Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «Ивановский государственный университет»

АЛГЕБРА
И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Всероссийская конференция, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета

Иваново, 21 — 24 марта 2018 года

Сборник материалов

Иваново
Издательство «Ивановский государственный университет»
2018

УДК 51
ББК 22.1
А 45

Алгебра и теория алгоритмов [Электронный ресурс] : Всероссийская конференция, посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета : сборник материалов. — Электрон. дан. — Иваново : Иван. гос. ун-т, 2018. — 1 электрон. опт. диск (DVD-ROM) ; 12 см. — Систем. требования: программа чтения файлов в формате PDF 1.4. — ISBN 978-5-7807-1250-3.

В сборнике представлены тезисы докладов участников Всероссийской конференции, посвященной 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета, прошедшей в ИвГУ 21 — 24 марта 2018 года.

Предназначено ученым, преподавателям, аспирантам и студентам старших курсов, интересующимся данной проблематикой.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Ивановского государственного университета

Материалы печатаются в авторской редакции

Конференция проведена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований. Проект № 18-01-20009.

ISBN 978-5-7807-1250-3

Всероссийская конференция «Алгебра и теория алгоритмов», посвященная 100-летию факультета математики и компьютерных наук Ивановского государственного университета

г. Иваново, 21–24 марта 2018 г.

О НЕКОТОРЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КУБИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯХ

А. В. Селиверстов (Москва)[1]

1. Введение

Рассмотрим n-мерное вещественное проективное пространство с фиксированной системой однородных координат $(x_0 : \cdots : x_n)$. Гиперплоскость $x_0 = 0$ будем называть бесконечно удалённой. Точки с координатами ± 1 отождествим с вершинами фиксированного n-мерного куба, называемого ± 1-кубом. Этот куб вложен в аффинное пространство $x_0 = 1$. Множество вершин ± 1-куба служит множеством всех вершин его грани, если некоторые из координат фиксированы, а остальные принимают любое из двух значений ± 1. В частности, гранями служат вершины и рёбра куба. Грани коразмерности один называются фасетами. Обозначим через $h = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n-1}x_{n-1} + x_n$ линейную функцию, все коэффициенты которой отличны от нуля. Аффинная гиперплоскость $h = 0$ инцидентна некоторой вершине ± 1-куба тогда и только тогда, когда существует особая точка у $(n-1)$-мерной проективной гиперповерхности, которая определена кубической формой $g = \alpha_0 x_0^3 + \cdots + \alpha_{n-1}x_{n-1}^3 - (\alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_{n-1}x_{n-1})^3$. Если же таких вершин нет и все коэффициенты $\alpha_i \neq 0$, то эта гиперповерхность гладкая [11]. Число компонент связности вещественной проективной гиперповерхности $g = 0$ зависит от взаимного расположения гиперплоскости $h = 0$ и вершин ± 1-куба. Поскольку общая комплексная проективная кубическая поверхность определяется суммой кубов пяти линейных форм (Sylvester's pentahedral theorem), полученные результаты могут быть использованы для моделирования поверхностей [6, 7, 9]. Но типичный ранг кубической формы быстро растёт при увеличении числа переменных [12]. С другой стороны, получены новые результаты о комбинаторной задаче, близкой к задаче о рюкзаке [2].

Вещественная проективная кубическая гиперповерхность состоит либо из одной, либо из двух компонент связности. У гладкой гиперповерхности одна компонента связности неориентируемая. Если компонент связности две, то одна из них ориентируемая, а другая неориентируемая и гомеоморфная гиперплоскости. Существует вероятностный алгоритм проверки связности гладкого и ограниченного вещественного алгебраического множества, время работы которого экспоненциально зависит от размерности [10].

Известно несколько методов определения числа компонент гладкой кубической кривой на вещественной проективной плоскости. Линейной заменой координат кубическую форму от трёх переменных, определяющую эту кривую, можно привести к виду $f(y_0, y_1) - y_0 y_2^2$. Если дискриминант Δ многочлена третьей степени $f(1, y_1)$ положительный, то кривая связная. Если отрицательный, то существует ориентируемая компонента [4]. Другой метод основан на приведении кубической формы к виду $y_0^3 + y_1^3 + y_2^3 - 3\lambda y_0 y_1 y_2$. Если $\lambda > 1$, то кривая содержит ориентируемую компоненту; если $\lambda < 1$, то кривая связная [5]. Третий метод основан на представлении кубической формы от трёх переменных в виде определителя эрмитовой матрицы третьего порядка, элементами которой служат линейные формы [8]. Проективные инварианты для объединения овала и прямой, в частном случае совпадающие с приводимой кубической кривой, рассмотрены в работе [1].

Для символьных вычислений использован облачный сервис MathPartner [3]. Визуализация кривых и поверхностей выполнялась программой Surfer; уравнения кривых определяют цилиндрические поверхности (`https://imaginary.org/de/program/surfer`).

 Получено 20.12.2017. УДК 514.144.

[1]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН. E-mail: slvstv@iitp.ru.

2. Результаты

Теорема 1. *Если аффинная гиперплоскость $h = 0$, которая не инцидентна никакой вершине и не параллельна никакому ребру ± 1-куба, отделяет одну вершину от остальных вершин ± 1-куба, то вещественная проективная гиперповерхность $g = 0$ состоит из двух компонент связности. Если гиперплоскость $h = 0$ не пересекает ± 1-куб, то вещественная проективная гиперповерхность $g = 0$ гомеоморфна гиперплоскости.*

Доказательство. Если две аффинные гиперплоскости одинаково расположены относительно вершин ± 1-куба, то соответствующие вещественные проективные гиперповерхности имеют равное число компонент связности.

Рассмотрим ε-окрестность точки $\mathbf{1}$, все координаты которой равны 1, и многочлен $\delta - n + x_1^3 + \dots + x_{n-1}^3 - (\delta - n + x_1 + \dots + x_{n-1})^3$, где вещественный параметр δ удовлетворяет неравенству $|\delta| < \varepsilon$. В ε-окрестности точки $\mathbf{1}$ этот многочлен равен

$$\delta + 3\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - 1)^2 + 3\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - 1)\right)^2 + O(\varepsilon^3).$$

При $\delta = 0$ точка $\mathbf{1}$ служит единственной особой точкой гиперповерхности $g = 0$. В этом случае точка $\mathbf{1}$ служит изолированной вещественной точкой гиперповерхности. При $\delta < 0$ около точки $\mathbf{1}$ появляется гладкая ориентируемая компонента связности. При $\delta > 0$ этой компоненты нет. Таким образом, если аффинная гиперплоскость отделяет одну вершину ± 1-куба от остальных, то соответствующая вещественная проективная гиперповерхность состоит из двух компонент связности. Если же гиперплоскость не пересекает ± 1-куб, то соответствующая вещественная проективная гиперповерхность связная.

Рассмотрим гиперповерхность, состоящую из двух компонент связности (при $\delta < 0$). Фиксируем точку U внутри области, ограниченной ориентируемой компонентой, и некоторую гиперплоскость $\mathcal{Y}$, не содержащую точку U. Прямая, проходящая через U, пересекает неориентируемую компоненту в одной точке V. Отображение, которое сопоставляет такой точке V точку пересечения прямой UV с $\mathcal{Y}$, служит гомеоморфизмом. При увеличении параметра δ неориентируемая компонента меняется непрерывно. Следовательно, она остаётся гомеоморфной гиперплоскости при $\delta > 0$. $\square$

Замечание 1. Проективное преобразование объемлющего пространства, переставляющее вершины куба, не меняет число компонент связности гиперповерхности. Если гиперплоскость $h = 0$ отделяет все вершины некоторой грани, кроме одной из них, то вещественная проективная гиперповерхность $g = 0$ содержит ориентируемую компоненту.

Пример 1. Если аффинная гиперплоскость $h = 0$ разделяет две противоположные фасеты ± 1-куба, то вещественная проективная гиперповерхность $g = 0$ связная. Соответствующее проективное преобразование поворачивает бесконечно удалённую гиперплоскость так, чтобы в исходном аффинном пространстве она прошла посередине между этими фасетами. Если же $h = 0$ не пересекает одну из фасет и отделяет от противоположной фасеты ровно одну вершину, то вещественная проективная гиперповерхность $g = 0$ содержит ориентируемую компоненту.

Теорема 2. *Если аффинная плоскость $h = 0$ не инцидентна никакой вершине и не параллельна никакому ребру трёхмерного ± 1-куба, то она отделяет нечётное число вершин тогда и только тогда, когда вещественная проективная кубическая кривая $g = 0$ состоит из двух компонент связности.*

Пример 2. Рассмотрим форму $\alpha_0 x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 - (\alpha_0 x_0 + x_1 + x_2)^3$, которая определяет проективную плоскую кривую и соответствует сечению трёхмерного ± 1-куба плоскостью, ортогональной диагонали. Сделаем линейную замену переменных $y_0 = (x_1 + x_2)/2$, $y_1 = \alpha_0 x_0$ и $y_2 = (x_1 - x_2)/2$. Тогда при $\alpha_0 \neq 0$ и $y_0 = 1$ аффинная кривая задана уравнением $6\alpha_0^2 y_2^2 = (\alpha_0^2 - 1)y_1^3 + 6\alpha_0^2 y_1^2 + 12\alpha_0^2 y_1 + 6\alpha_0^2$. Дискриминант многочлена в правой части равен $\Delta = -108\alpha_0^4(\alpha_0^4 - 10\alpha_0^2 + 9)$. Если выполнены неравенства $1 < |\alpha_0| < 3$, то $\Delta > 0$ и кривая состоит из двух компонент связности. Тогда аффинная плоскость $\alpha_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0$

отделяет одну вершину ± 1-куба от остальных. При $\Delta < 0$ кривая связная. Если $0 < \alpha_0 < 1$, то аффинная плоскость отделяет четыре вершины ± 1-куба от четырёх других. Если $\alpha_0 > 3$, то аффинная плоскость не пересекает ± 1-куб.

Замечание 2. Для $n = 4$ нечётность числа отделяемых вершин ± 1-куба не эквивалентна существованию ориентируемой компоненты у проективной поверхности $g = 0$.

Пример 3. Пусть $h = -\alpha + \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 3x_3 + x_4$. При $1 < \alpha < 2$ аффинная гиперплоскость $h = 0$ отделяет семь вершин ± 1-куба, проективная гиперповерхность $g = 0$ содержит ориентируемую компоненту. Однако при $\alpha = 3$ аффинная гиперплоскость $h = 0$ отделяет пять вершин ± 1-куба, а проективная гиперповерхность $g = 0$ связная.

Пример 4. Рассмотрим форму $x_0^3 + \cdots + x_{2m+1}^3 - (x_0 + \cdots + x_{2m+1})^3$, которая определяет $2m$-мерную проективную гиперповерхность $\mathcal{X}$. При $m = 1$ это диагональная поверхность Клёбша. На этой гиперповерхности лежат m-мерные линейные подпространства. Одно из них задано системой из $m + 1$ уравнения $x_0 = -x_1, \ldots, x_{2m} = -x_{2m+1}$. Другие получаются перестановками индексов. Поскольку на $\mathcal{X}$ лежат два скрещивающихся m-мерных линейных подпространства $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, эта гиперповерхность $\mathcal{X}$ рациональная над полем вещественных чисел. Сопоставляя двум точкам $V \in \mathcal{Y}$ и $W \in \mathcal{Z}$ третью точку пересечения проходящей через них прямой VW с гиперповерхностью $\mathcal{X}$, получим бирациональное отображение $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z} \dashrightarrow \mathcal{X}$. Поскольку произведение линейных пространств $\mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ рационально, такова же и гиперповерхность $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ определены над полем вещественных чисел, то $\mathcal{X}$ рационально над полем вещественных чисел. С другой стороны, если вещественная гиперповерхность $\mathcal{X}$ состоит из двух компонент связности, то на ней не могут лежать два вещественных скрещивающихся линейных подпространства размерности m каждая. Оба эти подпространства должны лежать на неориентируемой компоненте. Тогда общая прямая, пересекающая эти два подпространства, пересекает ориентируемую компоненту в чётном числе точек. Но бирациональное отображение должно быть взаимно однозначным в общей точке. Следовательно, ориентирумой компоненты нет. Этот случай соответствует разбиению множества вершин $(2m + 2)$-мерного ± 1-куба на два множества, каждое из которых содержит чётное число вершин.

Литература

1. *Балицкий А. М., Савчик А. В., Гафаров Р. Ф., Коноваленко И. А.* О проективно инвариантных точках овала с выделенной внешней прямой // Проблемы передачи информации. 2017. Т. 53, № 3. С. 84—89.
2. *Дурнев В. Г., Зеткина О. В., Зеткина А. И., Мурин Д. М.* О coNP-полноте задачи «Инъективный рюкзак» // Прикладная дискретная математика. 2016. № 3 (33). С. 85—92.
3. *Малашонок Г. И.* Система компьютерной алгебры MathPartner // Программирование. 2017. № 2. С. 63—71.
4. *Прасолов В. В., Соловьев Ю. П.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения. М. : Факториал, 1997. 288 с.
5. *Селиверстов А. В.* Кубические формы без мономов от двух переменных // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2015. Т. 25, № 1. С. 71—77.
6. *Хейфец А. Л.* Коники как сечения квадрик плоскостью (обобщенная теорема Данделена) // Геометрия и графика. 2017. Т. 5, № 2. С. 45—58.
7. *González-Sánchez J., Polo-Blanco I.* Construction algorithms for rational cubic surfaces // Journal of Symbolic Computation. 2017. Vol. 79. P. 309—326.
8. *Plaumann D., Sinn R., Speyer D. E., Vinzant C.* Computing Hermitian determinantal representations of hyperbolic curves // International Journal of Algebra and Computation. 2015. Vol. 25, № 8. P. 1327—1336.
9. *Polo-Blanco I., Top J.* A remark on parameterizing nonsingular cubic surfaces // Computer Aided Geometric Design. 2009. Vol. 26, № 8. P. 842—849.
10. *Safey El Din M., Schost É.* A nearly optimal algorithm for deciding connectivity queries in smooth and bounded real algebraic sets // Journal of the ACM. 2017. Vol. 63, № 6. Article 48. 37 p.
11. *Seliverstov A. V.* On cubic hypersurfaces with involutions // International Conference Polynomial Computer Algebra'2016, Russian Academy of Sciences, St. Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, Euler International Mathematical Institute / Ed. by N. N. Vassiliev. Санкт-Петербург : Издательство ВВМ, 2016. С. 74—77. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=26437524
12. *Torrance D. A.* Generic forms of low Chow rank // Journal of Algebra and Its Applications. 2017. Vol. 16, № 3. Article 1750047. 10 p.