определим *обрезку* $T\restriction_u = \{t \in T : u \subseteq t \vee t \subseteq u\}$ дерева T. Понятно, что если $\sigma \in 2^{<\omega}$, то $\sigma \cdot (T\restriction_u) = (\sigma \cdot T)\restriction_{\sigma \cdot u}$.

Непустое дерево $T \subseteq 2^{<\omega}$ является *совершенным*, символически $T \in \mathbf{PT}$, когда оно не имеет концевых вершин и изолированных ветвей. В этом случае существует самый длинный кортеж $s = \mathtt{stem}(T) \in T$, для которого $T = T\restriction_s$ (*ствол* дерева T); тогда $s^\frown 0 \in T$ и $s^\frown 1 \in T$. Если $T \in \mathbf{PT}$, то множество $[T] = \{a \in 2^\omega : \forall\, n\, (a \restriction n \in T)\}$ всех *ветвей дерева* T есть совершенное множество в 2^ω. Заметим, что $[S] \cap [T] = \varnothing$, если и только если $S \cap T$ конечно.

Большие деревья. Дерево $T \in \mathbf{PT}$ называется *большим*, $T \in \mathbf{LT}$, если имеется такая система кортежей $q^i_k = q^i_k[T] \in 2^{<\omega}$, $k < \omega$ и $i = 0, 1$, что

1. (1) $\mathtt{lh}(q^0_k) = \mathtt{lh}(q^1_k) \ge 1$ и $q^0_k(0) = 0$, $q^1_k(0) = 1$ для всех k;
2. (2) T состоит из всех кортежей вида $s = r^\frown q^{i_0}_0{}^\frown q^{i_1}_1{}^\frown q^{i_2}_2{}^\frown \dots {}^\frown q^{i_n}_n$ и их подкортежей, где $n < \omega$, $r = \mathtt{stem}(T)$, и $i_k = 0, 1$ для всех k.

В этом случае множество $[T]$ состоит из всех бесконечных последовательностей $a = r^\frown q^{i_0}_0{}^\frown q^{i_1}_1{}^\frown q^{i_2}_2{}^\frown \dots {}^\frown q^{i_n}_n{}^\frown \dots \in 2^\omega$, где $i_k = 0, 1$, $\forall\, k$. Положим

$$\mathtt{spl}_n(T) = \mathtt{lh}(r) + \mathtt{lh}(q^{i_0}_0) + \mathtt{lh}(q^{i_1}_1) + \dots + \mathtt{lh}(q^{i_{n-1}}_{n-1})$$

(независимо от выбора индексов $i_k = 0, 1$), в частности, $\mathtt{spl}_0(T) = \mathtt{lh}(r)$, так что $\mathtt{spl}(T) = \{\mathtt{spl}_n(T) : n < \omega\} \subseteq \omega$ — все *уровни расщепления* дерева T.

Замечание 4.2. Если $T \in \mathbf{LT}$, то множество $[T]$ является E_0-*большим*, т.е. нет такой борелевской функции $f : [T] \to 2^\omega$, что $x \mathrel{\mathsf{E}_0} y \iff f(x) = f(y)$ для всех $x, y \in [T]$. Обратно, каждое E_0-большое борелевское $X \subseteq 2^\omega$ содержит подмножество вида $[T]$, где $T \in \mathbf{LT}$. См. об этом в [26, 10.9]. $\square$

5 Расщепление

Простое расщепление дерева $T \in \mathbf{LT}$ состоит из поддеревьев $T(\to i) = T\restriction_{r^\frown i}$, $i = 0, 1$, где $r = \mathtt{stem}(T)$, так что $[T(\to i)] = \{x \in [T] : x(\mathtt{lh}(r)) = i\}$. Тогда $T(\to i) \in \mathbf{LT}$, $\mathtt{stem}(T(\to i)) = r^\frown q^i_0(T)$, $q^j_k(T(\to i)) = q^j_{k+1}(T)$ для всех k и $j = 0, 1$, и $\mathtt{spl}(T(\to i)) = \mathtt{spl}(T) \smallsetminus \{\mathtt{spl}_0(T)\}$.

Расщепление можно итерировать. Именно, $T(\to\Lambda) = T$ для пустого кортежа Λ, а если $s \in 2^n$, $s \neq \Lambda$, то определяем

$$T(\to s) = T(\to s(0))(\to s(1))(\to s(2))\dots(\to s(n-1)) \in \mathbf{LT}\,.$$

Пример 5.1. Если $s \in 2^{<\omega}$, то дерево $T[s] = \{t \in 2^{<\omega} : s \subseteq t \vee t \subset s\}$ принадлежит $\mathbf{LT}$, $\mathtt{stem}(T[s]) = s$, и $q^i_k(T[s]) = \langle i \rangle$. В частности, $T[\Lambda] = 2^{<\omega}$, и $T[s] = (2^{<\omega})(\to s) = (2^{<\omega})\restriction_s$ для любого s. □

Лемма 5.2. *Пусть $T \in \mathbf{LT}$. Если $s \in 2^{<\omega}$ то $T(\to s) = T\restriction_{u[s]}$, где $u[s] = u[s,T] = \mathtt{stem}(T(\to s)) = \mathtt{stem}(T)^\frown q_0^{s(0)\frown} q_1^{s(1)\frown} \dots {}^\frown q_{n-1}^{s(n-1)} \in T$. Обратно, если $u \in T$, то существует такой кортеж $s = s[u] \in 2^{<\omega}$, что $T\restriction_u = T(\to s)$.*

Доказательство. Для вывода обратного утверждения (прямое очевидно), положим $s(k) = u(\mathtt{spl}_k(T))$ для всех k таких, что $\mathtt{spl}_k(T) < \mathtt{lh}(u)$. □

Лемма 5.3. *Пусть $R \in \mathbf{LT}$, $n < \omega$, $h = \mathtt{spl}_n(T)$. Тогда*:

(i) *если $u, v \in R \cap 2^h$, то $T\restriction_u = (u \cdot v) \cdot (T\restriction_v)$* ;

(ii) *если $s, t \in 2^n$, то $R(\to s) = \sigma \cdot (R(\to t))$, где $\sigma = u[s,R] \cdot u[t,R]$* ;

(iii) *если $u, v \in R \cap 2^j$, $j < \omega$, то $T\restriction_u = \sigma \cdot (T\restriction_v)$ для некоторого $\sigma \in 2^{<\omega}$.*

Доказательство. (i) очевидно. Для доказательства (ii) ссылаемся на лемму 5.2. Для доказательства (iii) берем наименьшее число $h \in \mathtt{spl}(T)$ такое, что $j \le h$. Имеется единственная пара кортежей $u', v' \in 2^h$, для которых $u \subseteq u'$, $v \subseteq v'$. Тогда $T\restriction_u = T\restriction_{u'}$, $T\restriction_v = T\restriction_{v'}$, и $T\restriction_{u'} = (u' \cdot v') \cdot (T\restriction_{v'})$. □

Сужение деревьев. Если $R, T \in \mathbf{LT}$ и $n \in \omega$ то определим $R \subseteq_n T$ (*сужение*), если $R(\to s) \subseteq T(\to s)$ для всех $s \in 2^n$; $R \subseteq_0 T$ равносильно $R \subseteq T$. Понятно, что $R \subseteq_{n+1} T$ влечет $R \subseteq_n T$ (и $R \subseteq T$).

Лемма 5.4. *Если $R, T \in \mathbf{LT}$ и $n \ge 1$ то $R \subseteq_n T$ равносильно тому, что $\mathtt{stem}(R) = \mathtt{stem}(T)$, $q^i_k[R] = q^i_k[T]$ для всех $i = 0, 1$ и $k < n-1$, и $q^i_{n-1}[T] \subseteq q^i_{n-1}[R]$ для всех $i = 0, 1$.* □

Лемма 5.5. *Если $T \in \mathbf{LT}$, $s_0 \in 2^n$ и $U \in \mathbf{LT}$, $U \subseteq T(\to s_0)$, то имеется единственное $T' \in \mathbf{LT}$, для которого $T' \subseteq_n T$ и $T'(\to s_0) = U$. При этом*

(i) *$T'(\to s) = u[s_0,T] \cdot u[s,T] \cdot T'(\to s_0)$ выполнено для всех $s \in 2^n$* ;

(ii) *если $[U]$ ОЗ (открыто-замкнуто) в $[T(\to s_0)]$ то $[T']$ ОЗ в $[T]$* .

Доказательство. Если $s \in 2^n$ то $T(\to s) = u[s_0,T] \cdot u[s,T] \cdot T(\to s_0)$ по лемме 5.3. Положим $U_s = u[s_0,T] \cdot u[s,T] \cdot U$ для всех $s \in 2^n$, в частности, $U_{s_0} = U$. Дерево $T' = \bigcup_{u \in 2^n} U_s$ — искомое. □

Следующая лемма (доказательство см. лемму 4.1(iv) в [16]) представляет собой более сложный вариант $\subseteq_n$-сужения.

Лемма 5.6. *Если* $T \in \mathbf{LT}$, $s_0, s_1 \in 2^n$, *и* $U, V \in \mathbf{LT}$, $U \subseteq T(\to s_0{}^\frown 0)$, $V \subseteq T(\to s_1{}^\frown 1)$, *и* $U \equiv_{\mathsf{E}_0} V$ (см. сноску 3 об отношении $\equiv_{\mathsf{E}_0}$), *то найдется такое дерево* $T' \in \mathbf{LT}$, *что* $T' \subseteq_{n+1} T$ *и* $T'(\to s_0{}^\frown 0) \subseteq U$, $T'(\to s_1{}^\frown 1) \subseteq V$. $\square$

Лемма 5.7. *Пусть* $\cdots \subseteq_4 T_3 \subseteq_3 T_2 \subseteq_2 T_1 \subseteq_1 T_0$ *— бесконечная последовательность деревьев из* $\mathbf{LT}$. *Тогда* $T = \bigcap_n T_n \in \mathbf{LT}$ *и* $T \subseteq_{n+1} T_n$, $\forall n$.

Доказательство. Заметим что $\mathtt{spl}(T) = \{\mathtt{spl}_n(T_n) : n < \omega\}$; после этого оба утверждения легко выводятся. $\square$

6 LT-форсинги

Определение 6.1. **LT**-*форсинг* это любое множество $P \subseteq \mathbf{LT}$, для которого

(A) если $u \in T \in P$, то $T \restriction_u \in P$ — или, что равносильно, если $T \in P$ и $s \in 2^{<\omega}$ то $T(\to s) \in P$;

(B) P E_0-*инвариантно* — т.е. если $T \in P$ и $\sigma \in 2^{<\omega}$, то $\sigma \cdot T \in P$.

Если дополнительно $2^{<\omega} \in P$ то форсинг P называется *регулярным*. $\square$

Любой **LT**-форсинг P можно рассматривать как форсинг (множество вынуждающих условий), с порядком: если $T \subseteq T'$, то T — более сильное «условие». Форсинг P присоединяет точку $x \in 2^\omega$, т.е. если множество $G \subseteq P$ является P-генерическим над рассматриваемым универсумом множеств M, то пересечение $\bigcap_{T \in G} [T]$ содержит единственную точку $x = x[G] \in 2^\omega$, и для этой точки выполнено $M[G] = M[x[G]]$ и $G = \{T \in P : x \in [T]\}$. Точки $x[G]$ такого вида называются *P-генерическими*.

Пример 6.2. Множество **LT** всех больших деревьев является **LT**-форсингом по очевидным причинам. Другой пример **LT**-форсинга доставляет счетное множество $P_{\text{coh}} = \{T[s] : s \in 2^{<\omega}\}$ всех деревьев $T[s]$ примера 5.1, т.е. *форсинг Коэна*. Наконец, если $\varnothing \neq Q \subseteq \mathbf{LT}$, то множество

$$P = \{\sigma \cdot (T \restriction_u) : u \in T \in Q \wedge \sigma \in 2^{<\omega}\} = \{\sigma \cdot (T(\to s)) : T \in Q \wedge s, \sigma \in 2^{<\omega}\}$$

есть **LT**-форсинг по лемме 5.4 в [6]. $\square$

Дерево $T \in \mathbf{LT}$ называется *n-коллажем* над **LT**-форсингом P, если выполнено $T(\to u) \in P$ для всех $u \in 2^n$. Понятно, что 0-коллаж — это просто дерево из P, и каждый n-коллаж является и $n+1$-коллажем.

Лемма 6.3. *Если* $T \in \mathbf{LT}$, P *есть* **LT**-*форсинг,* $u \in 2^n$, *и* $T(\to u) \in P$, *то* T *является n-коллажем над* P. *В частности, в условиях леммы 5.5, если* $U \in P$, *то полученное дерево* T' *есть n-коллаж над* P.

Доказательство. Если $v \in 2^n$ то $T(\to v) = \tau \cdot T(\to u)$ для некоторого кортежа $\tau \in 2^{<\omega}$ по лемме 5.3, так что $T(\to v) \in P$ поскольку $T(\to u) \in P$. $\square$

Если $T \in \mathbf{LT}$ и $D \subseteq \mathbf{LT}$ то $X \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup D$ означает, что имеется такое конечное $D' \subseteq D$, что $T \subseteq \bigcup D'$, или, что равносильно, $[T] \subseteq \bigcup_{S \in D'} [S]$.

Определение 6.4 (измельчения)**.** Пусть $P, Q \subseteq \mathbf{LT}$ суть $\mathbf{LT}$-форсинги. Множество Q называется *измельчением* P, символически $P \sqsubset Q$, когда

(1) множество Q плотно в $P \cup Q$: если $T \in P$ то $\exists\, S \in Q\,(S \subseteq T)$;

(2) если $S \in Q$ то $S \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup P$.

Если $\mathfrak{M}$ — произвольное множество, и дополнительно к $P \sqsubset Q$ выполнено $S \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup D$ для любого $S \in Q$ и любого множества $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq P$, предплотного в P, то пишем $P \sqsubset_{\mathfrak{M}} Q$, $\mathfrak{M}$-*измельчение*. $\square$

Лемма 6.5. (i) *если $Q \subseteq Q'$ и $S \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup Q$ для всех $S \in Q'$ то $Q \sqsubset Q'$;*

(ii) *если $P \sqsubset_{\mathfrak{M}} Q \sqsubset R$* (второе отношение есть $\sqsubset$, а не $\sqsubset_{\mathfrak{M}}$!) *то $P \sqsubset_{\mathfrak{M}} R$;*

(iii) *если $\langle P_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda}$ есть $\sqsubset$-возрастающая последовательность $\mathbf{LT}$-форсингов и $0 \le \mu < \lambda$ то множество P_μ предплотно*[4] *в $P = \bigcup_{\alpha<\lambda} P_\alpha$.*

Доказательство. (ii) Соотношение $P \sqsubset R$ понятно. Пусть множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq P$ предплотно в P, и $S \in R$. Тогда $S \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup Q$ (так как $Q \sqsubset R$), так что $S \subseteq T_1 \cup \dots \cup T_n$, где $T_1, \dots, T_n \in Q$. Мы имеем $T_i \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup D$, $i = 1, \dots, n$, поскольку $P \sqsubset_{\mathfrak{M}} Q$, следовательно, $S \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup D$ также выполнено.

(iii) Пусть $S \in P_\alpha$. Если $\alpha \le \mu$ то согласно 6.4(1) имеется $T \in P_\mu$, $T \subseteq S$. Если $\mu < \alpha$ то $S \subseteq T_1 \cup \dots \cup T_n$, где $T_1, \dots, T_n \in P_\mu$. Тогда $S{\restriction}_t \subseteq T_i$ для подходящих $t \in S$ и i. Но $S' = S{\restriction}_t \in P_\alpha$. $\square$

7 Мультидеревья

Назовем *мультидеревом* любую функцию $\mathbf{T} : |\mathbf{T}| \to \mathbf{LT}$, где $|\mathbf{T}| = \mathtt{dom}\,\mathbf{T} \subseteq \omega_1$ — не более чем счетное множество, и каждое значение $\mathbf{T}(\xi)$, $\xi \in |\mathbf{T}|$, есть дерево из $\mathbf{LT}$. Множество всех мультидеревьев обозначим $\mathbf{MT}$. Если $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}$ то определим параллелепипед в $2^{|\mathbf{T}|}$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}] &= \{x \in 2^{|\mathbf{T}|} : \forall\, \xi \in |\mathbf{T}|\,(x(\xi) \in [\mathbf{T}(\xi)])\} = \\ &= \{x \in 2^{|\mathbf{T}|} : \forall\, \xi\, \forall\, m\,(x(\xi){\restriction} m \in \mathbf{T}(\xi))\} \quad , \end{aligned}$$

естественно отождествляемый с декартовым произведением $\prod_{\xi \in |\mathbf{T}|} [\mathbf{T}(\xi)]$.

Если $B \subseteq \omega_1$ не более чем счетно, то $\mathbf{MT}_B = \{\mathbf{T} \in \mathbf{MT} : |\mathbf{T}| = B\}$.

[4] Предплотность означает, что каждое дерево $T \in P$ совместно в P с каким-то $S \in D$, т.е. найдется такое дерево $R \in P$, для которого $R \subseteq T$ и $R \subseteq S$.

Множество мультидеревьев $\mathbf{MT}$ упорядочивается покомпонентно: $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S}$ ($\mathbf{T}$ есть *более сильное* мультидерево) когда $|\mathbf{S}| \subseteq |\mathbf{T}|$ и $\mathbf{T}(\xi) \subseteq \mathbf{S}(\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{S}|$. Таким образом, порядок на мультидеревьях соответствует покомпонентному включению. Самое слабое (наибольшее в смысле порядка $\leqslant$) «условие» в $\mathbf{MT}$ — это «пустое» мультидерево $\mathbf{\Lambda}$, удовлетворяющее $|\mathbf{\Lambda}| = \varnothing$.

Правильные аналоги определений и результатов раздела 5 для мультидеревьев требуют некоторой работы.

Определение 7.1. Если $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$ и $C \subseteq B$, то $\mathbf{T} \restriction C \in \mathbf{MT}_C$ есть простое ограничение. Если же $B \subseteq C$, то мультидерево $\mathbf{T} \uparrow C \in \mathbf{MT}_C$ определяется через $(\mathbf{T} \uparrow C)(\xi) = \mathbf{T}(\xi)$ при $\xi \in B$, но $(\mathbf{T} \uparrow C)(\xi) = 2^{<\omega}$ при $\xi \in C \smallsetminus B$. $\square$

Определение 7.2. Если $\mathbf{U}$ — мультидерево а $\mathbf{D}$ — множество мультидеревьев, то $\mathbf{U} \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigvee \mathbf{D}$ означает, что имеется такое конечное $\mathbf{D}' \subseteq \mathbf{D}$, что 1) $|\mathbf{V}| \subseteq C = |\mathbf{U}|$ для всех $\mathbf{V} \in \mathbf{D}'$ и 2) $[\mathbf{U}] \subseteq \bigcup_{\mathbf{V} \in \mathbf{D}'} [\mathbf{V} \uparrow C]$ (см. определение 7.1 об операции $\uparrow$), а если дополнительно 3) $[\mathbf{V} \uparrow C] \cap [\mathbf{V}' \uparrow C] = \varnothing$ для всех $\mathbf{V} \neq \mathbf{V}'$ в $\mathbf{D}'$, то пишем $\mathbf{U} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}$. $\square$

Определение 7.3. Пусть $B \subseteq \omega_1$ счетно. Фиксируем функцию $\phi : \omega \xrightarrow{\text{на}} B$, принимающую каждое значение бесконечно много раз, т. е. множество

$$\phi^{-1}(\xi) = \{k : \phi(k) = \xi\} = \{\mathbf{k}_{0\xi} < \mathbf{k}_{1\xi} < \mathbf{k}_{2\xi} < \ldots < \mathbf{k}_{l\xi} < \ldots\}$$

бесконечно для любого $\xi \in B$ — такие функции назовем *B-полными*. Если $m < \omega$ то пусть $\boldsymbol{\nu}_{m\xi}$ равно числу индексов $k < m$, $k \in \phi^{-1}(\xi)$. Тогда $\sum_{\xi \in B} \boldsymbol{\nu}_{m\xi} = m$, и $\boldsymbol{\nu}_{m\xi} > 0$ выполнено лишь для $\xi \in \phi"m = \{\phi(k) : k < m\}$.

Пусть $m < \omega$ и $\sigma \in 2^m$. Если $\xi \in \phi"m$, то множество $\phi^{-1}(\xi)$ вырезает из σ подкортеж $\sigma{\restriction}_\xi \in 2^{\boldsymbol{\nu}_{m\xi}}$ длины $\mathtt{lh}(\sigma{\restriction}_\xi) = \boldsymbol{\nu}_{m\xi}$, определенный соотношениями $\sigma{\restriction}_\xi(j) = \sigma(\mathbf{k}_{j\xi})$ для всех $j < \boldsymbol{\nu}_{m\xi}$. Таким образом, кортеж $\sigma \in 2^m$ распадается в систему кортежей $\sigma{\restriction}_\xi \in 2^{\boldsymbol{\nu}_{m\xi}}$ $(\xi \in \phi"m)$ общей длины $\sum_{\xi \in \phi"m} \boldsymbol{\nu}_{m\xi} = m$.

Если $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$ то определим $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma) \in \mathbf{MT}_B$ так, что $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)(\xi) = \mathbf{T}(\xi)(\rightarrow\sigma{\restriction}_\xi)$ для всех $\xi \in B$. В частности, $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)(\xi) = \mathbf{T}(\xi)$ для $\xi \in B \smallsetminus \phi"m$, где $m = \mathtt{lh}(\sigma)$, ибо если $\xi \notin \phi"m$ то $\mathtt{lh}(\sigma{\restriction}_\xi) = \boldsymbol{\nu}_{m\xi} = 0$.

Положим $D[\sigma, \tau] = B \smallsetminus \{\phi(i) : i < m \wedge \sigma(i) \neq \tau(i)\}$ для $m < \omega$ и $\sigma, \tau \in 2^m$. По определению мы имеем $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma) \restriction D[\sigma, \tau] = \mathbf{T}(\Rightarrow\tau) \restriction D[\sigma, \tau]$.

Если $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, то определим $\mathbf{T} \leqslant_m \mathbf{S}$, когда $\mathbf{T}(\xi) \subseteq_{\boldsymbol{\nu}_{m\xi}} \mathbf{S}(\xi)$ для всех $\xi \in B$. Это равносильно тому, что $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma) \subseteq \mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)$ для всех $\sigma \in 2^n$. $\square$

Лемма 7.4. *Пусть, в условиях определения 7.3, $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$. Тогда:*

(i) *если $\sigma \in 2^{<\omega}$ то $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma) \in \mathbf{MT}_B$ и $[\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)]$ открыто-замкнуто в $[\mathbf{T}]$;*

(ii) *если $x \subseteq \mathbf{T}$, и U — открытая окрестность точки x, то найдется такой кортеж $\sigma \in 2^m$, что $x \in [\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)] \subseteq U$;*

(iii) *если* $m < \omega$, $\sigma \in 2^m$, *и* $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)$, *то имеется единственное мультидерево* $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, *для которого* $\mathbf{S} \leqslant_m \mathbf{T}$ *и* $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma) = \mathbf{U}$, *и при этом если* $[\mathbf{U}]$ *ОЗ (открыто-замкнуто) в* $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)$, *то* $\mathbf{S}$ *ОЗ в* $\mathbf{T}$;

(iv) *если* $\mathbf{D}$ — *множество мультидеревьев и* $\mathbf{T} \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigvee \mathbf{D}$, *то найдется кортеж* $\sigma \in 2^{<\omega}$ *и мультидерево* $\mathbf{S} \in \mathbf{D}$ *такие, что* $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma) \leqslant \mathbf{S}$.

Доказательство. (i) очевидно. (ii) Мы имеем $\{x\} = \bigcap_m [\mathbf{T}(\Rightarrow a \restriction m)]$ для подходящей последовательности $a \in 2^\omega$. Вследствие компактности рассматриваемых пространств, найдется такое m, что $\mathbf{T}(\Rightarrow a \restriction m) \subseteq U$.

(iii) Если $\xi \in B$ то $\mathbf{U}(\xi) \subseteq \mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)(\xi) = \mathbf{T}(\xi)(\to s)$, где $s = \sigma \restriction_\xi$. По лемме 5.5 найдется дерево $S_\xi \in \mathbf{LT}$, удовлетворяющее $S_\xi \subseteq_n \mathbf{T}(\xi)$, где $n = \boldsymbol{\nu}_{m\xi} = \mathtt{lh}(s)$, и $S_\xi(\to s) = \mathbf{U}(\xi)$. Положим $\mathbf{S}(\xi) = S_\xi$, $\forall\, \xi$.

(iv) По определению, найдется такое мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{D}$, что $|\mathbf{S}| \subseteq B = |\mathbf{T}|$ и (замкнутое) пересечение $U = [\mathbf{T}] \cap [\mathbf{S}{\uparrow}B]$ имеет непустую внутренность в $[\mathbf{T}]$. Остается сослаться на (ii). □

Лемма 7.5. *Пусть, в условиях определения 7.3,* $\ldots \leqslant_5 \mathbf{T}_4 \leqslant_4 \mathbf{T}_3 \leqslant_3 \mathbf{T}_2 \leqslant_2 \mathbf{T}_1 \leqslant_1 \mathbf{T}_0$ — *последовательность мультидеревьев из* $\mathbf{MT}_B$. *Тогда предельное мультидерево* $\mathbf{T} = \bigwedge_n \mathbf{T}_n$, *определенное равенствами* $\mathbf{T}(\xi) = \bigcap_n \mathbf{T}_n(\xi)$ *для всех* $\xi \in B$, *принадлежит* $\mathbf{MT}_B$ *и* $\mathbf{T} \leqslant_{n+1} \mathbf{T}_n$ *для всех* n. □

Доказательство. Используем лемму 5.7 покомпонентно. □

8 Непрерывные функции: сводимость

Здесь рассматриваются некоторые особенности поведения непрерывных функций на параллелепипедах, определяемых мультидеревьями, аналогичные результатам, полученным в [24, 25] в контексте совершенных множеств и деревьев любого вида, не обязательно больших деревьев.

Пусть $B \subseteq \omega_1$ счетно, $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$, функции $f, g : [\mathbf{T}] \to \omega^\omega$ непрерывны.

- f *сводится к множеству* $C \subseteq B$ *на* $[\mathbf{T}]$, если мы имеем $f(x) = f(y)$ всякий раз, когда $x, y \in [\mathbf{T}]$ и $x \restriction C = y \restriction C$.
- f *сводится к* g *на* $[\mathbf{T}]$, если мы имеем $f(x) = f(y)$ всякий раз, когда $x, y \in [\mathbf{T}]$ и $g(x) = g(y)$.
- f *захватывает* $\alpha \in B$ *на* $[\mathbf{T}]$, если $x(\alpha) = y(\alpha)$ всякий раз, когда $x, y \in [\mathbf{T}]$ и $f(x) = f(y)$ — другими словами, требуется, чтобы *координатная функция* $c_\alpha(x) = x(\alpha)$ сводилась к f.

Лемма 8.1. *Если* $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}$, $C_0, C_1, \ldots \subseteq B = |\mathbf{T}|$, $f : [\mathbf{T}] \to \omega^\omega$ *непрерывна и сводится к каждому* C_k *на* $[\mathbf{T}]$, *то* f *сводится к* $\bigcap_k C_k$ *на* $[\mathbf{T}]$.

Доказательство. Для двух множеств, если $C = C_0 \cap C_1$ и $x, y \in [\mathbf{T}]$, $x \restriction C = y \restriction C$, то, пользуясь структурой произведения, подбираем точку $z \in [\mathbf{T}]$, для которой $z\restriction C_0 = x\restriction C_0$ и $z\restriction C_1 = y\restriction C_1$. Имеем $f(x) = f(z) = f(y)$. Отсюда случай конечного числа множеств получается простой индукцией. Для общего случая, по доказанному, можно предполагать, что $C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots$. Пусть $C = \bigcap_k C_k$, $x, y \in [\mathbf{T}]$, $x\restriction C = y\restriction C$. Существует последовательность точек $x_k \in [\mathbf{T}]$, удовлетворяющих $x_k\restriction C_k = x\restriction C_k$ и $x_k\restriction(B \smallsetminus C_k) = y\restriction(B \smallsetminus C_k)$. Тогда сразу $f(x_k) = f(x)$, $\forall\, k$. В то же время, очевидно $x_k \to y$, следовательно, и $f(x_k) \to f(y)$ по непрерывности. Отсюда $f(x) = f(y)$. □

Теорема 8.2. *Пусть* $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$, $B \subseteq \omega_1$ *счетно, и* $f, g : [\mathbf{T}] \to \omega^\omega$ *непрерывны. Тогда найдется такое мультидерево* $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$, *что либо* (i) f *сводится к* g *на* $[\mathbf{S}]$, *либо* (ii) f *захватывает некоторый ординал* $\eta \in B$ *на* $[\mathbf{S}]$ *и при этом* g *сводится к множеству* $B \smallsetminus \{\eta\}$ *на* $[\mathbf{S}]$.

Понятно, что координатная функция $c_\eta(x) = x(\eta)$ не сводится к $B \smallsetminus \{\eta\}$. Поэтому смысл теоремы заключается в том, что **не**сводимость f к g детектируется на координатных функциях.

Доказательство. Рассуждаем в обозначениях определения 7.3. План состоит в построении последовательности мультидеревьев как в лемме 7.5, с некоторыми дополнительными условиями. Пусть $m < \omega$. Мультидерево $\mathbf{R} \in \mathbf{MT}_B$ назовем *m-правильным*, если $\mathbf{R} \leqslant \mathbf{T}$ и кроме того

(1)f если $\sigma \in 2^m$ и $\alpha = \phi(m)$, то либо f сводится к $B \smallsetminus \{\alpha\}$ на $[\mathbf{R}(\Rightarrow\sigma)]$, либо нет ни одного такого мультидерева $\mathbf{R}' \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{R}' \leqslant \mathbf{R}(\Rightarrow\sigma)$, что f сводится к $B \smallsetminus \{\alpha\}$ на $[\mathbf{R}']$;

(1)g аналогично для g;

(2)f если $\sigma, \tau \in 2^m$, то либо (i) f сводится к $D[\sigma, \tau]$ на множестве $[\mathbf{R}(\Rightarrow\sigma)] \cup [\mathbf{R}(\Rightarrow\tau)]$, либо (ii) $f``[\mathbf{R}(\Rightarrow\sigma)] \cap f``[\mathbf{R}(\Rightarrow\tau)] = \varnothing$;

(2)g аналогично для g.

Лемма 8.3. *В условиях теоремы, если* $m < \omega$ *и мультидерево* $\mathbf{R} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{R} \leqslant \mathbf{T}$, *является* m*-правильным, то найдется* $m+1$*-правильное мультидерево* $\mathbf{Q} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{Q} \leqslant_{m+1} \mathbf{R}$.

Доказательство (лемма)**.** Рассмотрим один из кортежей $\sigma' \in 2^{m+1}$, и сначала построим мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{S} \leqslant_{m+1} \mathbf{R}$, удовлетворяющее (1)f в отношении только этого кортежа. Пусть $\alpha = \phi(m+1)$. Если имеется такое мультидерево $\mathbf{R}' \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{R}' \leqslant \mathbf{R}(\Rightarrow\sigma')$, что f сводится к $B \smallsetminus \{\alpha\}$ на $[\mathbf{R}']$, то его обозначим через $\mathbf{U}$. А если таких $\mathbf{R}'$ нет, то просто положим $\mathbf{U} = \mathbf{R}(\Rightarrow\sigma')$. По лемме 7.4(iii), найдется мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, для которого $\mathbf{S} \leqslant_{m+1} \mathbf{R}$ и $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma') = \mathbf{U}$. Таким образом, мультидерево $\mathbf{S}$ удовлетворяет (1)f в отношении кортежа σ'. Берем $\mathbf{S}$ в качестве «нового» мультидерева $\mathbf{R}$, берем следующий кортеж $\sigma' \in 2^{m+1}$, и делаем то же самое. И так же перебираем все кортежи в

2^{m+1}, получая в конце мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{S} \leqslant_{m+1} \mathbf{R}$, удовлетворяющее (1)f в отношении всех кортежей в 2^{m+1}.

Теперь займемся свойством (2)f. Пусть $\sigma', \tau' \in 2^{m+1}$. Заметим сразу, что если $\sigma'(m) = \tau'(m)$, то $D[\sigma', \tau'] = D[\sigma' \restriction m, \tau' \restriction m]$, так что (2)f в отношении пары σ', τ' следует из (2)f в отношении пары $\sigma' \restriction m, \tau' \restriction m$. Поэтому можно ограничиться только парами в 2^{m+1} вида $\sigma^\frown 0, \tau^\frown 1$, где $\sigma, \tau \in 2^m$. Рассмотрим одну из таких пар $\sigma' = \sigma^\frown 0$, $\tau' = \tau^\frown 1$, и построим мультидерево $\mathbf{Q} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{Q} \leqslant_{m+1} \mathbf{S}$, удовлетворяющее (2)f в отношении этой пары. Множества $C' = D[\sigma', \tau']$ и $C = D[\sigma, \tau]$ связаны соотношением $C' = C \smallsetminus \{\eta_0\}$, где $\eta_0 = \phi(m)$, а мультидеревья $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')$, $\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')$ удовлетворяют $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma') \restriction C' = \mathbf{S}(\Rightarrow\tau') \restriction C'$.

Согласно (2)f для пары σ, τ, либо f сводится к C на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)] \cup [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau)]$, либо же $f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)] \cap f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\tau)] = \varnothing$. Во втором случае мы сразу имеем $f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')] \cap f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')] = \varnothing$, так что можно не ограничивая общности предполагать, что f **сводится к** C **на** $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)] \cup [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau)]$.

Если теперь f сводится к $B' = B \smallsetminus \{\eta_0\}$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')] \cup [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')]$, то f сводится и к $C' = C \cap B'$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')] \cup [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')]$ по лемме 8.1, что и требуется. Поэтому предполагаем, что f **не сводится к** B' **на** $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')] \cup [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')]$.

Тогда существуют точки $x_0 \in [\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')]$, $y_0 \in [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')]$, для которых $x_0 \restriction B' = y_0 \restriction B'$ и $f(x_0) \neq f(y_0)$, т.е. $f(x_0)(k) = p \neq q = f(y_0)(k)$ для некоторого k; $\{p, q\} = \{0, 1\}$. По непрерывности, имеются такие относительно открытые подмножества $X \subseteq [\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')]$, $Y \subseteq [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')]$, что $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $f(x)(k) = p$ и $f(y)(k) = q$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Не ограничивая общности считаем, что имеется конечное множество $H \subseteq B$, содержащее η_0, и для каждого $\eta \in H$ — кортежи $u_\eta \in U_\eta = \mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')(\eta) = \mathbf{S}(\eta)(\to\sigma' \restriction_\eta)$, $v_\eta \in V_\eta = \mathbf{S}(\Rightarrow\tau')(\eta) = \mathbf{S}(\eta)(\to\tau' \restriction_\eta)$ равной длины $\mathtt{lh}(u_\eta) = \mathtt{lh}(v_\eta) = \ell_\eta \geq \boldsymbol{\nu}_{m+1,\eta}$, такие что $\sigma' \restriction_\eta \subseteq u_\eta$, $\tau' \restriction_\eta \subseteq v_\eta$,

$$X = \{x \in [\mathbf{S}] : \forall\, \eta \in H\, (x(\eta) \in U'_\eta)\} \quad \text{и} \quad Y = \{y \in [\mathbf{S}] : \forall\, \eta \in H\, (y(\eta) \in V'_\eta)\},$$

где $U'_\eta = U_\eta \restriction_{u_\eta}$ и $V'_\eta = V_\eta \restriction_{v_\eta}$ $(\eta \in H)$ — деревья из $\mathbf{LT}$. При этом $\sigma' \restriction_\eta = \tau' \restriction_\eta$, $u_\eta = v_\eta$, $U_\eta = V_\eta$, и $U'_\eta = V'_\eta$ для всех $\eta \in H$, $\eta \neq \eta_0$, так как $x_0 \restriction B' = y_0 \restriction B'$. Это позволит нам определить искомое мультидерево $\mathbf{Q}$ так.

Если $\eta \in B \smallsetminus H$ то положим просто $Q_\eta = \mathbf{S}(\eta)$.

Пусть $\eta \in H$, но $\eta \neq \eta_0$. Тогда $\sigma' \restriction_\eta = \tau' \restriction_\eta$, и этот кортеж $s = \sigma' \restriction_\eta = \tau' \restriction_\eta$ длины $\boldsymbol{\nu}_{m\eta} = \boldsymbol{\nu}_{m+1,\eta}$ удовлетворяет $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')(\eta) = \mathbf{S}(\Rightarrow\tau')(\eta) = \mathbf{S}(\eta)(\to s)$. Кортеж $u = u_\eta = v_\eta$ принадлежит этому дереву $\mathbf{S}(\eta)(\to s)$, так что поддерево $W_\eta = \mathbf{S}(\eta)(\to s) \restriction_u = U'_\eta = V'_\eta$ принадлежит $\mathbf{LT}$ и $W_\eta \subseteq \mathbf{S}(\eta)(\to s)$. По лемме 5.5 имеется такое дерево $Q_\eta \in \mathbf{LT}$, что $Q_\eta \subseteq_{\boldsymbol{\nu}_{m+1,\eta}} \mathbf{S}(\eta)$ и $Q_\eta(\to s) = W_\eta$.

Наконец пусть $\eta = \eta_0 \in H$. Кортежи $\sigma' \restriction_{\eta_0} \neq \tau' \restriction_{\eta_0}$ равной длины $\boldsymbol{\nu}_{m+1,\eta_0} = \boldsymbol{\nu}_{m\eta_0} + 1$ в данном случае различны, точнее $\sigma' \restriction_{\eta_0}(\boldsymbol{\nu}_{m\eta_0}) = \sigma'(m) = 0 \neq 1 = \tau'(m) = \tau' \restriction_{\eta_0}(\boldsymbol{\nu}_{m\eta_0})$. Равенства $\sigma' \restriction_{\eta_0} = \tau' \restriction_{\eta_0}$, $U_{\eta_0} = V_{\eta_0}$, $U'_{\eta_0} = V'_{\eta_0}$ также, вообще говоря, не верны. Однако всё еще $u_{\eta_0} \in U_{\eta_0} = \mathbf{S}(\eta_0)(\to\sigma' \restriction_{\eta_0})$, $v_{\eta_0} \in V_{\eta_0} = \mathbf{S}(\eta_0)(\to\tau' \restriction_{\eta_0})$, $\mathtt{lh}(u_{\eta_0}) = \mathtt{lh}(u_{\eta_0}) = \ell_{\eta_0}$, и $U'_{\eta_0} = U_{\eta_0} \restriction_{u_{\eta_0}} \subseteq U_{\eta_0}$,

$V'_{\eta_0} = V_{\eta_0}\restriction_{v_{\eta_0}} \subseteq V_{\eta_0}$, и мы имеем $U'_{\eta_0} \equiv_{\mathsf{E}_0} V'_{\eta_0}$ по лемме 5.3. Следовательно, согласно лемме 5.6, имется такое дерево $Q_{\eta_0} \in \mathbf{LT}$, что $Q_{\eta_0} \subseteq_{\boldsymbol{\nu}_{m+1,\eta_0}} \mathbf{S}(\eta_0)$, $Q_{\eta_0}(\to\sigma'\restriction_{\eta_0}) \subseteq U'_{\eta_0}$, и $Q_{\eta_0}(\to\tau'\restriction_{\eta_0}) \subseteq V'_{\eta_0}$.

Таким образом, дерево $Q_\eta \in \mathbf{LT}$, удовлетворяющее $Q_\eta \subseteq_{\boldsymbol{\nu}_{m+1,\eta}} \mathbf{S}(\eta)$, построено для всех $\eta \in B$, причем если $\eta \in H$ то $Q_\eta(\to\sigma'\restriction_\eta) \subseteq U'_\eta$ и $Q_\eta(\to\tau'\restriction_\eta) \subseteq V'_\eta$. Это позволяет определить искомое мультидерево $\mathbf{Q} \in \mathbf{MT}_B$ через $\mathbf{Q}(\eta) = Q_\eta$ для всех $\eta \in B$. Тогда $\mathbf{Q} \leqslant_{m+1} \mathbf{S}$, и по построению $\mathbf{Q}(\Rightarrow\sigma') \subseteq X$ и $\mathbf{Q}(\Rightarrow\tau') \subseteq Y$, так что $f"[\mathbf{Q}(\Rightarrow\sigma')] \cap f"[\mathbf{Q}(\Rightarrow\tau')] = \varnothing$.

Итак, мы имеем мультидерево $\mathbf{Q} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{Q} \leqslant_{m+1} \mathbf{S}$, удовлетворяющее (2)f в отношении выбранной пары $\sigma', \tau' \in 2^{m+1}$. Перебирая последовательно всю совокупность пар в 2^{m+1}, получаем мультидерево $\mathbf{Q} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{Q} \leqslant_{m+1} \mathbf{S}$, удовлетворяющее (2)f в отношении всех пар $\sigma', \tau' \in 2^{m+1}$.

Дальше повторяем всё это для функции g. □ (лемма)

Продолжем доказательство теоремы. Лемма 8.3 дает бесконечную последовательность $\ldots \leqslant_3 \mathbf{S}_2 \leqslant_2 \mathbf{S}_1 \leqslant_1 \mathbf{S}_0 = \mathbf{T}$ мультидеревьев $\mathbf{S}_m \in \mathbf{MT}_B$, причем каждое $\mathbf{S}_m$ является m-правильным. По лемме 7.5, предельное мультидерево $\mathbf{S} = \bigwedge_m \mathbf{S}_m \in \mathbf{MT}_B$ удовлетворяет $\mathbf{S} \leqslant_{m+1} \mathbf{S}_m$ для всех m, следовательно, оно m-правильно для каждого m.

Случай 1: если $\sigma, \tau \in 2^m$, $m < \omega$, то $f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)] \cap f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\tau)] = \varnothing$ влечет $g"[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)] \cap g"[\mathbf{S}(\Rightarrow\tau)] = \varnothing$. Докажем, что тогда f сводится к g на $[\mathbf{S}]$.

Пусть $x, y \in [\mathbf{S}]$ и $f(x) \neq f(y)$; докажем, что и $g(x) \neq g(y)$. Рассмотрим те точки $a, b \in 2^\omega$, для которых $\{x\} = \bigcap_m [\mathbf{S}(\Rightarrow a\restriction m)]$ и $\{y\} = \bigcap_m [\mathbf{S}(\Rightarrow b\restriction m)]$. Раз $x \neq y$, мы имеем $f"[\mathbf{S}(\Rightarrow a\restriction m)] \cap f"[\mathbf{S}(\Rightarrow b\restriction m)] = \varnothing$ для некоторого m вследствие непрерывности и компактности. Но тогда, по гипотезе случая 1, и $g"[\mathbf{S}(\Rightarrow a\restriction m)] \cap g"[\mathbf{S}(\Rightarrow b\restriction m)] = \varnothing$, откуда $g(x) \neq g(y)$.

Случай 2: имеется такая пара $\sigma' = \sigma^\frown i, \tau' = \tau^\frown j \in 2^{m+1}$, $m < \omega$, что $f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')] \cap f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')] = \varnothing$, но g сводится к $C' = D[\sigma', \tau']$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')] \cup [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')]$. Предполагается, что число m — наименьшее возможное для этого случая. Тогда из m-правильности имеем: f сводится к $C = D[\sigma, \tau]$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)] \cup [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau)]$. Пусть $\eta_0 = \phi(m)$. Заметим, что $i \neq j$, так как иначе $C = C'$, и немедленно получается противоречие. Таким образом, можно считать, что, к примеру, $\sigma' = \sigma^\frown 0, \tau' = \tau^\frown 1$. Тогда $C' = C \smallsetminus \{\eta_0\}$, так что g сводится к $B \smallsetminus \{\eta_0\}$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)]$ по m-регулярности.

Мы утверждаем, что f *не сводится к* $B \smallsetminus \{\eta_0\}$ *ни на каком мультидереве* $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}_B$*,* $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)$. В самом деле, иначе f сводится к $B \smallsetminus \{\eta_0\}$ уже на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)]$ по m-правильности. Тогда f сводится к $C' = C \cap (B \smallsetminus \{\eta_0\})$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)]$ по лемме 8.1. Отсюда следует, что f сводится к C' на объединении $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)] \cup [\mathbf{S}(\Rightarrow\tau)]$, так как $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)\restriction C = \mathbf{S}(\Rightarrow\tau)\restriction C$ (см. определение 7.3). Но это противоречит предположению $f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')] \cap f"[\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')] = \varnothing$, поскольку мультидеревья $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')$ и $\mathbf{S}(\Rightarrow\tau')$ удовлетворяют $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma') \leqslant \mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)$, $\mathbf{S}(\Rightarrow\tau') \leqslant \mathbf{S}(\Rightarrow\tau)$, и $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma')\restriction C' = \mathbf{S}(\Rightarrow\tau')\restriction C'$. Что и требовалось.

Наконец, докажем, что мультидерево $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)$ доказывает теорему, именно, f **захватывает ординал** η_0 **на** $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)]$. Что g сводится к множеству $B \smallsetminus \{\eta_0\}$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)]$, уже установлено выше. Пусть $x, y \in [\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)]$ и $f(x) = f(y)$; требуется доказать, что $x(\eta_0) = y(\eta_0)$.

Имеем $\{x\} = \bigcap_n [\mathbf{S}(\Rightarrow a\restriction n)]$ и $\{y\} = \bigcap_n [\mathbf{S}(\Rightarrow b\restriction n)]$, где $a, b \in 2^\omega$, $\sigma \subset a$, $\sigma \subset b$. Положим $D[a,b] = \bigcap_n D[a\restriction n, b\restriction n]$. Тогда $x\restriction D[a,b] = y\restriction D[a,b]$, поскольку $\mathbf{S}(\Rightarrow a\restriction n)\restriction D[a\restriction n, b\restriction n] = \mathbf{S}(\Rightarrow b\restriction n)\restriction D[a\restriction n, b\restriction n]$ для всех n. Таким образом, остается проверить, что $\eta_0 \in D[a\restriction n, b\restriction n]$ для всех n.

Пусть напротив, $\eta_0 = \phi(m) \notin D[a\restriction n, b\restriction n]$ для какого-то n. Заметим, что $n > m$, так как $a\restriction n = b\restriction n = \sigma$. Однако f сводится к $D[a\restriction n, b\restriction n]$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)]$ согласно m-правильности, поскольку $f(x) = f(y)$. Однако $\eta_0 \notin D[a\restriction n, b\restriction n]$, следовательно, $D[a\restriction n, b\restriction n] \subseteq B \smallsetminus \{\eta_0\}$, и потому f сводится к $B \smallsetminus \{\eta_0\}$ на $[\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma)]$. Но это противоречит доказанному выше. $\square$

9 Мультифорсинги и субмультифорсинги

Назовем *мультифорсингом* любую функцию $\mathbf{P}$, для которой $|\mathbf{P}| = \mathtt{dom}\,\mathbf{P} \subseteq \omega_1$ и каждое значение $\mathbf{P}(\xi)$, $\xi \in |\mathbf{P}|$, есть $\mathbf{LT}$-форсинг. Т.е. мультифорсинг — это частичная ω_1-последовательность $\mathbf{LT}$-форсингов. Мультифорсинг $\mathbf{P}$ назовем *малым*, если как область $|\mathbf{P}|$ так и каждый форсинг $\mathbf{P}(\xi)$, $\xi \in |\mathbf{P}|$ — счетные множества, и *регулярным*, если $2^{<\omega} \in \mathbf{P}(\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{P}|$.

Если $\mathbf{P}$ — мультифорсинг, то $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ будет обозначать множество всех таких мультидеревьев $\mathbf{T}$, что $|\mathbf{T}| \subseteq |\mathbf{P}|$ и $\mathbf{T}(\xi) \in \mathbf{P}(\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{P}|$. Множество $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ тождественно *произведению* $\prod_{\xi\in|\mathbf{P}|} \mathbf{P}(\xi)$ *со счетной базой*.

Следующее определение вводит тип множеств $\mathbb{P}$ из мультидеревьев, удовлетворяющих лишь минимальным требованиям замкнутости.

Определение 9.1. Пусть $\mathbf{P}$ — регулярный мультифорсинг. Множество $\mathfrak{S} \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ называется *субмультифорсингом*, если выполнены такие условия:

(I) если $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}$, $\xi \in |\mathbf{T}|$, и $T \in \mathbf{P}(\xi)$, то мультидерево $\mathbf{S}$, определенное через $|\mathbf{S}| = |\mathbf{T}|$, $\mathbf{S}(\xi) = T$, и $\mathbf{S}(\eta) = \mathbf{T}(\eta)$ при $\eta \neq \xi$, принадлежит $\mathfrak{S}$;

(II) если $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}$, $\xi \in |\mathbf{P}| \smallsetminus |\mathbf{T}|$, и $T \in \mathbf{P}(\xi)$, то мультидерево $\mathbf{S}$, определенное через $|\mathbf{S}| = |\mathbf{T}| \cup \{\xi\}$, $\mathbf{S}(\xi) = T$, и $\mathbf{S}\restriction|\mathbf{T}| = \mathbf{T}$, также принадлежит $\mathfrak{S}$;

(III) если $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathfrak{S}$, то мультидерево $\mathbf{T}' = \mathbf{T}\!\uparrow\!(|\mathbf{T}| \cup |\mathbf{S}|)$, определенное через $|\mathbf{T}'| = |\mathbf{T}| \cup |\mathbf{S}|$, $\mathbf{T}'(\xi) = \mathbf{T}(\xi)$ при $\xi \in |\mathbf{T}|$, и $\mathbf{T}'(\xi) = 2^{<\omega}$ при $\xi \in |\mathbf{S}| \smallsetminus |\mathbf{T}|$, также принадлежит $\mathfrak{S}$. $\square$

Пример 9.2. Пусть $\mathbf{P}$ — регулярный мультифорсинг, $B = |\mathbf{P}|$. Понятно, что само $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ — самый богатый субмультифорсинг в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$. С другой стороны, самым бедным субмультифорсингом в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ является счетное множество $\mathfrak{S}^B_{\text{coh}}$ всех таких мультидеревьев $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, что $|\mathbf{T}| \subseteq B$ конечно и $\mathbf{T}(\xi) \in P_{\text{coh}}$ (см. пример 6.2) для всех $\xi \in |\mathbf{T}|$ — *форсинг Коэна* в $(2^\omega)^B$. $\square$

Мультидеревья $\mathbf{T}, \mathbf{S}$, принадлежащие субмультифорсингу $\mathfrak{S} \subseteq \mathbf{MT}$, *совместны в* $\mathfrak{S}$, если найдется мультидерево $\mathbf{U} \in \mathfrak{S}$, удовлетворяющее $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{T}$ и $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{S}$. Как обычно, множество $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{S}$ называется:

плотным в $\mathfrak{S}$, когда $\forall\, \mathbf{T} \in \mathfrak{S}\, \exists\, \mathbf{S} \in \mathbf{D}\, (\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T})$;

открыто-плотным в $\mathfrak{S}$, если к тому же $\forall\, \mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathfrak{S}\, (\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S} \in \mathbf{D} \Longrightarrow \mathbf{T} \in \mathbf{D})$;

предплотным в $\mathfrak{S}$, если $\mathbf{D}^+ = \{\mathbf{T} \in \mathfrak{S} : \exists\, \mathbf{S} \in \mathbf{D}\, (\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S})\}$ плотно в $\mathfrak{S}$.

В контексте определения 7.3, мультидерево $\mathbf{T}$ (не обязательно $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}$!) назовем *$m$-коллажем над* $\mathfrak{S}$, если $\mathbf{T}(\Rightarrow u) \in \mathfrak{S}$ для всех кортежей $u \in 2^m$. Таким образом, 0-коллаж – это любое мультидерево из $\mathfrak{S}$, и каждый m-коллаж является и $m+1$-коллажем по свойствам замкнутости определения 9.1.

Лемма 9.3. *Пусть* $\mathbf{P}$ *— мультифорсинг,* $\mathfrak{S} \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ *является субмультифорсингом,* $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$*, и* $\phi : \omega \to B$ *есть B-полная функция. Тогда, в обозначениях определения 7.3, справедливо следующее*:

(i) *если* $\sigma \in 2^{<\omega}$ *и* $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}$ *то* $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma) \in \mathfrak{S}$;

(ii) *если* $\sigma \in 2^n$ *и* $\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma) \in \mathfrak{S}$*, то* $\mathbf{T}$ *есть n-коллаж над* $\mathfrak{S}$;

(iii) *если* $\mathbf{T}$ *есть m-коллаж над* $\mathfrak{S}$*, и* $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{S}$ *открыто-плотно в* $\mathfrak{S}$*, то имеется мультидерево* $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$*, являющееся m-коллажем над* $\mathfrak{S}$*, и удовлетворяющее* $\mathbf{S} \leqslant_m \mathbf{T}$ *и* $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma) \in \mathbf{D}$ *для всех* $\sigma \in 2^m$;

(iv) *если* $U \subseteq [\mathbf{T}]$ *— окрестность точки* $x_0 \in [\mathbf{T}]$ *в* $[\mathbf{T}]$ *то существует мультидерево* $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$*, для которого* $|\mathbf{S}| = B$*,* $x_0 \in [\mathbf{S}] \subseteq U$*, и* $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$.

Доказательство. (i) Используем свойство $\mathbf{LT}$-форсингов 6.1(A) вместе со свойствами замкнутости определения 9.1. Далее, разложение операции $(\Rightarrow\sigma)$ на компоненты, по определению 7.3, сразу сводит (ii) к лемме 6.3.

(iii) Если $\sigma \in 2^m$ то по лемме 7.4(iii) найдется мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, $\mathbf{S} \leqslant_m \mathbf{T}$, удовлетворяющее $\mathbf{S}(\Rightarrow\sigma) \in \mathbf{D}$ для этого σ. При этом $\mathbf{S}$ — все еще m-коллаж над $\mathfrak{S}$ по (ii). Повторяем эту процедуру по всем кортежам $\sigma \in 2^m$.

(iv) Ссылаемся на (i) и лемму 7.4(ii). □

10 О подмножествах со свойством Бэра

Этот и следующий раздела содержат два приложения леммы 7.5 к построению мультидеревьев с определенными свойствами. В сравнении с теоремой 8.2, где лемма 7.5 также использовалась для получения результата, здесь нам по необходимости придется ограничивать промежуточные мультидеревья принадлежностью к некоторому мультифорсингу.

Лемма 10.1. *Пусть* $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}$*,* $B = |\mathbf{T}|$*. Если множество* $X \subseteq [\mathbf{T}]$ *имеет свойство Бэра внутри* $[\mathbf{T}]$*, то существует такое мультидерево* $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$*, что* $[\mathbf{S}] \subseteq X$ *или* $[\mathbf{S}] \subseteq [\mathbf{T}] \smallsetminus X$.

Доказательство. Фиксируем B-полную функцию $\phi : \omega \xrightarrow{\text{на}} B$. По условию, X или $[\mathbf{T}] \smallsetminus X$ является ко-тощим на некотором непустом открыто-замкнутом $U \subseteq [\mathbf{T}]$; в силу очевидной симметрии предполагаем, что именно X — ко-тощее на U. Имеем $[\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)] \subseteq U$ для подходящего $\sigma \in 2^{<\omega}$ по лемме 7.4(ii). Однако множество $[\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)]$ само открыто-замкнуто в $[\mathbf{T}]$, а $X' = X \cap [\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)]$ — ко-тощее в $[\mathbf{T}(\Rightarrow\sigma)]$. Этим задача сводится к случаю, когда множество X уже сразу ко-тощее в $[\mathbf{T}]$, что мы и будем предполагать. В этом предположении можно считать, что $X = \bigcap_n U_n$, где каждое $U_n \subseteq [\mathbf{T}]$ топологически открыто и плотно в $[\mathbf{T}]$.

Случай 1: Найдется такое мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, что $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$ и $[\mathbf{S}] \cap U_n = \varnothing$ для некоторого n. Тогда $[\mathbf{S}] \subseteq [\mathbf{T}] \smallsetminus X$, и все доказано.

Случай 2: Если $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$ и $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$, то $[\mathbf{S}] \cap U_n \neq \varnothing$ для всех n. Определим регулярный мультифорсинг $\mathbf{P}$ так, что $|\mathbf{P}| = B$ и если $\xi \in B$ то

$$\mathbf{P}(\xi) = \{s{\scriptstyle\bullet}(\mathbf{T}(\xi)(\to t)) : s \in 2^{<\omega} \wedge t \in \mathbf{T}(\xi)\} \cup P_{\text{coh}} \ \text{ (см. определение 6.2).}$$

Рассматривается полный субмультифорсинг $\mathfrak{S} = \{\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P}) : |\mathbf{T}| = B\}$, так что $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}$. Мы утверждаем, что для любого m множество

$$\mathbf{D}_m = \{\mathbf{S} \in \mathfrak{S} : [\mathbf{S}] \cap [\mathbf{T}] = \varnothing \text{ или } \mathbf{S} \leqslant \mathbf{T} \wedge [\mathbf{S}] \subseteq U_m\}$$

открыто-плотно в $\mathfrak{S}$. Открытость очевидна, а для вывода плотности пусть $\mathbf{T}' \in \mathfrak{S}$. Если $[\mathbf{T}'] \not\subseteq [\mathbf{T}]$, то $U = [\mathbf{T}'] \smallsetminus [\mathbf{T}]$ открыто в $[\mathbf{T}']$ и непусто, и по лемме 7.4(ii) найдется мультидерево $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$, для которого $[\mathbf{S}] \subseteq U$, т.е. $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}'$ и $\mathbf{S} \in \mathbf{D}_m$. Поэтому предположим, что $\mathbf{T}' \leqslant \mathbf{T}$. Но тогда $[\mathbf{T}'] \cap U_m \neq \varnothing$ по гипотезе случая 2. Аналогично применяя лемму 7.4(ii), мы находим мультидерево $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$, для которого $[\mathbf{S}] \subseteq U_m$, т.е. $\mathbf{S} \in \mathbf{D}_m$. Плотность доказана.

Теперь лемма 9.3(iii) дает последовательность $\ldots \leqslant_4 \mathbf{T}_3 \leqslant_3 \mathbf{T}_2 \leqslant_2 \mathbf{T}_1 \leqslant_1 \mathbf{T}_0 \leqslant \mathbf{T}$ мультидеревьев $\mathbf{T}_m \in \mathbf{MT}_B$, удовлетворяющих $\mathbf{T}_m(\Rightarrow\sigma) \in \mathbf{D}_m$ для всех m и $\sigma \in 2^m$. Мультидерево $\mathbf{S} = \bigwedge_m \mathbf{T}_m$ (лемма 7.5) тогда удовлетворяет $[\mathbf{S}] \subseteq U_m$ для всех m, откуда $[\mathbf{S}] \subseteq X$. □

11 Отделение образа от прообраза

Если $x_0 \in X \subseteq 2^\omega$ и $f : X \to 2^\omega$ непрерывна, причем $f(x_0) \neq x_0$, то найдется такая окрестность U точки x_0 в X, что ее f-образ $f"U$ не пересекается с U. Следующая теорема представляет собой вариант этого утверждения.

Определение 11.1. Пусть $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$ и $\xi \in B$. Непрерывная функция $f : [\mathbf{T}] \to 2^\omega$ называется *простой на* $[\mathbf{T}]$ *для* ξ, если найдется такой кортеж $\sigma \in 2^{<\omega}$, что для всех $x \in [\mathbf{T}]$ выполнено $f(x) = \sigma{\scriptstyle\bullet}x(\xi)$. □

Теорема 11.2. *В условиях определения 7.3, пусть $\xi \in B = |\mathbf{P}|$, $\mathfrak{S} \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ — субмультифорсинг, $m, n < \omega$, $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$ есть m-коллаж над $\mathfrak{S}$, и функция $f : [\mathbf{T}] \to 2^\omega$ непрерывна. Тогда*:

(i) *если* $U \in \mathbf{LT}$ *есть* n*-коллаж над* $\mathbf{LT}$*-форсингом* P*, то найдутся такие мультидерево* $\mathbf{T}' \in \mathbf{MT}_B$ *и дерево* $U' \in \mathbf{LT}$*, что* $\mathbf{T}' \leqslant_m \mathbf{T}$*,* $U' \subseteq_n U$*,* $\mathbf{T}'$ *есть* m*-коллаж над* $\mathfrak{S}$*,* U' *есть* n*-коллаж над* P*, и* $[U'] \cap f``[\mathbf{T}'] = \varnothing$*;*

(ii) *если* $\xi \in B = |\mathbf{P}|$*, и* f *не является простой для* ξ *ни на каком мультидереве вида* $\mathbf{T}(\Rightarrow r)$*,* $r \in 2^{<\omega}$*, то имеется такое мультидерево* $\mathbf{T}' \in \mathbf{MT}_B$*, что* $\mathbf{T}' \leqslant_m \mathbf{T}$*,* $\mathbf{T}'$ *—* m*-коллаж над* $\mathfrak{S}$*, и* $[\mathbf{T}'(\xi)] \cap f``[\mathbf{T}'] = \varnothing$*.*

Доказательство. (i) Рассмотрим для начала пару кортежей $u \in 2^m$, $s \in 2^n$, и пусть $x_0 \in [\mathbf{T}(\Rightarrow u)]$ произвольно. Выберем $y_0 \in [U(\rightarrow s)]$ так, что $y_0 \neq f(x_0)$. Вследствие непрерывности, найдется открытая окрестность $G \subseteq [\mathbf{T}]$ точки x_0 в $\mathbf{T}(\Rightarrow u)$ и кортеж $t \in U(\rightarrow s)$, удовлетворяющие $t \subset y_0$, и $t \not\subset x(\xi)$ для всех $x \in G$. Положим $V = U\restriction_t$. Тогда $V \in P$ и $V \subseteq U(\rightarrow s)$. По лемме 5.5, найдется такое дерево $U' \in \mathbf{LT}$, что $U' \subseteq_n U$ и $U'(\rightarrow s) = V$. При этом U' является n-коллажем над P по лемме 6.3.

С другой стороны, согласно лемме 9.3(iv), имеется такое мультидерево $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$, что $|\mathbf{S}| = B$ и $[\mathbf{S}] \subseteq G$. По лемме 7.4(iii), найдется мультидерево $\mathbf{T}' \in \mathbf{MT}_B$, удовлетворяющее $\mathbf{T}' \leqslant_m \mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'(\Rightarrow u) = \mathbf{S}$. При этом $\mathbf{T}'$ является m-коллажем над $\mathfrak{S}$ по лемме 9.3(ii). Итак, $\mathbf{T}'$ и U' доказывают (i) в том частичном смысле, что мы имеем только $[U'(\rightarrow s)] \cap f``[\mathbf{T}'(\Rightarrow u)] = \varnothing$, а не $[U'] \cap f``[\mathbf{T}'] = \varnothing$. Однако можно итерировать эту процедуру, перебирая все пары кортежей $u \in 2^m$, $s \in 2^n$, что и дает искомый результат.

(ii) Как и в первой части, достаточно, для произвольной пары кортежей $r, s \in 2^m$ (случай $r = s$ не исключен) найти m-коллаж $\mathbf{T}' \in \mathbf{MT}_B$ над $\mathfrak{S}$, удовлетворяющий $\mathbf{T}' \leqslant_m \mathbf{T}$ и $[\mathbf{T}'(\Rightarrow s)(\xi)] \cap f``[\mathbf{T}'(\Rightarrow r)] = \varnothing$.

Дерево $T = \mathbf{T}(\xi)$ принадлежит $\mathbf{P}(\xi) \subseteq \mathbf{LT}$, причем $\mathbf{T}(\Rightarrow s)(\xi) = T(\rightarrow s')$ и $\mathbf{T}(\Rightarrow r)(\xi) = T(\rightarrow r')$, где $s' = s\restriction_\xi$ и $t' = t\restriction_\xi$ — кортежи длины $n = \boldsymbol{\nu}_{m\xi}$, см. определение 7.3. Мы имеем $T(\rightarrow s') = \tau \cdot T(\rightarrow r')$ по лемме 5.3, где $\tau = u[s', T] \cdot u[r', T]$. Однако f не является простой функцией на $\mathbf{T}(\Rightarrow r)$, так что существует точка $x_0 \in \mathbf{T}(\Rightarrow r)$, для которой $f(x_0) \neq \tau \cdot x_0(\xi)$. Мы имеем два кортежа $v \neq w$ в $2^{<\omega}$ равной длины $\mathtt{lh}(v) = \mathtt{lh}(w) > \mathtt{lh}(\tau)$, удовлетворяющих $v \subset f(x_0)$ и $w \subset \tau \cdot x_0(\xi)$. Полагаем $w' = \tau \cdot w$; тогда $w' \subset x_0(\xi)$.

Как и выше, используя непрерывность f и лемму 9.3, мы находим такое мультидерево $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$, что $|\mathbf{S}| = B$, $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}(\Rightarrow r)$, и если $x \in [\mathbf{S}]$ то $v \subset f(x)$, $w \subset \tau \cdot x(\xi)$, $w' \subset x(\xi)$. И далее, находим мультидерево $\mathbf{T}' \in \mathbf{MT}_B$, удовлетворяющее $\mathbf{T}' \leqslant_m \mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'(\Rightarrow r) = \mathbf{S}$, и являющееся m-коллажем над $\mathfrak{S}$. Мы утверждаем, что $[\mathbf{T}'(\Rightarrow s)(\xi)] \cap f``[\mathbf{T}'(\Rightarrow r)] = \varnothing$.

В самом деле, по построению, если $x \in [\mathbf{S}] = [\mathbf{T}'(\Rightarrow r)]$ то $v \subset f(x)$, так что остается проверить, что $w \subset b$ для всех $b \in [\mathbf{T}'(\Rightarrow s)(\xi)]$. Однако $\mathbf{T}'(\Rightarrow s)(\xi) = T'(\rightarrow s')$ и $\mathbf{T}'(\Rightarrow r)(\xi) = T'(\rightarrow r')$, где $T' = \mathbf{T}'(\xi) \in \mathbf{P}(\xi)$. В то же время, T' — дерево в $\mathbf{LT}$ и $T' \subseteq_n T$, так что $T'(\rightarrow s') = \tau \cdot T'(\rightarrow r')$ по лемме 5.5. Поэтому если $b \in [\mathbf{T}'(\Rightarrow s)(\xi)]$ то $a = \tau \cdot b \in [\mathbf{T}'(\Rightarrow r)(\xi)] = [T'(\rightarrow r')]$. Это означает, что $w' \subset a$ по выбору $\mathbf{S} = \mathbf{T}'(\Rightarrow r)$. Но тогда $w \subset b = \tau \cdot a$ (поскольку $w = \tau \cdot w'$), что и требовалось. $\square$

12 Измельчение мультифорсингов

Форсинг для доказательства теоремы 2.1 будет определен в виде ω_1-объединения возрастающей ω_1-последовательности мультифорсингов. Следующее определение 12.3 сообщает требования, которые будут предъявлены к каждому шагу этой конструкции. Перед этим дадим такое определение.

Определение 12.1 (кодировка непрерывных функций)**.** Пусть $B \subseteq \omega_1$ не более чем счетно. *Код непрерывной функции* из $(2^\omega)^B$ в 2^ω есть такое индексированное семейство $\mathbf{c} = \langle U_i^{\mathbf{c}}(k)\rangle_{k<\omega, i=0,1}$ конечных множеств $U_i^{\mathbf{c}}(k) \subseteq \mathfrak{S}_{\text{coh}}^B$ (см. пример 9.2), что для каждого k:

(1) если $\mathbf{T} \in U_0^{\mathbf{c}}(k)$ и $\mathbf{S} \in U_0^{\mathbf{c}}(k)$ то $[\mathbf{T}{\upharpoonright}B] \cap [\mathbf{S}{\upharpoonright}B] = \varnothing$, и

(2) $\bigcup_{k<\omega, i=0,1} \bigcup_{\mathbf{T}\in U_i^{\mathbf{c}}(k)} [\mathbf{T}{\upharpoonright}B] = (2^\omega)^B$.

Множество всех таких кодов обозначим через CCF_B.

Положим $\mathrm{CCF} = \bigcup_{B\subseteq\omega_1,\, \mathtt{card}\, B\le\aleph_0} \mathrm{CCF}_B$, и если $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}_B$, то $|\mathbf{c}| = B$.

Сама кодируемая функция $f = f^{\mathbf{c}} : (2^\omega)^B \to 2^\omega$ определяется в этом случае так: $f^{\mathbf{c}}(x)(k) = i$, если найдется мультидерево $\mathbf{T} \in U_i^{\mathbf{c}}(k)$, для которого $x \in [U{\upharpoonright}B]$. Корректность этого определения следует из свойства (1). $\square$

Рутинное доказательство следующей леммы, основанное на компактности рассматриваемых пространств, опускается.

Лемма 12.2. *Если $B \subseteq \omega_1$ счетно, $X \subseteq (2^\omega)^B$ замкнуто, и функция $f : X \to 2^\omega$ непрерывна, то найдется такой код $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}_B$, что $f = f^{\mathbf{c}}{\restriction}X$.* $\square$

Определение 12.3 (в L)**.** Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}'$, включающей все аксиомы $\mathbf{ZFC}$ кроме аксиомы степени, но с добавлением аксиомы, утверждающей существование $\mathscr{P}(\omega)$. (Тогда выводится существование ординала ω_1, а также континуальных множеств вроде $\mathbf{LT}$.)

Пусть $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}$ — регулярный (малый) мультифорсинг. Тогда $|\mathbf{P}| = B \in \mathfrak{M}$ и $\alpha = \mathtt{sup}\, B = \bigcup B < \omega_1$. Обозначим через $\mathfrak{S}(\mathbf{P})$ замыкание множества $\mathbf{MT}(\mathbf{P}) \cap \mathrm{L}_\alpha$ в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ относительно всех трех операций определения 9.1, так что $\mathfrak{S}(\mathbf{P}) \in \mathfrak{M}$, $\mathfrak{S}(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, $\mathfrak{S}(\mathbf{P})$ — счетный субмультифорсинг.[5]

Заметим, что $\mathfrak{S}(\mathbf{P})$ не зависит от $\mathfrak{M}$.

Мультифорсинг $\mathbf{Q}$ (не обязательно из $\mathfrak{M}$) есть $\mathfrak{M}$-*измельчение* мультифорсинга $\mathbf{P}$, символически $\mathbf{P} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \mathbf{Q}$, при выполнении таких требований:

(A) $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}|$ и $\mathbf{Q}$ — малый мультифорсинг;

(B) если $\xi \in |\mathbf{P}|$ то $\mathbf{P}(\xi) \sqsubset_{\mathfrak{M}} \mathbf{Q}(\xi)$ в смысле определения 6.4;

(C) если $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}(\mathbf{P})$ то имеется мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$, удовлетворяющее $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$ и $\mathbf{S} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}$ для любого открыто-плотного $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{S}(\mathbf{P})$, $\mathbf{D} \in \mathfrak{M}$;

[5] L_α есть α-й уровень конструктивной иерархии по Гёделю.

(D) если $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}(\mathbf{P})$, $\xi \in |\mathbf{T}|$, функция $f : (2^\omega)^{|\mathbf{T}|} \to 2^\omega$ непрерывна и имеет код в $\mathrm{CCF}_{|\mathbf{T}|} \cap \mathfrak{M}$, то найдется такое $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$, что $|\mathbf{S}| = |\mathbf{T}|$, $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$, и либо (i) имеется такой кортеж $\sigma \in 2^{<\omega}$, что $f(x) = \sigma \cdot x(\xi)$ для всех $x \in [\mathbf{S}]$, либо (ii) $f(x) \notin [U]$ для всех $x \in [\mathbf{S}]$ и $U \in \mathbf{Q}(\xi)$. $\square$

Теорема 12.4 (в L)**.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная транзитивная модель теории* $\mathbf{ZFC}'$*, а $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}$ — регулярный (малый) мультифорсинг. Тогда найдется малый мультифорсинг $\mathbf{Q}$, являющийся $\mathfrak{M}$-измельчением $\mathbf{P}$.*

Доказательство этой теоремы содержится в двух следующих разделах. Само построение $\mathbf{Q}$ дается в § 13, а доказательство требуемых свойств в § 14.

13 Построение измельчающего мультифорсинга

Следующие определения формализуют построение генерических мультидеревьев для доказательства теоремы 12.4 при помощи леммы 7.5.

- **Рассуждая в условиях теоремы 12.4**, пусть $B = |\mathbf{P}|$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\mathbf{P})$, так что $B < \omega_1$ и $\mathfrak{S} \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ — счетный субмультифорсинг.
- На протяжении всего доказательства теоремы 12.4, т.е. до конца § 14, **фиксируем B-полную функцию** $\phi : \omega \xrightarrow{\text{на}} B$. Это позволяет применять **обозначения определения 7.3**.

Мы для начала приведем все мультидеревья $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}$ к области B, заменив каждое из них его копией $\mathbf{T}^\uparrow = \mathbf{T}{\uparrow}B$ (см. определение 7.1). Таким образом, вследствие регулярности данного мультифорсинга $\mathbf{P}$, мы имеем $\mathbf{T}^\uparrow \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ и $|\mathbf{T}^\uparrow| = B$, и по определению $\mathbf{T}^\uparrow(\xi) = \mathbf{T}(\xi)$ при $\xi \in |\mathbf{T}|$, но $\mathbf{T}^\uparrow(\xi) = 2^{<\omega}$ при $\xi \in B \smallsetminus |\mathbf{T}|$. Положим $\mathfrak{S}^\uparrow = \{\mathbf{T}^\uparrow : \mathbf{T} \in \mathfrak{S}\}$, это также субмультифорсинг.

Определение 13.1. *Системой (над $\mathfrak{S}^\uparrow$)* будем называть любую функцию $\varphi : \mathtt{dom}\,\varphi \to \mathbf{MT}_B$ где $\mathtt{dom}\,\varphi \subseteq \omega \times \omega$ конечно, и если $\langle k, m\rangle \in \mathtt{dom}\,\varphi$ то

(1) если $n < m$ то $\langle k, n\rangle$ также принадлежит $\mathtt{dom}\,\varphi$;

(2) $\varphi(k, m)$ — дерево из $\mathbf{MT}_B$ и m-коллаж над $\mathfrak{S}^\uparrow$, и $|\varphi(k, m)| = B$;

(3) если $m > 0$ то $\varphi(k, m) \leqslant_m \varphi(k, m - 1)$.

В этом случае, через ν_k^φ обозначим наибольшее число m, для которого $\langle k, m\rangle \in \mathtt{dom}\,\varphi$, и $\nu_k^\varphi = -1$, если таких m нет. Положим $|\varphi| = \{k : \nu_k^\varphi \geq 0\}$ — это конечное множество. Множество всех таких систем обозначим $\mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$.

Система φ *продолжает* систему ψ, символически $\psi \subseteq \varphi$, если $\mathtt{dom}\,\psi \subseteq \mathtt{dom}\,\varphi$ и $\psi = \varphi{\restriction}\mathtt{dom}\,\psi$; а $\psi \subset \varphi$ будет обозначать строгое продолжение. $\square$

Лемма 13.2 (очевидно)**.** *Предположим, что $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$. Тогда*

(i) *если $k \in |\varphi|$ и $m = \nu_k^\varphi$ то продолжение φ' системы φ через $\nu_k^{\varphi'} = m+1$ и $\varphi'(k, m + 1) = \varphi'(k, m)$ есть система, продолжающая φ ;*

(ii) *если* $k \notin |\varphi|$ *и* $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}^{\uparrow}$, *то продолжение* φ' *системы* φ, *через* $\mathtt{dom}\,\varphi' = \mathtt{dom}\,\varphi \cup \{\langle k, 0\rangle\}$ *и* $\varphi'(k,0) = \mathbf{T}$, *есть система, продолжающая* φ. □

Определение 13.3. (A) Через DEF обозначим совокупность всех множеств $X \subseteq \mathrm{HC}$, определимых в HC (= все наследственно счетные множества) $\in$-формулами с параметрами из $\mathfrak{M} \cup \{\mathfrak{M}, \phi\}$. Раз множество DEF счетно, лемма 13.2 позволяет построить такую бесконечную систему $\Phi : \omega \times \omega \to \mathbf{MT}_B$, которая удовлетворяет требованиям (2) и (3) определения 13.1 на всей области $k, m < \omega$, а также удовлетворяет следующему *условию генеричности*: каждое множество $\Delta \in \mathrm{DEF}$ *блокируется* одной из систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$, $\varphi \subset \Phi$, в том смысле, что

— либо (I) $\varphi \in \Delta$,

— либо (II) нет ни одной системы $\psi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow}) \cap \Delta$, продолжающей φ.

Положим $\mathbf{T}^k_m = \Phi(k, m)$ для всех $k, m < \omega$.

(B) Согласно лемме 7.5, *предельные деревья* $\mathbf{L}^k = \bigwedge_m \mathbf{T}^k_m$, определенные через $|\mathbf{L}^k| = B$ и $\mathbf{L}^k(\xi) = \bigcap_m \mathbf{T}^k_m(\xi)$ для всех $\xi \in B$, принадлежат $\mathbf{MT}_B$ и удовлетворяют $\mathbf{L}^k \leqslant_{m+1} \mathbf{T}^k_m$ для всех k, m. Соответственно, если $\xi \in B$ то $\mathbf{L}^k(\xi) \in \mathbf{LT}$ и $\mathbf{L}^k(\xi) \subseteq_n \mathbf{T}^k_m(\xi)$ для всех m, где $n = \boldsymbol{\nu}_{m\xi}$ (см. определение 7.3). Это означает, что $\mathbf{L}^k(\xi)(\to s) \subseteq \mathbf{T}^k_m(\xi)(\to s)$ для всех $s \in 2^n$.

(C) Если $\xi \in B$ то множество $Q_\xi = \{\sigma \cdot \mathbf{L}^k(\xi)(\to s) : k < \omega \wedge \sigma, s \in 2^{<\omega}\}$ является счетным $\mathbf{LT}$-форсингом, см. пример 6.2. Определяем малый мультифорсинг $\mathbf{Q}$ соотношениями $|\mathbf{Q}| = B$ и $\mathbf{Q}(\xi) = Q_\xi$ для всех $\xi \in B$. □

Мы проверим, что мультифорсинг $\mathbf{Q}$ удовлетворяет всем требованиям определения 12.3; при этом 12.3(A) прямо выполнено по построению. Следующая очевидная (пункт (II) определения 13.3(A) для плотных Δ невозможен) лемма будет играть ключевую роль в проверке остальных требований.

Лемма 13.4. *Пусть множество* $\Delta \in \mathrm{DEF}$, $\Delta \subseteq \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$, *плотно в* $\mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$, *т. е. каждая система из* $\mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$ *продолжается до системы из* Δ. *Тогда существует система* $\varphi \in \Delta$, *удовлетворяющая* $\varphi \subset \Phi$. □

Следствие 13.5. *Если* $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}^{\uparrow}$ *то найдется такое* k, *что* $\mathbf{L}^k \leqslant \mathbf{T}^k_0 = \mathbf{T}$. *Если* $\xi \in B$ *и* $T \in \mathbf{P}(\xi)$ *то найдется такое* k, *что* $\mathbf{L}^k(\xi) \subseteq \mathbf{T}^k_0(\xi) = T$.

Доказательство. Рассмотрим множество Δ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$, что хотя бы для одного $k \in |\varphi|$ выполнено $\varphi(k, 0) = \mathbf{T}$. Раз $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}^{\uparrow} \in \mathfrak{M}$, множество Δ принадлежит DEF. Мы утверждаем, что Δ плотно в $\mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$. В самом деле, пусть $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$. Берем произвольное $k \notin |\varphi|$. По лемме 13.2(ii), найдется система $\psi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$, продолжающая φ и удовлетворяющая $\langle k, 0\rangle \in \mathtt{dom}\,\psi$ и $\psi(k, 0) = \mathbf{T}$, т.е. $\psi \in \Delta$, завершая доказательство плотности.

По лемме 13.4, имеется система $\varphi \in \Delta$, $\varphi \subset \Phi$. Тогда $\mathbf{T}^k_0 = \varphi(k, 0) = \mathbf{T}$ для какого-то k. Однако $\mathbf{L}^k$ удовлетворяет $\mathbf{L}^k \leqslant \mathbf{T}^k_0$ по 13.3(B), что и требовалось.

Второе утверждение сводится к первому: если $\xi \in B$ и $T \in \mathbf{P}(\xi)$ то по определению найдется мультидерево $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}^{\uparrow}$, удовлетворяющее $\mathbf{T}(\xi) = T$. $\square$

14 Проверка требований

Проверяем требования определения 12.3 для $\mathbf{Q}$ в контексте построения § 13.

Проверка требования 12.3(B). Фиксируем $\xi \in B$. Для проверки требования (1) определения 6.4 (плотность множества $\mathbf{Q}(\xi)$ в $\mathbf{Q}(\xi) \cup \mathbf{P}(\xi)$), пусть $T \in \mathbf{P}(\xi)$. Согласно следствию 13.5, имеем $\mathbf{L}^k(\xi) \subseteq T$ для какого-то k. Но дерево $S = \mathbf{L}^k(\xi)$ принадлежит $Q_\xi = \mathbf{Q}(\xi)$ по 13.3(C), что и требовалось.

Теперь пусть $\xi \in B$, множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{P}(\xi)$ предплотно в $\mathbf{P}(\xi)$, и $U \in \mathbf{Q}(\xi)$; выведем $U \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup D$. По определению, $U = \sigma \cdot \mathbf{L}^k(\xi)(\to s)$, где $k < \omega$, $\xi \in B$, и $s, \sigma \in 2^{<\omega}$. Можно предполагать, что $\sigma = \Lambda$, т.е. на самом деле просто $U = \mathbf{L}^k(\xi)(\to s)$. (Общий случай сводится к случаю $U = \mathbf{L}^k(\xi)(\to s)$ подстановкой $\sigma \cdot D$ вместо D.) Сверх этого, можно предполагать, что и $s = \Lambda$, т.е. $U = \mathbf{L}^k(\xi)$, так как $\mathbf{L}^k(\xi)(\to s) \subseteq \mathbf{L}^k(\xi)$. Итак, пусть $U = \mathbf{L}^k(\xi)$.

Далее, из предплотности D и свойства 9.1(I) субмультифорсинга $\mathfrak{S}^{\uparrow}$ следует, что множество $\mathbf{D} \in \mathfrak{M}$ всех мультидеревьев $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}^{\uparrow}$, удовлетворяющих $\mathbf{T}(\xi) \subseteq V$ для некоторого $V \in D$, само открыто-плотно в $\mathfrak{S}^{\uparrow}$.

Теперь мы утверждаем, что множество $\Delta \in \mathfrak{M}$ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$, что $k \in |\varphi|$, и для каждого кортежа $t \in 2^n$, где $n = \nu_k^\varphi$, мультидерево $\varphi(k,n)(\Rightarrow t)$ принадлежит $\mathbf{D}$, плотно в $\mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$. В самом деле, пусть $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$. По лемме 13.2(ii), считаем, что $k \in |\varphi|$, т.е. $n' = \nu_k^\varphi \geq 0$. По определению, мультидерево $\mathbf{T} = \varphi(k, n')$ является n'-коллажем над $\mathfrak{S}^{\uparrow}$, а тогда и n-коллажем, где $n = n' + 1$, по лемме 9.3(i). Поэтому по лемме 9.3(iii) найдется мультидерево $\mathbf{T}' \in \mathbf{MT}_B$, являющееся n-коллажем над $\mathfrak{S}^{\uparrow}$ и удовлетворяющее $\mathbf{T}' \leqslant_n \mathbf{T}$ и $\mathbf{T}'(\Rightarrow t) \in \mathbf{D}$ для всех $t \in 2^n$. Дополняем φ до системы ψ с $\mathtt{dom}\,\psi = \mathtt{dom}\,\varphi \cup \{\langle k, n\rangle\}$ и $\psi(k,n) = \mathbf{T}'$; соотношение $\psi \in \Delta$ выполнено.

Теперь по лемме 13.4 существует система $\varphi \in \Delta$, удовлетворяющая $\varphi \subset \Phi$. Тогда $\varphi(k,n)(\Rightarrow t) = \mathbf{T}_n^k(\Rightarrow t) \in \mathbf{D}$ для любого $t \in 2^n$, где $n = \nu_k^\varphi$, т.е. мы имеем $\mathbf{T}_n^k \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}$. Значит и $\mathbf{L}^k \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}$. Отсюда имеем $U = \mathbf{L}^k(\xi) \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigcup D$ по определению $\mathbf{D}$, что и требовалось.

Проверка требования 12.3(C). Пусть множество $\mathbf{D} \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{D} \subseteq \mathfrak{S}$ открыто-плотно в $\mathfrak{S}$. Соответствующее множество $\mathbf{D}^{\uparrow} = \{\mathbf{T}^{\uparrow} : \mathbf{T} \in \mathbf{D}\} \subseteq \mathfrak{S}^{\uparrow}$ тогда открыто-плотно в $\mathfrak{S}^{\uparrow}$.[6] Согласно следствию 13.5, достаточно доказать, что $\mathbf{L}^k \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}^{\uparrow}$ для любого $k < \omega$.

Из открыто-плотности $\mathbf{D}^{\uparrow}$ следует, что множество $\Delta_k \in \mathfrak{M}$ всех таких

[6] Для вывода открытости, пусть $\mathbf{T} \in \mathbf{D}$ — откуда $\mathbf{T}^{\uparrow} \in \mathbf{D}^{\uparrow}$, $\mathbf{S} \in \mathfrak{S}$, и $\mathbf{S}^{\uparrow} \leqslant \mathbf{T}^{\uparrow}$. Мы не можем прямо утверждать, что $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$. Однако мультидерево $\mathbf{S}' = \mathbf{S}{\uparrow}(|\mathbf{T}| \cup |\mathbf{S}|)$ также принадлежит $\mathfrak{S}$ по определению 9.1(III), причем из $\mathbf{S}^{\uparrow} \leqslant \mathbf{T}^{\uparrow}$ легко следует $\mathbf{S}' \leqslant \mathbf{T}$. Отсюда $\mathbf{S}' \in \mathbf{D}$ из-за открытости $\mathbf{D}$, так что $\mathbf{S}^{\uparrow} = \mathbf{S}'^{\uparrow} \in \mathbf{D}^{\uparrow}$.

систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$, что $k \in |\varphi|$, и для каждого кортежа $t \in 2^n$, где $n = \nu_k^\varphi$, мультидерево $\varphi(k,n)(\Rightarrow t)$ принадлежит $\mathbf{D}^\uparrow$, плотно в $\mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$ — см. проверку 12.3(B) выше. По лемме 13.4 существует система $\varphi \in \Delta_k$, удовлетворяющая $\varphi \subset \Phi$. Тогда $\varphi(k,n)(\Rightarrow t) = \mathbf{T}_n^k(\Rightarrow t) \in \mathbf{D}$ для любого $t \in 2^n$, где $n = \nu_k^\varphi$, т.е. мы имеем $\mathbf{T}_n^k \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}^\uparrow$, откуда $\mathbf{L}^k \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}^\uparrow$, что и требовалось.

Проверка требования 12.3(D). Пусть $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}$, $\xi \in C = |\mathbf{T}|$, $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}_C \cap \mathfrak{M}$, и $f = f^{\mathbf{c}}$ (непрерывная функция $(2^\omega)^C \to 2^\omega$). Тогда мультидерево $\mathbf{T}^\uparrow = \mathbf{T}{\uparrow}B$ принадлежит $\mathfrak{S}^\uparrow$, и функция $f^\uparrow(x) = f(x{\restriction}C) : (2^\omega)^B \to 2^\omega$ непрерывна. Обращаясь к терминологии § 11, мы можем считать, что (*) ни на каком дереве $\mathbf{T}' \in \mathfrak{S}^\uparrow$, $\mathbf{T}' \leqslant \mathbf{T}^\uparrow$, функция $f^\uparrow$ не является простой для ξ — поскольку иначе, взяв при помощи следствия 13.5 мультидерево $\mathbf{S}$ вида $\mathbf{L}^k$, удовлетворяющее $\mathbf{L}^k \leqslant \mathbf{T}'$, мы сразу получим (i) требования 12.3(D).

Теперь, предполагая (*), мы установим, соответственно, что любое мультидерево $\mathbf{S} = \mathbf{L}^k$ с $\mathbf{L}^k \leqslant \mathbf{T}_0^k = \mathbf{T}^\uparrow$ выполняет условие (ii) требования 12.3(D). Пусть $U \in \mathbf{Q}(\xi) = Q_\xi$, и требуется доказать, что $f^\uparrow(x) \notin [U]$ для всех $x \in [\mathbf{L}^k]$. По определению, $U = \tau{\cdot}\mathbf{L}^\ell(\xi)(\Rightarrow s)$, где $\tau, s \in 2^{<\omega}$ и $\ell < \omega$. Понятно, что раз $\mathbf{L}^\ell(\xi)(\Rightarrow s) \subseteq \mathbf{L}^\ell(\xi)$, мы можем предполагать, что $s = \Lambda$, т.е. $U = \tau{\cdot}\mathbf{L}^\ell(\xi)$. Более того, можно предполагать, что и $\tau = \Lambda$, т.е. $U = \mathbf{L}^\ell(\xi)$, поскольку иначе просто рассмотрим функцию $f'(x) = \tau{\cdot}f^\uparrow(x)$ вместо $f^\uparrow$.

Итак, фиксируем $\ell < \omega$ и доказываем, что $[\mathbf{L}^\ell(\xi)] \cap f^\uparrow{}``[\mathbf{L}^k] = \varnothing$.

Случай 1: $\ell \neq k$. Рассмотрим множество Δ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$, что $k, \ell \in |\varphi|$ — т.е. $m = \nu_k^\varphi \geq 0$ и $n = \nu_\ell^\varphi \geq 0$, и $[\varphi(\ell,n)(\xi)] \cap f^\uparrow{}``[\varphi(k,m)] = \varnothing$.

Лемма 14.1. *Множество Δ плотно в $\mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$.*

Доказательство (лемма)**.** Пусть $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$. Согласно лемме 13.2(ii), можно считать, что $k, \ell \in |\varphi|$, т.е. $n' = \nu_\ell^\varphi \geq 0$ и $m' = \nu_k^\varphi \geq 0$. По определению, мультидерево $\mathbf{R}' = \varphi(k,m')$ является m'-коллажем над $\mathfrak{S}^\uparrow$, а тогда и m-коллажем, где $m = m'+1$, по лемме 9.3(i).

Далее, можно предполагать, что $\phi(n') = \xi$, ибо если это не так, то возьмем наименьшее число $n'' > n'$, удовлетворяющее $\phi(n'') = \xi$, и тривиально продолжим систему φ посредством $\varphi(\ell,j) = \varphi(\ell,n')$ для всех $n' < \ell \leq n''$. Как и выше, мультидерево $\mathbf{Z}' = \varphi(\ell,n')$ является n'-коллажем над $\mathfrak{S}^\uparrow$, а тогда и n-коллажем, где $n = n'+1$. Это означает, что $\mathbf{Z}'(\Rightarrow\sigma) \in \mathfrak{S}^\uparrow$ для всех $\sigma \in 2^n$. В частности, $\mathbf{Z}'(\Rightarrow\sigma)(\xi) \in \mathbf{P}(\xi)$ для $\sigma \in 2^n$. Однако $\mathbf{Z}'(\Rightarrow\sigma)(\xi) = \mathbf{Z}'(\xi)(\to\sigma{\restriction}_\xi)$ по определению 7.3, где $\sigma{\restriction}_\xi \in 2^\nu$ и $\nu = \boldsymbol{\nu}_{m\xi}$. Следовательно, дерево $Z' = \mathbf{Z}'(\xi)$ является ν-коллажем над $\mathbf{P}(\xi)$.

По теореме 11.2(i) найдется найдутся такие мультидерево $\mathbf{R} \in \mathbf{MT}_B$ и дерево $Z \in \mathbf{LT}$, что $\mathbf{R} \leqslant_m \mathbf{R}'$, $Z \subseteq_\nu Z'$, $\mathbf{R}$ есть m-коллаж над $\mathfrak{S}^\uparrow$, Z есть ν-коллаж над $\mathfrak{S}(\xi)$, и $[Z] \cap f^\uparrow{}``[\mathbf{R}] = \varnothing$. Определим мультидерево $\mathbf{Z} \in \mathbf{MT}_B$ так, что $\mathbf{Z}(\xi) = Z$ и $\mathbf{Z}(\eta) = \mathbf{Z}'(\eta)$ для всех $\eta \in B$, $\eta \neq \xi$.

Сублемма 14.2. $\mathbf{Z}$ *есть n-коллаж над $\mathfrak{S}^\uparrow$ и $\mathbf{Z} \leqslant_n \mathbf{Z}'$.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \tau^\frown i \in 2^n$, где $\tau \in 2^{n'}$ и $i = 0, 1$. Кортежи $\sigma{\restriction}_\eta \in 2^{\boldsymbol{\nu}_{n\eta}}$ и $\tau{\restriction}_\eta \in 2^{\boldsymbol{\nu}_{n'\eta}}$ (определение 7.3) тогда связаны соотношениями: $\sigma{\restriction}_\eta = \tau{\restriction}_\eta$ при $\eta \neq \xi$, но $\sigma{\restriction}_\xi = (\tau{\restriction}_\xi)^\frown i$, поскольку $\phi(n') = \xi$ и $n = n' + 1$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma)(\eta) = \mathbf{Z}(\eta)({\to}\sigma{\restriction}_\eta) = \mathbf{Z}'(\eta)({\to}\sigma{\restriction}_\eta) = \mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma)(\eta)$$

при $\eta \neq \xi$, т.е. $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma){\restriction}(B \smallsetminus \{\xi\}) = \mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma){\restriction}(B \smallsetminus \{\xi\})$. Далее, $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma)(\xi) = \mathbf{Z}(\xi)({\to}\sigma{\restriction}_\xi) = Z({\to}\sigma{\restriction}_\xi) = Z({\to}\tau{\restriction}_\xi)({\to}i) \in \mathbf{P}(\xi)$, поскольку Z является ν-коллажем над $\mathfrak{S}(\xi)$. Отсюда $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma) \in \mathfrak{S}^\uparrow$ по свойству 9.1(I) субмультифорсингов. В силу произвольности $\sigma \in 2^n$, $\mathbf{Z}$ есть n-коллаж над $\mathfrak{S}^\uparrow$.

Далее, для доказательства $\mathbf{Z} \leqslant_n \mathbf{Z}'$ требуется, в тех же обозначениях, вывести $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma) \leqslant \mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma)$ для всех $\sigma \in 2^n$, т.е. $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma)(\eta) \subseteq \mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma)(\eta)$ для всех $\eta \in B$. Если $\eta \neq \xi$, то мы имеем просто $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma)(\eta) \subseteq \mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma)(\eta)$, см. выше. Далее, $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma)(\xi) = Z({\to}s)$ и $\mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma)(\xi) = Z'({\to}s)$, где $s = \sigma{\restriction}_\xi \in 2^\nu$, $\nu = \boldsymbol{\nu}_{m\xi}$. Однако по построению $Z \subseteq_\nu Z'$, так что мы имеем $Z({\to}s) \subseteq Z'({\to}s)$, или, что эквивалентно, $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma)(\xi) \subseteq \mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma)(\xi)$. Итак, $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma)(\eta) \subseteq \mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma)(\eta)$ для всех $\eta \in B$, т.е. $\mathbf{Z}({\Rightarrow}\sigma) \leqslant \mathbf{Z}'({\Rightarrow}\sigma)$, что и требовалось. □ (сублемма)

Возвращаясь к лемме, продолжим φ до системы ψ с $\mathtt{dom}\,\psi = \mathtt{dom}\,\varphi$, $\nu_k^\varphi = m$, $\nu_\ell^\varphi = n$, $\psi(k, m) = \mathbf{R}$, и $\psi(\ell, n) = \mathbf{Z}$ (всего два новых значения). Из предыдущего следует, что ψ — система из $\mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$. В самом деле, $\psi(k, m) = \mathbf{R}$ — один из двух новых элементов по сравнению с φ — есть m-коллаж над $\mathfrak{S}^\uparrow$ и $\mathbf{R} \leqslant_m \mathbf{R}' = \varphi(k, m')$, причем $m = m' + 1$, как и требуется в 13.1(3). И аналогично для $\psi(\ell, n) = \mathbf{Z}$ — второго нового элемента. Так что $\psi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$ и, конечно, $\varphi \preccurlyeq \psi$ по построению. Наконец, $[Z] \cap f^{\uparrow}{}''[\mathbf{R}] = \varnothing$ по построению, откуда $\psi \in \Delta$. Это и доказывает плотность множества Δ. □ (лемма)

Теперь следствие 13.4 дает нам систему $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$, $\varphi \subset \Phi$. Имеем $k, \ell \in |\varphi|$, и потому $m = \nu_k^\varphi \geq 0$ и $n = \nu_\ell^\varphi \geq 0$, и мультидеревья $\mathbf{T}_m^k = \varphi(k, m)$, $\mathbf{T}_n^\ell = \varphi(\ell, n)$ удовлетворяют $[\mathbf{T}_n^\ell(\xi)] \cap f^{\uparrow}{}''[\mathbf{T}_m^k] = \varnothing$ по определению Δ, а тогда и $[\mathbf{L}^k(\xi)] \cap f^{\uparrow}{}''[\mathbf{L}^k] = \varnothing$, поскольку $\mathbf{L}^k \subseteq \mathbf{T}_m^k$. Что и требовалось.

Случай 2: $\ell = k$. Рассмотрим множество Δ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$, что $k \in |\varphi|$ — так что $m = \nu_k^\varphi \geq 0$, — и $[\varphi(k, m)(\xi)] \cap f^{\uparrow}{}''[\varphi(k, m)] = \varnothing$. Мы не утверждаем здесь плотность Δ, однако согласно определению 13.3 найдется система $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^\uparrow)$, $\varphi \subset \Phi$, *блокирующая* Δ в смысле 13.3(A), (I)$\vee$(II).

Мы утверждаем, однако, что 13.3(A)(II) здесь для φ невозможно. Для доказательства, пусть $m' = \nu_k^\varphi$ и $\mathbf{R}' = \varphi(k, m') = \Phi(k, m') = \mathbf{T}_{m'}^k$. Тогда $\mathbf{R} \subseteq \mathfrak{S}^\uparrow = \mathbf{T}_0^k$, а потому, согласно предположению (*) в начале проверки 12.3(D), ни на каком дереве $\mathbf{T}' \in \mathfrak{S}^\uparrow$, $\mathbf{T}' \leqslant \mathbf{R}'$, функция $f^\uparrow$ не является простой для ξ. Теорема 11.2(ii) приносит в этой ситуации мультидерево $\mathbf{R} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, являющееся m-коллажем над $\mathfrak{S}^\uparrow$, где $m = m'+1$, и удовлетворяющее $\mathbf{R} \leqslant_m \mathbf{R}'$ и $[\mathbf{R}(\xi)] \cap f^{\uparrow}{}''[\mathbf{R}] = \varnothing$. Как и в случае 1, мы можем продолжить φ

до системы $\psi \in \mathbf{Sys}(\mathfrak{S}^{\uparrow})$ с единственным новым элементом $\psi(k,m) = \mathbf{R}$, и при этом $\psi \in \Delta$ по выбору $\mathbf{R}$, доказывая невозможность 13.3(A)(II) для φ.

Это означает, что имеет место 13.3(A)(I), т.е. $\varphi \in \Delta$. Значит, $[\varphi(k,m)(\xi)] \cap f^{\uparrow}"[\varphi(k,m)] = \varnothing$, т.е. $[\mathbf{T}^k_m(\xi)] \cap f^{\uparrow}"[\mathbf{T}^k_m] = \varnothing$, откуда следует $[\mathbf{L}^k(\xi)] \cap f^{\uparrow}"[\mathbf{L}^k] = \varnothing$, поскольку $\mathbf{L}^k \leqslant \mathbf{T}^k_m$, что и требовалось. □ (Теорема 12.4)

15 Главный форсинг

В этом разделе, **мы рассуждаем в конструктивном универсуме** L**.** Нам потребуются определения, связанные с последовательностями мультифорсингов.

Прежде всего, расширим определение $\sqsubset_{\mathfrak{M}}$ в 12.3, определяя $\mathbf{P} \sqsubset^{+}_{\mathfrak{M}} \mathbf{Q}$, когда $|\mathbf{P}| \subseteq |\mathbf{Q}|$ и $\mathbf{P} \sqsubset \mathfrak{M}(\mathbf{Q}{\restriction}|\mathbf{P}|)$ в смысле 12.3. Далее, для каждой последовательности $\vec{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P}_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda}$ $(\lambda < \omega_1)$ малых мультифорсингов $\mathbf{P}_\alpha$:

(a) через $\mathfrak{M}(\vec{\mathbf{P}})$ обозначим наименьшую транзитивную модель теории $\mathbf{ZFC}'$ (см. определение 12.3) вида L_γ, содержащую $\vec{\mathbf{P}}$ (а тогда и все мультифорсинги $\mathbf{P}_\nu$), в которой λ и каждое множество $|\mathbf{P}_\nu|$ и форсинг $\mathbf{P}_\nu(\xi)$ $(\xi \in |\mathbf{P}_\nu|)$ не более чем счетны,

(b) введем мультифорсинг $\mathbf{P} = \bigcup^{\mathtt{cw}} \vec{\mathbf{P}} = \bigcup^{\mathtt{cw}}_{\nu<\lambda} \mathbf{P}_\nu$ (покомпонентное объединение) через $|\mathbf{P}| = \bigcup_{\nu<\lambda} |\mathbf{P}_\nu|$ и $\mathbf{P}(\xi) = \bigcup_{\xi<\nu<\lambda,\, \xi\in|\mathbf{P}_\nu|} \mathbf{P}_\nu(\xi)$ для $\xi \in |\mathbf{P}|$.

Определение 15.1 (в L)**.** Пусть $\lambda \leq \omega_1$. Через $\overrightarrow{\mathbf{MF}}_\lambda$ обозначим множество всех таких λ-последовательностей $\vec{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P}_\nu \rangle_{\nu<\lambda}$ малых мультифорсингов $\mathbf{P}_\nu$, что, для каждого $\nu < \lambda$:

1) $|\mathbf{P}_\nu| = \nu + 1$,

2) $\mathbf{P}_\nu(\nu)$ содержит дерево $2^{<\omega}$ (регулярность), и

3) $\bigcup^{\mathtt{cw}}_{\mu<\nu} \mathbf{P}_\mu \sqsubset^{+}_{\mathfrak{M}(\vec{\mathbf{P}}\restriction\nu)} \mathbf{P}_\nu$.

Положим $\overrightarrow{\mathbf{MF}} = \bigcup_{\lambda<\omega_1} \overrightarrow{\mathbf{MF}}_\lambda$. □

Множество $\overrightarrow{\mathbf{MF}} \cup \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$ упорядочиваем отношениями продолжения $\subset$, $\subseteq$.

Лемма 15.2 (в L)**.** *Пусть $\kappa < \lambda < \omega_1$, и $\vec{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P}_\nu \rangle_{\nu<\kappa}$ — последовательность из $\overrightarrow{\mathbf{MF}}_\kappa$. Тогда:*

(i) $\mathbf{P} = \bigcup^{\mathtt{cw}} \vec{\mathbf{P}}$ *есть малый регулярный мультифорсинг и* $|\mathbf{P}| = \kappa$*;*

(ii) *существует последовательность* $\vec{\mathbf{Q}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ *с* $\mathtt{dom}\,\vec{\mathbf{Q}} = \lambda$ *и* $\vec{\mathbf{P}} \subset \vec{\mathbf{Q}}$.

Доказательство. (i) По определению, $\mathbf{P}(\xi) = \bigcup_{\xi\leq\nu<\kappa} \mathbf{P}_\nu(\xi)$. В объединении первый член $\mathbf{P}_\xi(\xi)$ содержит дерево $2^{<\omega}$, откуда и следует регулярность.

(ii) Определяем мультифорсинги $\mathbf{P}_\alpha$, $\kappa \leq \alpha < \lambda$, индукцией по α. Именно, допустим, что все $\mathbf{P}_\nu$, $\kappa \leq \nu < \alpha$, уже определены и полученная последовательность $\vec{\mathbf{Q}} = \langle \mathbf{P}_\mu \rangle_{\mu<\alpha}$ принадлежит $\overrightarrow{\mathbf{MF}}_\alpha$. Тогда $\mathbf{P}' = \bigcup^{\mathtt{cw}} \vec{\mathbf{Q}} = \bigcup^{\mathtt{cw}}_{\mu<\alpha} \mathbf{P}_\mu$

есть малый регулярный мультифорсинг с $|\mathbf{P}'| = \alpha$ согласно (i), и при этом $\mathbf{P}' \in \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\overrightarrow{\mathbf{Q}})$. По теореме 12.4 найдется малый мультифорсинг $\mathbf{Q}$, удовлетворяющий $|\mathbf{Q}| = \alpha$ и $\mathbf{P}' \sqsubset_{\mathfrak{M}} \mathbf{Q}$. Теперь определяем малый мультифорсинг $\mathbf{P}_\alpha$ так, что $|\mathbf{P}_\alpha| = \alpha + 1$, $\mathbf{P}_\alpha(\xi) = \mathbf{Q}(\xi)$ для всех $\xi < \alpha$, и наконец $\mathbf{P}_\alpha(\alpha) = P_{\text{coh}}$ (см. пример 6.2), т.е. $2^{<\omega} \in \mathbf{P}_\alpha(\alpha)$, для регулярности. □

Определение 15.3 (ключевое)**.** Последовательность $\overrightarrow{\mathbf{P}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ *блокирует* множество $W \subseteq \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, если либо $\overrightarrow{\mathbf{P}} \in W$ (позитивный блок) либо же нет ни одной последовательности $\overrightarrow{\mathbf{Q}} \in W$ с $\overrightarrow{\mathbf{P}} \subseteq \overrightarrow{\mathbf{Q}}$ (негативный блок). □

Перед следующей теоремой о блокирующей последовательности, мы напомним, что HC есть множество всех *наследственно счетных* множеств, так что $\mathrm{HC} = \mathrm{L}_{\omega_1}$ в L. См. [8, глава 5, раздел 4] о классах определимости $\varSigma_n^X$, $\varPi_n^X$, $\varDelta_n^X$ для любого множества X, и в частности об $\varSigma_n^{\mathrm{HC}}$, $\varPi_n^{\mathrm{HC}}$, $\varDelta_n^{\mathrm{HC}}$ для $X = \mathrm{HC}$ в [7, разделы 8, 9] или в других подходящих источниках.

Теорема 15.4 (в L)**.** *Если* $\mathfrak{n} \geq 3$ *то существует последовательность* $\overrightarrow{\mathbb{P}} = \langle \mathbb{P}_\alpha \rangle_{\alpha < \omega_1} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$*, удовлетворяющая таким двум условиям*:

- (i) *сама* $\overrightarrow{\mathbb{P}}$*, как множество пар* $\langle \alpha, \mathbb{P}_\alpha \rangle$*, принадлежит классу* $\varDelta_{\mathfrak{n}-1}^{\mathrm{HC}}$;
- (ii) (генеричность $\overrightarrow{\mathbb{P}}$ по отношению к $\varSigma_{\mathfrak{n}-2}^{\mathrm{HC}}(\mathrm{HC})$-множествам) *если* $W \subseteq \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ *есть* $\varSigma_{\mathfrak{n}-2}^{\mathrm{HC}}(\mathrm{HC})$*-множество* (т.е. параметры из HC допускаются в определяющей формуле)*, то имеется ординал* $\gamma < \omega_1$*, для которого обрезанная последовательность* $\overrightarrow{\mathbb{P}} \restriction \gamma = \langle \mathbb{P}_\alpha \rangle_{\alpha < \gamma} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ *блокирует* W*.*

Доказательство. Через $\leqslant_{\mathrm{L}}$ обозначается каноническое полное упорядочение класса L; его ограничение на $\mathrm{HC} = \mathrm{L}_{\omega_1}$ является $\varDelta_1^{\mathrm{HC}}$-отношением. Раз $\mathfrak{n} \geq 3$, существует универсальное $\varSigma_{\mathfrak{n}-2}^{\mathrm{HC}}$-множество $\mathfrak{U} \subseteq \omega_1 \times \mathrm{HC}$. Таким образом, $\mathfrak{U}$ принадлежит классу $\varSigma_{\mathfrak{n}-2}^{\mathrm{HC}}$ (беспараметрическое $\varSigma_{\mathfrak{n}-2}$-определение в HC), и для каждого множества $X \subseteq \mathrm{HC}$ класса $\varSigma_{\mathfrak{n}-2}^{\mathrm{HC}}(\mathrm{HC})$ (т.е. определимого в HC $\varSigma_{\mathfrak{n}-2}$-формулой с параметрами из HC) существует такой ординал $\alpha < \omega_1$, что $X = \mathfrak{U}_\alpha$, где $\mathfrak{U}_\alpha = \{x : \langle \alpha, x \rangle \in \mathfrak{U}\}$). Выбор ω_1 как области параметров обоснован базовой для этого раздела гипотезой $\mathbf{V} = \mathrm{L}$, которая влечет существование $\varDelta_1^{\mathrm{HC}}$-сюръекции $\omega_1 \xrightarrow{\text{на}} \mathrm{HC}$.

Возвращаясь к определению 15.3, заметим, что для любой последовательности $\overrightarrow{\mathbf{P}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и любого множества $W \subseteq \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ имеется последовательность $\overrightarrow{\mathbf{Q}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, удовлетворяющая $\overrightarrow{\mathbf{P}} \subset \overrightarrow{\mathbf{Q}}$ и блокирующая W. Определяем $\overrightarrow{\mathbf{Q}}_\alpha \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ индукцией по $\alpha < \omega_1$ так что $\overrightarrow{\mathbf{Q}}_0 = \varnothing$, $\overrightarrow{\mathbf{Q}}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \overrightarrow{\mathbf{Q}}_\alpha$ для предельных λ, а каждая $\overrightarrow{\mathbf{Q}}_{\alpha+1}$ определяется как $\leqslant_{\mathrm{L}}$-наименьшая последовательность $\overrightarrow{\mathbf{Q}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ удовлетворяющая $\overrightarrow{\mathbf{P}} \subset \overrightarrow{\mathbf{Q}}$ и блокирующая $\mathfrak{U}_\alpha$. Тогда $\overrightarrow{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \overrightarrow{\mathbf{Q}}_\alpha \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$.

Условие (ii) выполнено по построению, а (i) допускает рутинную проверку, основанную на том, что $\overrightarrow{\mathbf{MF}} \in \varDelta_1^{\mathrm{HC}}$. □

Определение 15.5 (в L)**.** Фиксируем натуральное число $\mathbb{n} \geq 3$, для которого доказывается теорема 2.1. Фиксируем последовательность $\overrightarrow{\mathbb{P}} = \langle \mathbb{P}_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$, которую приносит для этого числа $\mathbb{n}$ теорема 15.4.

Положим $\mathbb{P} = \bigcup^{\mathtt{cw}}_{\alpha<\omega_1} \mathbb{P}_\alpha$. Таким образом, $\mathbb{P}$ — мультифорсинг, $|\mathbb{P}| = \omega_1$, и $\mathbb{P}(\xi) = \bigcup_{\xi \leq \alpha < \omega_1} \mathbb{P}_\alpha(\xi)$ для всех $\xi < \omega_1$. По определению, каждое множество $\mathbb{P}_\alpha$ — малый мультифорсинг, удовлетворяющий $|\mathbb{P}_\alpha| = \alpha + 1$, а каждая компонента $\mathbb{P}_\alpha(\xi)$ $(\xi \leq \alpha < \omega_1)$ есть счетный **LT**-форсинг. Отсюда следует, что если $\alpha < \omega_1$ то мультифорсинг $\mathbb{P}_{<\alpha} = \bigcup^{\mathtt{cw}}_{\nu<\alpha} \mathbb{P}_\nu$ удовлетворяет равенству $|\mathbb{P}_{<\alpha}| = \alpha$, и при этом, коль скоро $\overrightarrow{\mathbb{P}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$, мы имеем

$$(*) \quad \mathbb{P}_{<\alpha} \sqsubset^{+}_{\mathfrak{M}_\alpha} \mathbb{P}_\alpha, \ \text{ т.е. } \ \mathbb{P}_{<\alpha} \sqsubset_{\mathfrak{M}_\alpha} \mathbb{P}_\alpha {\restriction} \alpha \ \text{ — для всех } \alpha,$$

где $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}(\overrightarrow{\mathbb{P}} {\restriction} \alpha)$. Также будет рассматриваться субмультифорсинг $\mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}(\mathbb{P}_{<\alpha})$ в $\mathbf{MT}(\mathbb{P}_{<\alpha})$, см. определение 12.3. □

Множество $\mathbb{\Pi} = \mathbf{MT}(\mathbb{P})$ будет использовано для доказательства теоремы 2.1, как форсинг который естественно идентифицируется с произведением $\prod_{\xi<\omega_1} \mathbb{P}(\xi)$ со счетной базой (в L). По построению множества $\mathbb{P}$ и $\mathbb{\Pi}$ принадлежат L. Следующая теорема доказывает, что $\mathbb{\Pi}$-генерические расширения класса L являются моделями для теоремы 2.2, и, следовательно, влечет теорему 2.2 (равно как и теорему 2.1).

Теорема 15.6. *В условиях определения 15.5, пусть* $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{\Pi}$ *является генерическим фильтром над* L*. Тогда в* L[$\mathbb{G}$] *истинно следующее*:

(i) *утверждение* (i) *теоремы 2.2*;

(ii) *утверждение* (ii) *теоремы 2.2*.

Для доказательства теоремы 15.6, мы исследуем свойства форсинга $\mathbb{\Pi}$ и соответствующих генерических расширений в §§ 16–18, затем доказываем утверждение (i) теоремы в § 19, а затем и утверждение (ii) в § 22 при помощи особого аппроксимирующего отношения `forc`.

16 Основные свойства форсинга

Здесь мы докажем несколько дальнейших следствий о форсинге $\mathbb{\Pi}$. **Мы рассуждаем в условиях и терминах определения 15.5**.

Определение 16.1 (в L)**.** Для каждого множества $C \subseteq \omega_1$, определяется подпроизведение $\mathbb{\Pi} {\restriction} C = \mathbf{MT}(\mathbb{P} {\restriction} C) = \{\mathbf{T} \in \mathbb{\Pi} : |\mathbf{T}| \subseteq C\} = \prod_{\xi \in C} \mathbb{P}(\xi)$ со счетной базой, и тогда $\mathbb{\Pi}$ тождественно произведению $\mathbb{\Pi} {\restriction} C \times \mathbb{\Pi} {\restriction} (\omega_1^{\mathrm{L}} \smallsetminus C)$.

Если $C \subseteq \omega_1$ не более чем счетно (в L), то из-за регулярности мультифорсинга $\mathbb{P}$ множество $\mathbb{\Pi} {\restriction} C$ можно отождествить с $\mathbb{\Pi}_C = \{\mathbf{T} \in \mathbb{\Pi} : |\mathbf{T}| = C\}$.

Если $C = \{\xi\}$, $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}}$, то $\mathbb{\Pi} {\restriction} \{\xi\}$ естественно отождествляется с $\mathbb{P}(\xi)$, и тогда $\mathbb{\Pi}$ тождественно произведению $\mathbb{P}(\xi) \times \mathbb{\Pi} {\restriction} C_{\neq\xi}$, где $C_{\neq\xi} = \omega_1^{\mathrm{L}} \smallsetminus \{\xi\}$. □

Лемма 16.2. *Если $\xi \le \alpha < \gamma < \omega_1$ то $\mathbb{P}_\alpha(\xi) \sqsubset \mathbb{P}_\gamma(\xi)$ в смысле 6.4. Следовательно, по лемме 6.5*(iii)*, каждое $\mathbb{P}_\alpha(\xi)$ предплотно в $\mathbb{P}(\xi) = \bigcup_{\alpha \ge \xi} \mathbb{P}_\alpha(\xi)$.*

Доказательство. Рассуждая по индукции, предполагаем, что $\mathbb{P}_\mu(\xi) \sqsubset \mathbb{P}_\nu(\xi)$ уже установлено для всех $\xi \le \mu < \nu < \gamma$. По лемме 6.5(iii), множество $\mathbb{P}_\alpha(\xi)$ предплотно в $\bigcup_{\xi \le \nu < \gamma} \mathbb{P}_\nu(\xi)$. Мультифорсинг $\mathbf{Q} = \mathbb{P}_\gamma \restriction \gamma$ удовлетворяет $\mathbb{P}_{<\gamma} \sqsubset_{\mathfrak{M}_\gamma} \mathbf{Q}$ согласно 15.5($*$). По определению 12.3 это включает требование $\mathbb{P}_{<\gamma}(\xi) \sqsubset_{\mathfrak{M}_\gamma} \mathbf{Q}(\xi)$ — откуда сразу же следует, что $\mathbf{Q}(\xi)$ плотно в $\mathbb{P}_{<\gamma}(\xi) \cup \mathbf{Q}(\xi)$. Однако $\mathbf{Q}(\xi) = \mathbb{P}_\gamma(\xi)$, а $\mathbb{P}_{<\gamma}(\xi) = \bigcup_{\xi \le \nu < \gamma} \mathbb{P}_\nu(\xi)$. Поэтому, во-первых, $\mathbb{P}_\gamma(\xi)$ плотно в $\mathbb{P}_\alpha(\xi) \cup \mathbb{P}_\gamma(\xi)$ — имеем пункт (1) определения 6.4. А во-вторых, раз согласно вышесказанному множество $\mathbb{P}_\alpha(\xi)$ плотно в $\mathbb{P}_{<\gamma}(\xi)$, и очевидно что $\mathbb{P}_\alpha(\xi) \in \mathfrak{M}_\gamma$, мы имеем $S \subseteq^{\mathtt{fin}} \bigvee \mathbb{P}_\alpha(\xi)$ для любого дерева $S \in \mathbf{Q}(\xi) = \mathbb{P}_\gamma(\xi)$ — имеем пункт (2) определения 6.4. □

Лемма 16.3 (в L). *Предположим, что $\mathbf{D}_n \subseteq \mathbb{\Pi}$ — множество открыто-плотное в $\mathbb{\Pi}$ для каждого $n < \omega$, и пусть $\mathbf{T} \in \mathbb{\Pi}$. Найдется мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbb{\Pi}$, удовлетворяющее $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$ и $\mathbf{S} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}_n$ для каждого n.*

Поэтому $\mathbb{\Pi}$-генерические расширения класса L сохраняют кардинал ω_1^{L}.

Доказательство. Существует счетная элементарная подмодель M модели $\langle \mathrm{L}_{\omega_2} ; \in \rangle$, содержащая $\mathbf{T}$ и все множества $\mathbf{D}_n$. Тогда M также содержит ординал ω_1, поскольку он определим, и, по той же причине, содержит последовательность $\overrightarrow{\mathbb{P}}$ вместе с производными множествами $\mathbb{P} = \bigcup^{\mathtt{cw}} \overrightarrow{\mathbb{P}}$ и $\mathbb{\Pi} = \mathbf{MT}(\mathbb{P})$. Заметим, что множество $M \cap \mathrm{L}_{\omega_1}$ транзитивно. В самом деле, если $X \in M \cap \mathrm{L}_{\omega_1}$ то X не более чем счетно, так что существуют функции $f : \omega \xrightarrow{\text{на}} X$. Пусть f_X — наименьшая из таких функций в смысле гёделева полного упорядочения $\leqslant_{\mathrm{L}}$ класса L. Тогда $f_X \in M$, поскольку $X \in M$, а порядок $\leqslant_{\mathrm{L}} \restriction \mathrm{L}_{\omega_2}$ определим в L_{ω_2}. Отсюда следует, что каждый элемент $x \in X$ принадлежит M, так как $x = f_X(k)$ для какого-то k.

Теперь рассмотрим свертку Мостовского $\phi : M \xrightarrow{\text{на}} \mathrm{L}_\lambda$, и пусть $\alpha = \phi(\omega_1)$. Тогда $\alpha < \lambda < \omega_1$ и, по доказанной транзитивности, мы имеем (*) $\phi(x) = x$ для всех $x \in M \cap \mathrm{L}_{\omega_1}$. В частности, $\phi(\xi) = \xi$, $\phi(T) = T$, $\phi(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$ для любого ординала $\xi \in M \cap \omega_1$, дерева $T \in M \cap \mathbf{LT}$, мультидерева $\mathbf{S} \in M \cap \mathbf{MT}$. Отсюда по выбору M следует, что $\phi(\overrightarrow{\mathbb{P}}) = \overrightarrow{\mathbb{P}} \cap \mathrm{L}_\alpha = \overrightarrow{\mathbb{P}} \restriction \alpha$, $\phi(\mathbb{P}) = \mathbb{P}_{<\alpha} = \bigcup^{\mathtt{cw}}_{\gamma < \alpha} \mathbb{P}_\alpha$ (мультифорсинг с $|\mathbb{P}_{<\alpha}| = \alpha$), $\phi(\mathbb{\Pi}) = \mathbb{\Pi} \cap \mathrm{L}_\alpha = \mathbf{MT}(\mathbb{P}_{<\alpha}) \cap \mathrm{L}_\alpha$.

Мы утверждаем, что, более того, $\phi(\mathbb{\Pi}) = \mathfrak{S}_\alpha$, где, напомним, $\mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}(\mathbb{P}_{<\alpha})$. В самом деле, по определению 12.3, $\mathfrak{S}(\mathbb{P}_{<\alpha})$ тождественно замыканию множества $\mathbf{MT}(\mathbb{P}_{<\alpha}) \cap \mathrm{L}_\alpha$ относительно трех операций определения 9.1. Однако $\varphi(\mathbb{\Pi}) = \mathbf{MT}(\mathbb{P}_{<\alpha}) \cap \mathrm{L}_\alpha$, так что $\mathbf{MT}(\mathbb{P}_{<\alpha}) \cap \mathrm{L}_\alpha$ уже замкнуто относительно этих операций по элементарности, поскольку этим свойством, очевидно, обладает $\mathbb{\Pi} = \mathbf{MT}(\mathbb{P})$. Отсюда и следует, что $\mathfrak{S}(\mathbb{P}_{<\alpha}) = \mathbf{MT}(\mathbb{P}_{<\alpha}) \cap \mathrm{L}_\alpha$.

Более того, при помощи того же рассуждения, мы получаем, что если $n < \omega$ то множество $\phi(\mathbf{D}_n) = \mathbf{D}_n \cap \mathrm{L}_\alpha = \mathbf{D}_n \cap \mathfrak{S}_\alpha \in \mathrm{L}_\lambda$ открыто-плотно в

$\mathfrak{S}(\mathbb{P}_{<\alpha})$. Мы также имеем $\phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \in \mathfrak{S}_\alpha$. Вместе с тем по элементарности ординал α несчетен в L_λ, откуда следует, что $\mathrm{L}_\lambda \subseteq \mathfrak{M}_\alpha$.

Однако $\mathbb{P}_{<\alpha} \sqsubset_{\mathfrak{M}_\alpha} \mathbb{P}_\alpha {\restriction} \alpha$ согласно 15.5(∗). А поскольку $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}(\mathbb{P}_{<\alpha})$, отсюда по определению 12.3(C) следует, что найдется такое мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbb{P}_\alpha)$, что $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$ и $\mathbf{S} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \phi(\mathbf{D}_n)$ для всех n. Наконец, $\mathbf{MT}(\mathbb{P}_\alpha) \subseteq \mathbb{\Pi}$ и $\phi(\mathbf{D}_n) \subseteq \mathbf{D}_n$, чем доказательство первого утверждения заканчивается.

Для доказательства второго утверждения, пусть напротив, $\dot{f}$ — имя функции из ω в ω_1^{L} и $\mathbf{T} \in \mathbb{\Pi}$ вынуждает, что $\mathtt{ran}\,\dot{f} = \omega_1^{\mathrm{L}}$. Обозначим $\mathbf{D}_{n\alpha}$ множество всех таких мультидеревьев $\mathbf{R} \in \mathbb{\Pi}$, которые либо несовместны с $\mathbf{T}$ в $\mathbb{\Pi}$, либо удовлетворяют $\mathbf{R} \leqslant \mathbf{T}$ и $\mathbb{\Pi}$-вынуждают $\dot{f}(n) = \alpha$. Простое рассуждение показывает, что каждое множество $\mathbf{D}_n = \bigcup_\alpha \mathbf{D}_{n\alpha}$ плотно в $\mathbb{\Pi}$. По доказанному, найдется мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbb{\Pi}$, удовлетворяющее $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$ и $\mathbf{S} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}_n$, $\forall\, n$. Пусть соотношения $\mathbf{S} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}_n$ обеспечиваются конечными множествами $\mathbf{D}'_n \subseteq \mathbf{D}_n$. Соответственно, множества $A_n = \{\alpha : \mathbf{D}'_n \cap \mathbf{D}_{n\alpha} \neq \varnothing\}$ конечны, а их объединение $A = \bigcup_n A_n$ счетно в L, т.е. $\omega_1^{\mathrm{L}} \not\subseteq A$. А с другой стороны, мы утверждаем, что при любом n, $\mathbf{S}$ вынуждает $\dot{f}(n) \in A_n$. Отсюда и следует искомое противоречие, завершающее доказательство леммы.

Остается доказать, что $\mathbf{S}$ вынуждает $\dot{f}(n) \in A_n$, $\forall\, n$. Предположим противное, т.е. пусть $\mathbf{R} \in \mathbb{\Pi}$, $\mathbf{R} \leqslant \mathbf{S}$, и $\mathbf{R}$ вынуждает $\dot{f}(n) = \alpha$, где $\alpha < \omega_1^{\mathrm{L}}$, $\alpha \notin A_n$. Мы имеем $\mathbf{R} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee \mathbf{D}_n$ посредством того же конечного множества $\mathbf{D}'_n \subseteq \mathbf{D}_n$. Согласно лемме 7.4(iv), найдется кортеж $\sigma \in 2^{<\omega}$ и мультидерево $\mathbf{U} \in \mathbf{D}'_n$, для которых $\mathbf{R}' = \mathbf{R}(\Rightarrow\sigma) \leqslant \mathbf{U}$. При этом $\mathbf{R}' \in \mathbb{\Pi}$ по лемме 9.3(i). Таким образом, мультидеревья $\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}$ совместны в $\mathbb{\Pi}$. Наконец $\mathbf{U} \in \mathbf{D}'_n \subseteq \mathbf{D}_n$, следовательно, $\mathbf{U} \in \mathbf{D}_{n\gamma}$ для некоторого γ, и тогда по определению $\mathbf{U}$ вынуждает $\dot{f}(n) = \gamma$, причем $\gamma \in A_n$, т.е. $\gamma \neq \alpha$. Однако $\mathbf{R}$ вынуждает $\dot{f}(n) = \alpha$, где $\alpha \notin A_n$. Получилось искомое противоречие. □

Лемма 16.4 (в L)**.** *Если множество мультидеревьев $Q \subseteq \mathbf{MT}$ имеет класс $\Sigma^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}(\mathrm{HC})$ и $Q^- = \{\mathbf{T} \in \mathbf{MT} : \neg\exists\, \mathbf{S} \in Q\, (S \leqslant T)\}$ то множество $\mathbb{\Pi} \cap (Q \cup Q^-)$ плотно в $\mathbb{\Pi}$. В частности, если Q плотно в $\mathbf{MT}$ то $Q \cap \mathbb{\Pi}$ плотно в $\mathbb{\Pi}$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{T}_0 \in \mathbb{\Pi} = \mathbf{MT}(\mathbb{P})$, так что $\mathbf{T}_0 \in \mathbf{MT}(\mathbb{P}_{<\alpha_0})$, $\alpha_0 < \omega_1$. Множество Δ всех таких последовательностей $\vec{\mathbf{P}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, что $\vec{\mathbb{P}} {\restriction} \alpha_0 \subseteq \vec{\mathbf{P}}$ и $\exists\, \mathbf{T} \in Q \cap (\mathbf{MT}(\bigcup^{\mathtt{cw}} \vec{\mathbf{P}}))\, (\mathbf{T} \leqslant \mathbf{T}_0)$, принадлежит $\Sigma^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}(\mathrm{HC})$ вместе с Q. Поэтому найдется такой ординал $\alpha < \omega_1$, что последовательность $\vec{\mathbb{P}} {\restriction} \alpha$ блокирует Δ.

Случай 1: $\vec{\mathbb{P}} {\restriction} \alpha \in \Delta$. Тогда $\alpha_0 \leq \alpha$ и соответствующее мультидерево $\mathbf{T}$ принадлежит $Q \cap \mathbb{\Pi}$ и удовлетворяет $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{T}_0$.

Случай 2: ни одна последовательность из Δ не продолжает $\vec{\mathbb{P}} {\restriction} \alpha$. Пусть $\gamma = \mathtt{max}\{\alpha, \alpha_0\}$. Тогда $\mathbb{P}_{<\gamma} \sqsubset_{\mathfrak{M}_\gamma} \mathbb{P}_\gamma {\restriction} \gamma$ by 15.5(∗). Раз $\alpha_0 \leq \gamma$, существует мультидерево $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbb{P}_\gamma)$, $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{T}_0$. Можно не ограничивая общности предполагать, что $|\mathbf{T}| = |\mathbb{P}_\gamma|$, т.е. $= \gamma + 1$. Тогда $\mathbf{T}(\xi) \in \mathbb{P}_\gamma(\xi)$ для всех $\xi \leq \gamma$.

Теперь остается доказать, что $\mathbf{T} \in Q^-$.

Предположим противное: $\mathbf{T} \notin Q^-$, т.е. имеется мультидерево $\mathbf{S} \in Q$, $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$. Имеем $\gamma + 1 = |\mathbf{T}| \subseteq |\mathbf{S}|$, и можно считать, что $|\mathbf{S}| = \lambda < \omega_1$, $\lambda \geq \gamma+1$. Нашей целью будет построить последовательность $\vec{\mathbf{P}} = \langle \mathbf{P}_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, продолжающую $\vec{\mathbb{P}} \restriction \gamma$, т.е. $\mathbf{P}_\alpha = \mathbb{P}_\alpha$ для всех $\alpha < \gamma$, и удовлетворяющую $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\bigcup^{\mathtt{cw}} \vec{\mathbf{P}})$; по выбору $\mathbf{S}$, это означает $\vec{\mathbf{P}} \in \Delta$ и противоречит гипотезе случая 2, завершая вывод $\mathbf{T} \in Q^-$ и доказательство леммы.

Итак, нужно соответствующим образом определить мультифорсинги $\mathbf{P}_\alpha$, $\gamma \leq \alpha < \lambda$. Начнет с первого из них, т.е. $\mathbf{P}_\gamma$. Возьмем имеющийся мультифорсинг $\mathbb{P}_\gamma$ за основу. Имеем $\mathbf{S}(\xi) \subseteq \mathbf{T}(\xi) \in \mathbb{P}_\gamma(\xi)$ для всех $\xi \leq \gamma$. Положим $\mathbf{P}_\gamma(\xi) = \mathbb{P}_\gamma(\xi) \cup \{\sigma \cdot (\mathbf{S}(\xi)(\to t)) : t, \sigma \in 2^{<\omega}\}$ для всех $\xi \leq \gamma$. Каждое «новое» дерево $S = \sigma \cdot (\mathbf{S}(\xi)(\to t))$ удовлетворяет $S \subseteq \sigma \cdot \mathbf{T}(\xi)$, где $\sigma \cdot \mathbf{T}(\xi) \in \mathbb{P}_\gamma(\xi)$. Отсюда следует, что, коль скоро $\mathbb{P}_{<\gamma} \sqsubset^+_{\mathfrak{M}_\gamma} \mathbb{P}_\gamma$ по определению 15.5(*), мы также имеем и $\mathbb{P}_{<\gamma} \sqsubset^+_{\mathfrak{M}_\gamma} \mathbf{P}_\gamma$. Итак, последовательность $\vec{\mathbb{P}} \restriction \gamma = \langle \mathbb{P}_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma} = \langle \mathbf{P}_\alpha \rangle_{\alpha<\gamma} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_\gamma$ продолжена членом $\mathbf{P}_\gamma$ до последовательности из $\overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\gamma+1}$, и при этом $\mathbf{S}(\xi) \in \mathbf{P}_\gamma(\xi)$ для всех $\xi \leq \gamma$. Эта последняя теперь продолжается до последовательности из $\overrightarrow{\mathbf{MF}}_\lambda$ членами $\mathbf{P}_\alpha$, $\gamma < \alpha < \lambda$, по индукции как в доказательстве 15.2(ii), но мы полагаем $\mathbf{P}_\alpha(\alpha) = P_{\mathrm{coh}} \cup \{\sigma \cdot (\mathbf{S}(\alpha)(\to t)) : t, \sigma \in 2^{<\omega}\}$, а не просто $\mathbf{P}_\alpha(\alpha) = P_{\mathrm{coh}}$, для всех α. □

17 Генерическое расширение

В этом разделе, мы рассмотрим некоторые свойства $\mathbb{\Pi}$-генерических расширений $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ класса L посредством присоединения $\mathbb{\Pi}$-генерических множеств $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{\Pi}$ к L. Мы будем использовать построенный в L форсинг $\mathbb{\Pi} = \mathbf{MT}(\mathbb{P})$ и прочие обозначения определения 15.5, с тем только изменением, что, поскольку рассуждения уже не будут, вообще говоря, релятивизованы к L, а первый несчетный ординал в L будет обозначаться ω_1^{L} вместо ω_1.

Определение 17.1 (генерические точки)**.** Пусть множество $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{\Pi}$ является $\mathbb{\Pi}$-генерическим над L. Заметим, что $\omega_1^{\mathrm{L}[\mathbb{G}]} = \omega_1^{\mathrm{L}}$ согласно лемме 16.3.

Если $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}}$, то $\mathbb{G}(\xi) = \{\mathbf{T}(\xi) : \xi \in |\mathbf{T}| \wedge \mathbf{T} \in \mathbb{G}\}$ есть множество, $\mathbb{P}(\xi)$-генерическое над L, а пересечение $X_\xi = \bigcap_{T \in \mathbb{G}(\xi)} [T]$ содержит единственную точку $\boldsymbol{x}_\xi = \boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}] \in 2^\omega$, и эта точка является $\mathbb{P}(\xi)$-генерической над L. Эти точки собираются в генерическую «мультиточку» $\boldsymbol{x}[\mathbb{G}] = \langle \boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}] \rangle_{\xi<\omega_1^{\mathrm{L}}} \in (2^\omega)^{\omega_1^{\mathrm{L}}}$. □

Следствие 17.2 (из 16.1 и теоремы о произведении форсингов)**.** *Если $B \in \mathrm{L}$, $B \subseteq \omega_1^{\mathrm{L}}$ не более чем счетно в L, и множество $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{\Pi}$ является $\mathbb{\Pi}$-генерическим над L, то множество $\mathbb{G}_B = \{\mathbf{T} \in \mathbb{G} : |\mathbf{T}| = B\}$ является $\mathbb{\Pi}_B$-генерическим над L.* □

Предложение 17.3 (в обозначениях определения 17.1)**.** *Если $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}}$ то точка $\boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}]$ не является $(\{\mathbb{G} \restriction C_{\neq\xi}\} \cup \mathbf{Ord})$-определимой в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$.*

Доказательство. См. доказательство леммы 14.5 в [6]. Используется теорема о произведении форсингов и E_0-инвариантность каждой компоненты $\mathbb{P}(\xi)$ в смысле 6.1(B). □

Следующая лемма относится к категории «теорем о непрерывном чтении имен» в теории генерических расширений. Она связана с кодировкой непрерывных функций (определение 12.1) и утверждает, что точки $x \in 2^\omega$ в $\mathbb{\Pi}$-генерических расширениях получаются действием непрерывных функций с кодом из L на соответствующие обрезки генерической мультиточки. Для уменьшения громоздкости, если $\mathbf{c} \in \mathrm{L}$ и $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}$ в L, а множество $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{\Pi}$ является генерическим над L, то положим $f^{\mathbf{c}}[\mathbb{G}] := f^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{x}[G]{\restriction}B)$, где $B = |\mathbf{c}|$.

Лемма 17.4. *Если $C \in \mathrm{L}$, $C \subseteq \omega_1^{\mathrm{L}}$, $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{\Pi}$ является генерическим над L, и $x \in 2^\omega \cap \mathrm{L}[\mathbb{G}{\restriction}C]$, то найдется такой код $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}$, что $|\mathbf{c}| \subseteq C$ и $x = f^{\mathbf{c}}[\mathbb{G}]$.*

Доказательство. Пусть $\dot{\boldsymbol{x}}$ — имя точки x в языке вынуждения, связанном с форсингом $\mathbb{\Pi}$. Это означает, что индексированное семейство множеств

$$A_{ki} = \{\mathbf{T} \in \mathbb{\Pi} : \mathbf{T} \text{ вынуждает, что } \dot{\boldsymbol{x}}(k) = i\}\,, \quad k < \omega,\ i = 0, 1,$$

принадлежит L и кроме того (A) $x(k) = i \Longleftrightarrow \mathbb{G} \cap A_{ki} \neq \varnothing$, (B) $A_{k0} \cap A_{k1} = \varnothing$, и (C) каждое множество $A_k = A_{k0} \cup A_{k1}$ открыто-плотно в $\mathbb{\Pi}$. Мы можем считать, что $\dot{\boldsymbol{x}}$ содержит явное указание на эффективную конструкцию точки x из $\mathbb{G}{\restriction}C$, откуда: (*) если $\mathbf{S} \in A_{ki}$, то и $\mathbf{S}{\restriction}(C \cap |\mathbf{S}|) \in A_{ki}$.

По лемме 16.3, множество $D = \{\mathbf{T} \in \mathbb{\Pi} : \forall\, k\,(\mathbf{T} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee A_k)\}$ также плотно в $\mathbb{\Pi}$. Значит, по генеричности, найдется такое мультидерево $\mathbf{T}' \in \mathbb{G}$, что $\mathbf{T}' \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee A_k$ для всех k. При этом из (*) следует, что мультидерево $\mathbf{T} = \mathbf{T}'{\restriction}(C \cap |\mathbf{T}|) \in \mathbb{G}$ также удовлетворяет $\mathbf{T} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee A_k$, $\forall\, k$, но теперь $|\mathbf{T}| \subseteq C$.

Это означает (определение 7.2), что, в L, найдется последовательность конечных множеств $F_k \subseteq A_k$, реализующих $\mathbf{T} \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigvee A_k$ в том смысле, что: 1) $|\mathbf{U}| \subseteq B = |\mathbf{T}|$ для всех $\mathbf{U} \in F_k$, 2) $[\mathbf{T}] \subseteq \bigcup_{\mathbf{U} \in F_k} [\mathbf{U}{\uparrow}B]$, и 3) $[\mathbf{U}{\uparrow}B] \cap [\mathbf{V}{\uparrow}B] = \varnothing$ для всех $\mathbf{V} \neq \mathbf{U}$ в F_k. Положим $F_{ki} = F_k \cap A_{ki}$, $i = 0, 1$.

Теперь, рассуждая в L, мы определяем непрерывную $f : [\mathbf{T}] \to 2^\omega$ условием: $f(y)(k) = i$, когда существует мультидерево $\mathbf{S} \in F_{ki}$, для которого $y{\restriction}|\mathbf{S}| \in [\mathbf{S}]$. По лемме 12.2, имеем $f = f^{\mathbf{c}}{\restriction}[\mathbf{S}]$, где $\mathbf{c}$ — подходящий код из $\mathrm{CCF}_B \cap \mathrm{L}$. Проверка того, что $x = f^{\mathbf{c}}[\mathbb{G}]$, не представляет затруднений. □

Теорема 17.5. *Если множество $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{\Pi}$ является генерическим над L, и $x, y \in 2^\omega \cap \mathrm{L}[\mathbb{G}{\restriction}C]$, причем $y \notin \mathrm{L}[x]$ то найдется такой ординал $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}}$, что $x \in \mathrm{L}[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]{\restriction}C_{\neq\xi}]$ и $\boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}] \in \mathrm{L}[y]$, и более того, $\boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}] = g(y)$, где $g : 2^\omega \to 2^\omega$ — некоторая непрерывная функция с кодом из L.*

Доказательство. По лемме 17.4, найдутся такие коды $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathrm{CCF} \cap \mathrm{L}$, что $x = f^{\mathbf{c}}[\mathbb{G}]$ и $y = f^{\mathbf{d}}[\mathbb{G}]$. Пусть $B = |\mathbf{c}| \cup |\mathbf{d}|$; можно считать, что $|\mathbf{c}| = |\mathbf{d}| = B$.

Рассуждаем в L. По теореме 8.2 множество $\mathbf{D}$ всех таких мультидеревьев $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}_B$, что либо (i) $f^{\mathbf{d}}$ сводится к $f^{\mathbf{c}}$ на $[\mathbf{S}]$, либо (ii) $f^{\mathbf{d}}$ захватывает некоторый ординал $\xi \in B$ на $[\mathbf{S}]$ и при этом $f^{\mathbf{c}}$ сводится к множеству $B \smallsetminus \{\xi\}$ на $[\mathbf{S}]$, — плотно в $\mathbf{MT}_B$. Согласно лемме 16.4, отсюда следует, что множество $\mathbf{D}' = \mathbf{D} \cap \mathbb{\Pi}_B$ плотно в $\mathbb{\Pi}_B = \{\mathbf{R} \in \mathbb{\Pi} : |\mathbf{R}| = B\}$.

Рассуждаем в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. Согласно следствию 17.2, $\mathbb{G} \cap \mathbf{D} \neq \varnothing$. Пусть $\mathbf{S} \in \mathbb{G} \cap \mathbf{D}$; тогда $\boldsymbol{x}[\mathbb{G}] \restriction B \in [\mathbf{S}]$. Соотношение (i) невозможно для этого $\mathbf{S}$, поскольку из (i) следует, что $f^{\mathbf{d}}(z) = g(f^{\mathbf{c}}(z))$ для всех $z \in [\mathbf{S}]$, где $g : 2^\omega \to 2^\omega$ непрерывна с кодом из L, откуда (при $z = \boldsymbol{x}[\mathbb{G}] \restriction B$) мы получаем $y = g(x)$, и далее $y \in \mathrm{L}[x]$ (ибо g имеет код в L), что противоречит условию теоремы. Значит, выполнено (ii), т.е., *опять в* L, $f^{\mathbf{d}}$ захватывает некоторый ординал $\xi \in B$ на $[\mathbf{S}]$, а $f^{\mathbf{c}}$ сводится к множеству $B \smallsetminus \{\xi\}$ на $[\mathbf{S}]$.

Из-за компактности рассматриваемых пространств, это означает, что существуют непрерывные функции $f : (2^\omega)^{B \smallsetminus \{\xi\}} \to 2^\omega$ и $g : 2^\omega \to 2^\omega$, обе с кодами из L, удовлетворяющие $f^{\mathbf{c}}(z) = f(z \restriction (B \smallsetminus \{\xi\}))$ и $z(\xi) = g(f^{\mathbf{d}}(z))$ для всех $z \in \mathbf{S}$. В частности, для $z = \boldsymbol{x}[\mathbb{G}] \restriction B$, мы имеем $x = f^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}] \restriction (B \smallsetminus \{\xi\}))$ — откуда $x \in \mathrm{L}[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}] \restriction C_{\neq\xi}]$, и $\boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}] = g(y)$ — откуда $\boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}] \in \mathrm{L}[y]$. $\square$

18 Определимость генерических точек

Мы продолжаем рассуждать в терминах определений 15.5 и 17.1, а главной целью этого раздела является выяснение природы $\mathbb{P}(\xi)$-генерических точек $x \in 2^\omega$ в $\mathbb{\Pi}$-генерических расширениях класса L.

Теорема 18.1. *В любом $\mathbb{\Pi}$-генерическом расширении* $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ *класса* L*, истинно следующее: если $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}}$, то множества $X_\xi = [\boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}]]_{\mathsf{E}_0} = \{\sigma \cdot \boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}] : \sigma \in 2^{<\omega}\}$ и $Y_\xi = \bigcap_{\xi \le \alpha < \omega_1^{\mathrm{L}}} \bigcup_{U \in \mathbb{P}_\alpha(\xi)} [U]$ совпадают.*

Доказательство. Точка $x = \boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}] \in 2^\omega$ является $\mathbb{P}(\xi)$-генерической, а каждое множество вида $\mathbb{P}_\alpha(\xi)$ предплотно в $\mathbb{P}(\xi)$ по лемме 16.2. Отсюда $x \in Y_\xi$. Однако все множества $\mathbb{P}_\alpha(\xi)$ по определению являются $\mathbf{LT}$-форсингами, т.е. они E_0-инвариантны в смысле 6.1(B). Поэтому $X_\xi \subseteq Y_\xi$.

Для вывода обратного включения, пусть $y_0 \in Y_\xi$ в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. По лемме 17.4, найдется такой код $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF} \cap \mathrm{L}$, что $y_0 = f^{\mathbf{c}}[\mathbb{G}] = f^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}] \restriction B)$, где $B = |\mathbf{c}|$. Рассмотрим множество $\mathbf{D}$ всех таких мультидеревьев $\mathbf{S} \in \mathbb{\Pi}_B$, что либо (i) есть такой кортеж $\sigma \in 2^{<\omega}$, что $f^{\mathbf{c}}(x) = \sigma \cdot x(\xi)$ для всех $x \in [\mathbf{S}]$, либо (ii) есть такой ординал α, $\xi \le \alpha < \omega_1$, что $f^{\mathbf{c}}(x) \notin \bigcup_{U \in \mathbb{P}_\alpha(\xi)} [U]$ для всех $x \in [\mathbf{S}]$.

Лемма 18.2. *Множество* $\mathbf{D}$ *плотно в* $\mathbb{\Pi}_B$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{T} \in \mathbb{\Pi}_B$, т.е. $|\mathbf{T}| = B$. Существует такой ординал $\alpha < \omega_1^{\mathrm{L}}$, что 1) $B \subseteq \alpha$ — откуда $\xi < \alpha$, 2) $\mathbf{T} \in \mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}(\mathbb{P}_{<\alpha})$, и 3) $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}_\alpha$. Однако мы имеем $\mathbb{P}_{<\alpha} \sqsubset^+_{\mathfrak{M}_\alpha} \mathbb{P}_\alpha$ согласно 15.5(∗). По определению 12.3(D), отсюда следует, что имеется такое мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbb{P}_\alpha)$, что $|\mathbf{S}| = |\mathbf{T}| =$

B, $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$, и либо (i) найдется такой кортеж $\sigma \in 2^{<\omega}$, что $f^{\mathbf{c}}(x) = \sigma \boldsymbol{\cdot} x(\xi)$ для всех $x \in [\mathbf{S}]$, либо (ii) $f^{\mathbf{c}}(x) \notin \bigcup_{U \in \mathbb{P}_\alpha(\xi)} [U]$ для всех $x \in [\mathbf{S}]$. Таким образом, $\mathbf{S} \in \mathbf{D}$ и плотность доказана. $\square$ (лемма)

Согласно следствию 17.2, $\mathbb{G} \cap \mathbf{D} \neq \varnothing$. Пусть $\mathbf{S} \in \mathbb{G} \cap \mathbf{D}$. В частности, $x_0 = \boldsymbol{x}[\mathbb{G}] \restriction B \in [\mathbf{S}]$. Отсюда следует, что $\mathbf{S}$ не может удовлетворять условию (ii) определения $\mathbf{D}$, ибо $y_0 = f^{\mathbf{c}}(x_0) \in Y_\xi$. Значит, $\mathbf{S}$ удовлетворяет условию (i) определения $\mathbf{D}$ с каким-то $\sigma \in 2^{<\omega}$. Но тогда $y_0 = f^{\mathbf{c}}(x_0) = \sigma \boldsymbol{\cdot} x_0(\xi) = \sigma \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{x}[\mathbb{G}](\xi) = \sigma \boldsymbol{\cdot} \boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}]$, т.е. $y_0 \in X$, что и требовалось. $\square$

Можно показать, что, в условиях теоремы, множество $X_\xi = Y_\xi$ тождественно множеству всех $\mathbb{P}(\xi)$-генерических точек $y \in 2^\omega$, см. [21].

19 Неуниформизуемое множество

Этот раздел содержит доказательство утверждения (i) теоремы 15.6. Сначала мы построим неуниформизуемое множество в «прямоугольнике» $\omega_1^{\mathrm{L}} \times 2^\omega$.

Лемма 19.1. *В условиях теоремы 15.6 множество* $K = \{\langle \xi, x\rangle : \xi < \omega_1^{\mathrm{L}} \wedge x \in [\boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}]]_{\mathsf{E}_0}\}$ *принадлежит* $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ *и имеет имеет такие свойства в* $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$:

(i) *K принадлежит классу определимости* $\mathit{\Pi}^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-1}$;

(ii) *если $\xi < \omega_1$, то сечение $K_\xi = \{x : \langle \xi, x\rangle \in K\}$ является E_0-классом;*

(iii) *множество K не может быть ROD-униформизовано.*

Доказательство. (ii) очевидно из определения: $K_\xi = [x_\xi[\mathbb{G}]]_{\mathsf{E}_0}$. Для доказательства (i), заметим, что лемма 16.3 влечет равенство $\omega_1 = \omega_1^{\mathrm{L}}$ в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$, а потому, согласно теореме 18.1, формула $\langle \xi, x\rangle \in K$ равносильна утверждению

$$\xi < \omega_1 \ \wedge \ \forall\, \alpha \left(\xi \le \alpha < \omega_1 \implies \exists\, T \in \mathbb{P}_\alpha(\xi)\, (x \in [T])\right).$$

Однако формула во внешних скобках здесь выражает $\mathit{\Pi}^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-1}$-отношение согласно условию (i) теоремы 15.4. (Квантор $\exists\, T \in \mathbb{P}_\alpha(\xi)$ — ограниченный, а потому он не влияет на оценку определимости.)

Для доказательства (iii), пусть напротив, в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ истинно, что $R \subseteq K$ — униформизующее ROD-множество. Пусть $r \in 2^\omega \cap \mathrm{L}[\mathbb{G}]$ — тот параметр, для которого множество R является $\{r\} \cup \mathbf{Ord}$-определимым в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$.

Согласно лемме 16.3 (сохранение кардинала ω_1^{L}), найдется ординал $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}}$, для которого $r \in \mathrm{L}[\mathbb{G} \restriction \{\eta : \eta < \xi\}]$, тем более $r \in \mathrm{L}[\mathbb{G} \restriction C_{\neq\xi}]$, где, напомним, $C_{\neq\xi} = \omega_1^{\mathrm{L}} \smallsetminus \{\xi\}$. Поэтому та единственная точка $x \in 2^\omega$, для которой $\langle \xi, x\rangle \in R$, $(\{\mathbb{G} \restriction C_{\neq\xi}\} \cup \mathbf{Ord})$-определима в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. Однако $R \subseteq K$, так что $x \mathrel{\mathsf{E}_0} \boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}]$. Значит, и сама точка $\boldsymbol{x}_\xi[\mathbb{G}]$ $(\{\mathbb{G} \restriction C_{\neq\xi}\} \cup \mathbf{Ord})$-определима в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. Но это противоречит предложению 17.3. $\square$

Теперь, чтобы преобразовать множество $K[\mathbb{G}]$ в аналогичное неуниформизуемое множество, расположенное в $2^\omega \times 2^\omega$, проведем следующее, в общем, элементарное преобразование, не связанное с форсингом и моделями.

Начнем с рекурсивного перечисления $\mathbb{Q} = \{q_n : n < \omega\}$ всех рациональных чисел. Сопоставим каждой точке $z \in 2^\omega$ множество $Q_z = \{q_n : z(n) = 1\} \subseteq \mathbb{Q}$, его наибольший вполне упорядоченный (возможно, пустой) начальный сегмент $Q'_z \subseteq Q_z$, и порядковый тип $|z| < \omega_1$ этого множества Q'_z; понятно, что тогда $\{|z| : z \in 2^\omega\} = \omega_1$.

Лемма 19.2. *В условиях теоремы 15.6 множество* $W = \{\langle z, x\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega : \langle |z|, x\rangle \in K\}$ *принадлежит* $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ *и имеет имеет такие свойства в* $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$:

(i) W *принадлежит классу определимости* $\Pi^1_{\mathfrak{n}}$;

(ii) *если* $z \in 2^\omega$, *то сечение* $W_z = \{x : \langle z, x\rangle \in W\}$ *есть* E_0*-класс*;

(iii) *множество* W *не может быть ROD-униформизовано.*

Доказательство. Множество W принадлежит $\Pi^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-1}$ вместе с K, поскольку отображение $z \mapsto |z|$ является Δ^{HC}_1-функцией. Следовательно, по теореме о переводе (теорема 9.1 в [7]), W есть $\Pi^1_{\mathfrak{n}}$-множество.

Далее, каждое сечение W_z совпадает с соответствующим сечением K_ξ множества K, где $\xi = |z|$, а потому является E_0-классом.

Для вывода неуниформизуемости, предположим противное, т.е. что W униформизуется ROD-множеством $S \subseteq W$. Коль скоро предполагается $\omega_1^{\mathrm{L}} = \omega_1$, ко всякому ординалу $\xi < \omega_1$ существует точка $z \in 2^\omega \cap \mathrm{L}$, для которой $|z| = \xi$. Через $z(\xi)$ обозначим $\leqslant_{\mathrm{L}}$-наименьшую из таких точек. Тогда

$$R = \{\langle \xi, x\rangle \in K : \langle z(\xi), x\rangle \in S\}$$

является ROD-подмножеством множества K, которое униформизует K, что противоречит выбору K. Итак, W удовлетворяет (i), (ii), (iii). □

Доказательство (теорема 15.6(i))**.** Очевидно по лемме 19.2. □

20 Вспомогательное отношение вынуждения

Здесь мы вводим ключевой инструмент для вывода утверждения (ii) теоремы 15.6. Это отношение `forc`, относящееся к категории отношений вынуждения. Оно не связано прямо с нашим форсингом $\mathbb{P}$, но в определенном смысле связано со степенью $\mathbf{LT}^{\omega_1}$ (со счетной поддержкой). Однако оно окажется совместимым с $\mathbb{P}$-отношением вынуждения для формул определенной кванторной сложности (лемма 21.2). Важной особенностью отношения `forc` будет его инвариантность относительно пермутаций (лемма 21.3), свойство, которое $\mathbb{P}$-отношение вынуждения точно не имеет. На этом будет основано доказательство теоремы 22.1.

Мы рассуждаем в L.

Рассматривается *язык* $\mathscr{L}$ содержащий переменные $i, j, k, \ldots$ типа 0 с областью ω, и переменные $x, y, z, \ldots$ типа 1 с областью 2^ω. *Термами* являются переменные типа 0 и выражения вида $x(k)$. Атомарными являются формулы вида $R(t_1, \ldots, t_n)$, где $R \subseteq \omega^n$ — любое n-арное отношение на ω в L. *Арифметической* называется формула, не содержащая кванторов по переменным типа 1. Формулы видов

$$\exists\, x_1 \,\forall\, x_2 \,\exists\, x_3 \,\ldots\, \exists\,(\forall)\, x_n\, \Psi \quad \text{и} \quad \forall\, x_1 \,\exists\, x_2 \,\forall\, x_3 \,\ldots\, \forall\,(\exists)\, x_n\, \Psi\,,$$

где Ψ — арифметическая, принадлежат типам $\mathscr{L}\Sigma^1_n$, соответственно, $\mathscr{L}\Pi^1_n$.

Дополнительно, мы разрешим кодам $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}$ замещать свободные переменные типа 1, и мы полагаем $|\varphi| = \bigcup_{\mathbf{c}\in\varphi} |\mathbf{c}|$ для любой $\mathscr{L}$-формулы, где $\mathbf{c} \in \varphi$ означает, что код $\mathbf{c}$ встречается в φ. Семантика состоит в следующем. Пусть $\varphi := \varphi(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k)$ есть $\mathscr{L}$-формула, все коды из CCF, которые φ содержит, явно указаны, и $|\varphi| \subseteq B \subseteq \omega_1$. Если $x \in (2^\omega)^B$ то через $\varphi[x]$ обозначим формулу $\varphi(f^{\mathbf{c}_1}(x{\restriction}|f^{\mathbf{c}_1}|), \ldots, f^{\mathbf{c}_k}(x{\restriction}|f^{\mathbf{c}_k}|))$; все $f^{\mathbf{c}_i}(x{\restriction}|f^{\mathbf{c}_i}|)$ — точки 2^ω.

Арифметические формулы и формулы типов $\mathscr{L}\Sigma^1_n \cup \mathscr{L}\Pi^1_n$, $n \geq 1$, называются *нормальными*. Если φ формула из $\mathscr{L}\Sigma^1_n$ или $\mathscr{L}\Pi^1_n$ то φ^- обозначает результат канонического приведения $\neg\,\varphi$ к виду $\mathscr{L}\Pi^1_n$, соответственно, $\mathscr{L}\Sigma^1_n$. Для арифметических формул, пусть просто $\varphi^- := \neg\,\varphi$.

Определение 20.1 (в L)**.** Определяется отношение $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$ между мультидеревьями $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}$ и замкнутыми нормальными $\mathscr{L}$-формулами:

(I) если φ — замкнутая $\mathscr{L}$-формула, арифметическая или из $\mathscr{L}\Sigma^1_1 \cup \mathscr{L}\Pi^1_1$, и $|\varphi| \subseteq B = |\mathbf{T}|$, то $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$, когда $\varphi[x]$ выполнено для всех $x \in [\mathbf{T}]$;

(II) если $\varphi := \exists\, x\, \psi(x)$ — замкнутая $\mathscr{L}\Sigma^1_{n+1}$-формула, $n \geq 1$ (ψ принадлежит $\mathscr{L}\Pi^1_n$), то $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$, когда есть такой код $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}$ что $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\psi(\mathbf{c})$;

(III) если φ — замкнутая $\mathscr{L}\Pi^1_n$-формула, $n \geq 1$, то $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$, когда нет ни одного мультидерева $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}$, удовлетворяющего $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$ и $\mathbf{S}\,\mathtt{forc}\,\psi^-$.

Положим $\mathbf{Forc}(\varphi) = \{T \in \mathbf{ST} : T\,\mathtt{forc}\,\varphi\}$ и $\mathbf{Des}(\varphi) = \mathbf{Forc}(\varphi) \cup \mathbf{Forc}(\varphi^-)$. □

Лемма 20.2 (in L)**.** *Если $m \geq 2$ и φ — замкнутая формула из $\mathscr{L}\Sigma^1_m$, соотв., $\mathscr{L}\Pi^1_m$, то* $\mathbf{Forc}(\varphi)$ *принадлежит* $\Sigma^{\mathrm{HC}}_{m-1}(\mathrm{HC})$*, соотв.,* $\Pi^{\mathrm{HC}}_{m-1}(\mathrm{HC})$.

Доказательство. Для $\mathscr{L}\Pi^1_1$-формул, определение 20.1(I) дает $\mathbf{Forc}(\varphi) \in \mathbf{\Pi}^1_1$, так что $\mathbf{Forc}(\varphi)$ принадлежит $\Delta^{\mathrm{HC}}_1(\mathrm{HC})$. Далее рассуждаем индукцией по определению 20.1(II),(III). □

21 Вспомогательное отношение вынуждения: две леммы

Здесь доказывается два свойства отношения `forc`, ключевых для его использования в нижеследующем доказательстве теоремы 15.6(ii). Одно из них (лемма 21.2) состоит в том, что `forc` связано с истинностью в $\mathbb{P}$-генерических расширениях аналггично обычному $\mathbb{P}$-вынуждению — для формул определенной сложности. Второе же (лемма 21.3) утверждает инвариантность $\mathtt{forc}$ относительно действия пермутаций множества ω_1.

Напомним, что число $\mathbb{n} \geq 3$ фиксировано определением 15.5.

Лемма 21.1 (в L)**.** *Пусть φ — замкнутая нормальная $\mathscr{L}$-формула. Тогда множество $\mathbf{Des}(\varphi)$ плотно в $\mathbf{MT}$. Если же φ принадлежит типу $\mathscr{L}\Sigma^1_m$, $m < \mathbb{n}$, то $\mathbf{Des}(\varphi) \cap \mathbb{P}$ плотно в $\mathbb{P}$.*

Доказательство. Достаточно доказать плотность $\mathbf{Des}(\varphi)$ для формул φ как в 20.1(I). Если φ такова и $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}$, $|\varphi| \subseteq B = |\mathbf{T}|$, то множество $X(\varphi) = \{x \in [\mathbf{T}] : \varphi[x]\}$ в пространстве $(2^\omega)^B$ имеет класс $\mathbf{\Sigma}^1_1 \cup \mathbf{\Pi}^1_1$, а тогда имеет свойство Бэра внутри замкнутого $[\mathbf{T}] \subseteq (2^\omega)^B$. Остается сослаться на лемму 10.1. Второе утверждение следует из первого по леммам 20.2 и 16.4. $\square$

Лемма 21.2. *Допустим, что $1 \leq n < \mathbb{n}$, $\varphi \in \mathrm{L}$ — замкнутая формула из $\mathscr{L}\Pi^1_n \cup \mathscr{L}\Sigma^1_{n+1}$, и множество $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{P}$ является генерическим над L. Тогда $\varphi[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ истинно в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$, если и только если $\exists\, \mathbf{T} \in \mathbb{G}\,(\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi)$.*

Доказательство. База индукции: φ — арифметическая или из $\mathscr{L}\Sigma^1_1 \cup \mathscr{L}\Pi^1_1$, как в 20.1(I). Если $\mathbf{T} \in \mathbb{G}$ и $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$ то имеем $\varphi[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ по теореме абсолютности Шенфилда, так как $\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction|\mathbf{T}| \in [\mathbf{T}]$. В обратную сторону лемма 21.1.

Шаг $\mathscr{L}\Pi^1_n \Longrightarrow \mathscr{L}\Sigma^1_{n+1}$. Пусть φ есть $\exists\, x\, \psi(x)$, где ψ принадлежит $\mathscr{L}\Pi^1_n$. Пусть $\mathbf{T} \in \mathbb{G}$ и $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$. Тогда по определению 20.1(II) имеется код $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF} \cap \mathrm{L}$, для которого $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\psi(\mathbf{c})$. По индуктивной гипотезе, формула $\psi(\mathbf{c})[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$, т.е. $\psi[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]](f^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B))$, где $B = |\mathbf{c}|$, истинна в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. Тогда и $\varphi[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ истинна.

Обратно, пусть $\varphi[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ истинна в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. Тогда, для какого-то $y \in \mathrm{L}[\mathbb{G}] \cap 2^\omega$ выполнено $\psi[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]](y)$. По лемме 17.4, $y = f^{\mathbf{c}}[\mathbb{G}] = f^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B)$, где $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF} \cap \mathrm{L}$ и $B = |\mathbf{c}|$. Но тогда формула $\psi(\mathbf{c})[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ истинна в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. По индуктивной гипотезе, найдется такое $\mathbf{T} \in \mathbb{G}$, что $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\psi(\mathbf{c})$, следовательно, $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$.

Шаг $\mathscr{L}\Sigma^1_n \Longrightarrow \mathscr{L}\Pi^1_n$. Пусть φ есть $\mathscr{L}\Pi^1_n$-формула, $n \geq 2$. По лемме 21.1, существует такое мультидерево $\mathbf{T} \in \mathbb{G}$, что либо $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$ либо $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi^-$. Если $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi^-$ то $\varphi^-[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ истинно в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ по индуктивной гипотезе, значит $\varphi[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ ложно. Теперь допустим, что $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$. Нужно вывести $\varphi[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. Предположим противное. Тогда $\varphi^-[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ истинно. По индуктивной гипотезе, найдется такое мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbb{G}$, что $\mathbf{S}\,\mathtt{forc}\,\varphi^-$. Но мультидеревья $\mathbf{S}, \mathbf{T}$ принадлежат генерическому множеству $\mathbb{G}$, следовательно, они совместны, что противоречит предположению $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$. $\square$

Отношение $\mathtt{forc}$ оказывается **инвариантным** относительно действия группы H всех самообратных (т.е. $h = h^{-1}$) *пермутаций* множества ω_1^{L} в L. Иначе говоря, $h \in H$, когда $h \in \mathrm{L}$, $h : \omega_1^{\mathrm{L}} \xrightarrow{\text{на}} \omega_1^{\mathrm{L}}$ — биекция, и $h = h^{-1}$.

Мы рассуждаем в L. Пусть $h \in H$. Если $B \subseteq \omega_1$ и F — любая функция, определенная на B, то функция $hF = h \cdot F$ определяется на множестве $h"B =$

$\{h(\xi) : \xi \in B\}$ так, что $(hF)(h(\xi)) = F(\xi)$ для всех $\xi \in B$. Другими словами, hF — это суперпозиция $F \circ h^{-1}$, даже $hF = F \circ h$ в силу самообратности.

В частности, если $x \in (2^\omega)^B$ то $hx \in (2^\omega)^{h"B}$, а если $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}_B$, то $h\mathbf{T} = h\cdot\mathbf{T}$ является мультидеревом в $\mathbf{MT}_{h"B}$. Сверх того, если $\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}_B$, то можно некоторым каноническим очевидным образом определить такой код $h\mathbf{c} = h\cdot\mathbf{c} \in \mathrm{CCF}_{h"B}$, что $f^{h\mathbf{c}}(hx) = f^{\mathbf{c}}(x)$ для всех $\xi \in B$. Наконец если $\varphi := \varphi(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k)$ есть $\mathscr{L}$-формула то через $h\varphi$ или $h\cdot\varphi$ обозначается формула $\varphi(h\mathbf{c}_1, \ldots, h\mathbf{c}_k)$. Тогда $(h\varphi)[hx]$ тождественно $\varphi[x]$.

Лемма 21.3 (в L)**.** *Пусть* $h \in H$*,* $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}$*, а* φ *— замкнутая нормальная* $\mathscr{L}$*-формула. Тогда* $\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,\varphi$ *равносильно* $h\mathbf{T}\,\mathtt{forc}\,h\varphi$*.*

Доказательство. Если φ — формула типа 20.1(I), то используем то, что $[h\mathbf{T}] = \{hx : x \in [\mathbf{T}]\}$, а с другой стороны, если $x \in [\mathbf{T}]$ то $\varphi[x]$ тождественно $(h\varphi)[hx]$. Дальнейшие шаги рутинной индукции на основе определения 20.1(II),(III) опускаются. $\square$

22 Униформизуемость множеств со счетными сечениями

Для доказательства утверждения (i) теоремы 15.6 в конце этого раздела, мы доказываем теорему 22.1 о том, что в $\mathbb{P}$-генерических расширениях любой элемент счетного $\mathbf{\Sigma}^1_{\mathbb{n}}$-множества X конструктивен относительно параметра $\mathbf{\Sigma}^1_{\mathbb{n}}$-определения для X. Ключевым моментом доказательства является использование отношения `forc` через посредство леммы 21.2.

Теорема 22.1. *Если множество* $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{P}$ *является* $\mathbb{P}$*-генерическим над* L *и* $p \in \mathrm{L}[\mathbb{G}] \cap 2^\omega$*, то в* $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ *истинно, что любое счетное* $\Sigma^1_{\mathbb{n}}(p)$*-множество* $Y \subseteq 2^\omega$ *удовлетворяет* $Y \subseteq \mathrm{L}[p]$*.*

На самом деле, выполнено и более сильное свойство $Y \in \mathrm{L}[p]$, но для экономии места мы не будем усложнять доказательство, что потребовало бы рассмотреть более сложные преобразования, помимо пермутаций из H.

Доказательство. Мы работаем в обозначениях определения 15.5. Пусть напротив, $Y \not\subseteq \mathrm{L}[p]$. Мы имеем $Y = \{y \in 2^\omega : \varphi(p, y)\}$, где $\varphi(p, y) := \exists\, z\, \psi(p, y, z)$ есть $\Sigma^1_{\mathbb{n}}$-формула с единственным параметром p, и пусть также $y_0 \in Y$, но $y_0 \notin \mathrm{L}[p]$. По теореме 17.5, имеется такой ординал $\eta < \omega_1^{\mathrm{L}}$, что $p \in \mathrm{L}[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}] {\restriction} C_{\neq\eta}]$ и $\boldsymbol{x}_\eta[\mathbb{G}] \in \mathrm{L}[y_0]$, и более того, $\boldsymbol{x}_\eta[\mathbb{G}] = g(y_0)$, где $g : 2^\omega \to 2^\omega$ — непрерывная функция с кодом в L. Согласно лемме 17.4, существуют коды $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathrm{CCF}$, для которых $p = f^{\mathbf{d}}[\mathbb{G}] = f^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}] {\restriction} B)$ и $y_0 = f^{\mathbf{c}}[\mathbb{G}] = f^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}] {\restriction} B')$, где $B = |\mathbf{d}| \subseteq C_{\neq\eta}$ и $B' = |\mathbf{c}|$. При этом можно считать, что $B \subseteq B'$ и $\eta \in B'$; заметим, что заведомо $\eta \notin B$. Целью является **вывод противоречия**.

Рассмотрим $\mathscr{L}\Sigma^1_{\mathbb{n}}$-формулу $\varphi(\mathbf{d}, \mathbf{c})$. По выбору кодов, формула $\varphi(\mathbf{d}, \mathbf{c})[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ совпадает с $\varphi(f^{\mathbf{d}}[\mathbb{G}], f^{\mathbf{c}}[\mathbb{G}])$, следовательно, $\varphi(\mathbf{d}, \mathbf{c})[\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]]$ истинна в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$. По лемме 21.2, имеем $\mathbf{S}\,\mathtt{forc}\,\varphi(\mathbf{d}, \mathbf{c})$ для какого-то мультидерева $\mathbf{S} \in \mathbb{G}$.

Что касается равенства $\boldsymbol{x}_\eta[\mathbb{G}] = g(y_0)$ (см. выше), то мы его перепишем так: $f^{\mathbf{e}}(\boldsymbol{x}[\underline{G}]\restriction B') = g(f^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B'))$, где $\mathbf{e} \in \mathrm{CCF}_{B'} \cap \mathrm{L}$ — канонический код функции $f^{\mathbf{e}}(x) = x(\eta)$. Перепишем эту формулу для удобства в виде

$$\exists\, z\,\big(z = f^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B') \wedge f^{\mathbf{e}}(\boldsymbol{x}[\underline{G}]\restriction B') = g(z)\big).$$

Как и выше, по лемме 21.2, $\mathbf{S}'\,\mathtt{forc}\,\exists\, z\,(z = \mathbf{c} \wedge \mathbf{e} = g(z))$ выполнено для какого-то мультидерева $\mathbf{S}' \in \mathbb{G}$, и можно считать, что $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$ (иначе заменим оба мультидерева их общим усилением в $\mathbb{G}$). Таким образом, мы имеем

(∗) $\mathbf{S}\,\mathtt{forc}\,\varphi(\mathbf{d},\mathbf{c})$ и $\mathbf{S}\,\mathtt{forc}\,\exists\, z\,(z = \mathbf{c} \wedge \mathbf{e} = g(z))$.

Можно не ограничивая общности считать, что $|\mathbf{S}| = B'$, ибо если это не так, то просто заменим B' на $B' \cup |\mathbf{S}|$ и $\mathbf{S}$ на $\mathbf{S}{\uparrow}(B' \cup |\mathbf{S}|)$.

Если $\vartheta < \omega_1^{\mathrm{L}}$, то через H_ϑ обозначим множество всех таких пермутаций $h \in H$, что $h(\xi) = \xi$ для всех $\xi \in B$ и $h(\xi) > \vartheta$ для всех $\xi \in B' \smallsetminus B$.

Лемма 22.2. *Если $\vartheta < \omega_1^{\mathrm{L}}$ то найдутся такая пермутация $h \in H_\vartheta$ и мультидерево $\mathbf{S}' \in \mathbb{G}$, что $\mathbf{S}' \leqslant h{\cdot}\mathbf{S}$.* (Не предполагается, что $h{\cdot}\mathbf{S} \in \mathbb{P}$.)

Доказательство (лемма)**.** Расуждая в L, рассмотрим множество $\mathbf{D}_\vartheta$ всех таких мультидеревьев $\mathbf{S}' \in \mathbf{MT}$, что $\mathbf{S}' \leqslant \mathbf{S}$ и найдется такая пермутация $h \in H_\vartheta$, что мультидерево $h{\cdot}\mathbf{S}$ удовлетворяет $\mathbf{S}' \leqslant h{\cdot}\mathbf{S}$. Простой анализ показывает, что $\mathbf{D}$ есть множество класса $\Sigma_1^{\mathrm{HC}}(\mathbf{S},\vartheta)$. Значит, по лемме 16.4 и вследствие генеричности $\mathbb{G}$, найдется такое мультидерево $\mathbf{S}' \in \mathbb{G}$, что либо (1) $\mathbf{S}' \in \mathbf{D}_\vartheta$, либо же (2) нет ни одного мультидерева $\mathbf{R} \in \mathbf{D}_\vartheta$, удовлетворяющего $\mathbf{R} \leqslant \mathbf{S}'$. При этом, коль скоро $\mathbf{S}$ также принадлежит $\mathbb{G}$, можно не ограничивая общности предполагать, что $\mathbf{S}' \leqslant \mathbf{S}$.

Убедимся, что на самом деле (2) не может иметь места. В самом деле, пусть $\gamma < \omega_1^{\mathrm{L}}$ — ординал, удовлетворяющий $|\mathbf{S}'| \subseteq \gamma$ и $\gamma \geq \vartheta$. Определим пермутацию h соотношениями $h(\xi) = \xi$ для $\xi \in B$, $h(\xi) = h^{-1}(\xi) = \gamma + \xi$ для $\xi < \gamma$, $\xi \notin B$, и наконец опять $h(\xi) = \xi$ для всех прочих $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}}$. Мультидеревья $\mathbf{S}'$ и $\mathbf{U} = h{\cdot}\mathbf{S}'$ совпадают на общей области $|\mathbf{S}'| \cap |\mathbf{U}| = B$, а потому совместимы, фактически их объединение $\mathbf{R} = \mathbf{S}' \cup \mathbf{U}$ принадлежит $\mathbf{MT}$ и $\mathbf{R} \leqslant \mathbf{S}', \mathbf{U}$. При этом по построению $\mathbf{R} \leqslant \mathbf{U} = h{\cdot}\mathbf{S}' \leqslant h{\cdot}\mathbf{S}$, так что $\mathbf{R} \in \mathbf{D}$, что и требовалось. Итак, (2) не имеет места, следовательно, выполнено (1), т.е. $\mathbf{S}' \in \mathbf{D}_\vartheta$, что и требовалось. □ (лемма)

Возвращаясь к доказательству теоремы 22.1, напомним, что ω_1^{L} остается кардиналом в $\mathbb{P}$-генерических расширениях по лемме 16.3. Это позволяет использовать лемму 22.2 для индуктивного построения возрастающей последовательности $\langle\vartheta_\nu\rangle_{\nu<\omega_1^{\mathrm{L}}}$ ординалов $\vartheta_\nu < \omega_1^{\mathrm{L}}$, а также последовательностей мультидеревьев $\mathbf{S}_\nu \in \mathbb{G}$ и пермутаций $h_\nu \in H_{\vartheta_\nu}$, удовлетворяющих $B' \subseteq \vartheta_0$ и $\mathbf{S}_\nu \leqslant h_\nu{\cdot}\mathbf{S}$ для всех ν, и $|\mathbf{S}_\mu| \subseteq \vartheta_\nu$ при $\mu < \nu$.

Для каждого ν положим $\mathbf{T}_\nu = h_\nu{\cdot}\mathbf{S}$, $\mathbf{c}_\nu = h_\nu{\cdot}\mathbf{c}$, $\mathbf{d}_\nu = h_\nu{\cdot}\mathbf{d}$, $\mathbf{e}_\nu = h_\nu{\cdot}\mathbf{e}$. Имеем $\mathbf{T}_\nu\,\mathtt{forc}\,\varphi(\mathbf{d}_\nu, \mathbf{c}_\nu)$ и $\mathbf{T}_\nu\,\mathtt{forc}\,\exists\, z\,(z = \mathbf{c}_\nu \wedge \mathbf{e}_\nu = g(z))$ согласно $(*)$ и лемме 21.3, откуда

(†) $\mathbf{S}_\nu\,\mathtt{forc}\,\varphi(\mathbf{d}, \mathbf{c}_\nu)$ и $\mathbf{S}_\nu\,\mathtt{forc}\,\exists\, z\,(z = \mathbf{c}_\nu \wedge \mathbf{e}_\nu = g(z))$,

поскольку $\mathbf{S}_\nu \leqslant \mathbf{T}_\nu$ и, в отношении именно кода $\mathbf{d}$, $\mathbf{d}_\nu = h_\nu{\cdot}\mathbf{d} = \mathbf{d}$ (так как $h_\nu(\xi) = \xi$ при $\xi \in B = |\mathbf{d}|$). Напомним, что $f^{\mathbf{d}}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B) = p$, и пусть $B'_\nu = h``B'$, $z_\nu = f^{\mathbf{c}_\nu}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B'_\nu)$, и $q_\nu = f^{\mathbf{e}_\nu}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B'_\nu)$. По лемме 21.2, если $\nu < \omega_1^{\mathrm{L}}$ то согласно (†) в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ истинно $\varphi(p, z_\nu)$ — так что $z_\nu \in Y$, и также истинно $q_\nu = g(z_\nu)$. Далее,

$$\begin{aligned} q_\nu \;&=\; f^{\mathbf{e}_\nu}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B'_\nu) = (h_\nu{\cdot}f^{\mathbf{e}})(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B'_\nu) = f^{\mathbf{e}}(h_\nu^{-1}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]\restriction B'_\nu)) \;=\\ &=\; f^{\mathbf{e}}((h_\nu^{-1}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}])\restriction B') = (h_\nu^{-1}(\boldsymbol{x}[\mathbb{G}]))(\eta) = (\boldsymbol{x}[\mathbb{G}])(\eta_\nu) \;=\; \boldsymbol{x}_{\eta_\nu}[\mathbb{G}]\,, \end{aligned}$$

где $\eta_\nu = h_\nu(\eta)$. Таким образом, мы получили несчетную последовательность точек $z_\nu \in Y$ в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$ ($\nu < \omega_1^{\mathrm{L}}$), удовлетворяющих $g(z_\nu) = \boldsymbol{x}_{\eta_\nu}[\mathbb{G}]$, $\forall\,\nu$. При этом ординалы $\eta_\nu = h_\nu(\eta)$ удовлетворяют $\eta_\nu \geq \vartheta_\nu$ по выбору h_ν, поскольку $\eta \in B' \smallsetminus B$. Следовательно, в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$, среди них несчетно много попарно различных. Тем самым, и среди генерических точек $\boldsymbol{x}_{\eta_\nu}[\mathbb{G}]$ имеется несчетно много попарно различных. А с другой стороны, все z_ν принадлежат счетному множеству Y, и $\boldsymbol{x}_{\eta_\nu}[\mathbb{G}] = g(z_\nu)$, где g не зависит от ν. Получилось искомое **противоречие**, доказывающее теорему. □

Доказательство (теорема 15.6(ii)). Рассуждая в условиях теоремы 15.6, допустим, что, в $\mathrm{L}[\mathbb{G}]$, $p \in 2^\omega$ и $W \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ есть $\varSigma^1_{\mathfrak{n}}(p)$-множество, все вертикальные сечения $W_x = \{y : \langle x, y\rangle \in W\}$ которого не более чем счетны. Понятно, что каждое W_x принадлежит классу $\varSigma^1_{\mathfrak{n}}(p, x)$, следовательно, $W_x \subseteq \mathrm{L}[p, x]$ по теореме 22.1. Если $W_x \neq \varnothing$, то пусть q_x обозначает $<_{px}$-наименьший элемент множества W_x, где $<_{px}$ — каноническое полное упорядочение класса $\mathrm{L}[p, x]$ по Гёделю. Образованное точками q_x множество $Q = \{\langle x, q_x\rangle : x \in 2^\omega \wedge W_x \neq \varnothing\}$ является униформизующим для W. При этом

$$\langle x, y\rangle \in Q \iff \langle x, y\rangle \in W \wedge \forall\, z\,(z <_{px} y \Longrightarrow \langle x, y\rangle \notin W)$$

так что вследствие известного свойства $\varSigma^1_2(p, x)$-определимости гёделевых порядков $<_{px}$ равномерно по p, x, униформизующее множество Q имеет класс $\varDelta^1_{\mathfrak{n}+1}(p)$, точнее, представляет собой пересечение $\varSigma^1_{\mathfrak{n}}(p)$-множества и $\varPi^1_{\mathfrak{n}}(p)$-множества. □

□ (теоремы 2.2 и 2.1)

Список литературы

[1] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств. *УМН*, 58(вып. 5(353)):3–88, 2003. English transl. in *Russian Math. Surveys* 58 (2003), no. 5, 839–927.

[2] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики.* «Наука», Москва, 2007.

[3] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества.* «МЦНМО», Москва, 2010.

[4] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы.* «МЦНМО», Москва, 2013.

[5] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. Определимое счетное множество, не содержащее определимых элементов. *Математические заметки*, 102(вып. 3):369–382, 2017. English transl. in *Mathematical notes*, 2017, vol. 102, 3, pp. 338–349.

[6] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. Неуниформизуемые множества второго проективного уровня со счетными сечениями в виде классов Витали. *Известия РАН, серия математическая*, 82(вып. 1):3–34, 2018. English transl. in *Russian Mathematics, Izvestiya*, 2018, vol. 82 (1).

[7] В. Г. Кановей. Добавление. Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории. In [8], pages 273–364. «Наука», Москва, 1982.

[8] К. Дж. Баруайз, editor. *Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств.* «Наука», Москва, 1982. Пер. с англ. В. Г. Кановея, под ред. и с предисловием В. Н. Гришина, с добавлением В. Г. Кановея, оригинал Handbook of mathematical logic, ed. by J. Barwise, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 90, North-Holland, Amst., 1977.

[9] В. А. Успенский. Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания. *УМН*, 40(вып. 3(243)):85–116, 240, 1985. English transl. in *Russian Math. Surveys* 40 (1985), no. 3, 97–134.

[10] Н.Н. Лузин. *Собр. соч., том II.* Изд-во АН СССР, Москва, 1958.

[11] J.W. Addison. Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. *Fundam. Math.*, 46:123–135, 1959.

[12] J.W. Addison. Some consequences of the axiom of constructibility. *Fundam. Math.*, 46:337–357, 1959.

[13] Andrés Eduardo Caicedo and Ralf Schindler. Projective well-orderings of the reals. *Arch. Math. Logic*, 45(7):783–793, 2006.

[14] Vera Fischer, Sy David Friedman, and Yurii Khomskii. Measure, category and projective wellorders. *J. Log. Anal.*, 6:1–25, 2014.

[15] Vera Fischer, Sy David Friedman, and Lyubomyr Zdomskyy. Cardinal characteristics, projective wellorders and large continuum. *Ann. Pure Appl. Logic*, 164(7-8):763–770, 2013.

[16] M. Golshani, V. Kanovei, and V. Lyubetsky. A Groszek – Laver pair of undistinguishable E_0 classes. *Mathematical Logic Quarterly*, 63(1-2):19–31, 2017.

[17] J. Hadamard, R. Baire, H. Lebesgue, and E. Borel. Cinq lettres sur la théorie des ensembles. *Bull. Soc. Math. Fr.*, 33:261–273, 1905.

[18] Kai Hauser and Ralf-Dieter Schindler. Projective uniformization revisited. *Ann. Pure Appl. Logic*, 103(1-3):109–153, 2000.

[19] Thomas Jech. *Set theory.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, The third millennium revised and expanded edition, 2003.

[20] Ronald Jensen. Definable sets of minimal degree. In Yehoshua Bar-Hillel, editor, *Math. Logic Found. Set Theory, Proc. Int. Colloqu., Jerusalem 1968*, pages 122–128. North-Holland, Amsterdam-London, 1970.

[21] V. Kanovei and V. Lyubetsky. A definable E_0-class containing no definable elements. *Archive for Mathematical Logic*, 54(5):711–723, 2015.

[22] V. Kanovei and V. Lyubetsky. Counterexamples to countable-section Π^1_2 uniformization and Π^1_3 separation. *Annals of Pure and Applied Logic*, 167(4):262–283, 2016.

[23] V. Kanovei and V. Lyubetsky. Countable OD sets of reals belong to the ground model. *Arch. Math. Logic,* to appear., 2018. First Online 24 June 2017, https://doi.org/10.1007/s00153-017-0569-0.

[24] Vladimir Kanovei. Non-Glimm-Effros equivalence relations at second projective level. *Fundam. Math.*, 154(1):1–35, 1997.

[25] Vladimir Kanovei. On non-wellfounded iterations of the perfect set forcing. *J. Symb. Log.*, 64(2):551–574, 1999.

[26] Vladimir Kanovei. *Borel equivalence relations. Structure and classification.* Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2008.

[27] M. Kondô. L'uniformisation des complémentaires analytiques. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 13:287–291, 1937.

[28] Azriel Levy. Definability in axiomatic set theory II. In Yehoshua Bar-Hillel, editor, *Math. Logic Found. Set Theory, Proc. Int. Colloqu., Jerusalem 1968*, pages 129–145. North-Holland, Amsterdam-London, 1970.

[29] N. Lusin. Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 190:349–351, 1930.

[30] N. Lusin. Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles. *Mathematica, Cluj*, 4:54–66, 1930.

[31] N. Lusin and P. Novikoff. Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible. *Fundamenta Math.*, 25:559–560, 1935. Русский перевод в кн. [10] с. 621–623.

[32] Yiannis N. Moschovakis. *Descriptive set theory.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 100. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland Publishing Company. XII, 637 p. Dfl. 150.00; \$ 73.25 , 1980.

[33] J.P. Ressayre. Π^1_2-logic and uniformization in the analytical hierarchy. *Arch. Math. Logic*, 28(2):99–117, 1989.

[34] R.M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is lebesgue measurable. *Ann. Math. (2)*, 92:1–56, 1970.

[35] W.Hugh Woodin. On the consistency strength of projective uniformization. Logic colloquium '81, Proc. Herbrand Symp., Marseille 1981, Stud. Logic Found. Math. 107, 365-384 (1982)., 1982.

Non-uniformizable sets with countable cross-sections on a given level of the projective hierarchy

by

Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky