

ГОСУДАРСТВЕННОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ»

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Международная научная конференция
«XI Белорусская математическая конференция»

Тезисы докладов

Часть 4

Теория вероятностей и математическая статистика
Математические проблемы защиты информации
и анализ данных
Дискретная математика и математическая кибернетика

МИНСК 2012

УДК 51
ББК 22.1
О42

Редакторы:
С. Г. Красовский, В. В. Ленин

XI Белорусская математическая конференция: Тез. докл. Междунар. науч. О 42 конф. Минск, 5–9 ноября 2012 г. — Часть 4. — Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2012. — 108 с.

ISBN 987-985-6499-76-3 (Часть 4)
ISBN 978-985-6499-72-5

Сборник содержит тезисы докладов, представленных на XI Белорусской математической конференции по следующим направлениям: теория вероятностей и математическая статистика, математические проблемы защиты информации и анализ данных, дискретная математика и математическая кибернетика.

ISBN 987-985-6499-76-3 (Часть 4)
ISBN 978-985-6499-72-5

© Коллектив авторов, 2012
© Институт математики НАН Беларуси, 2012

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

О СТАТИСТИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ АППРОКСИМАЦИОННЫХ СУММ

С.А. Барабанова

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики — процессов управления
Университетский пр-т 35, 198504 Санкт-Петербург, Россия
Barabanova.Sveta@gmail.com

При построении неизвестного распределения вероятности по результатам измерения (по выборке) обычно используют некоторую априорную информацию об искомом распределении. Часто предполагается, что это распределение принадлежит некоторому параметрическому семейству. В этом случае и возникает задача статистического оценивания параметров распределения. Иногда известно, что искомое распределение достаточно близко к известному распределению, тогда и появляется возможность воспользоваться теоремой В. И. Зубова [1].

Теорема. Пусть $F(x)$ и $F_0(x)$ непрерывные функции распределения. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число N , набор действительных чисел a_1, \dots, a_N , набор положительных чисел b_1, \dots, b_N , набор неотрицательных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_N$, в сумме равных единице, такие, что

$$\max_x \left| F(x) - \sum_{k=1}^N \alpha_k F_0\left(\frac{x - a_k}{b_k}\right) \right| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

Отсюда, в частности, следует что любую непрерывную функцию распределения можно с произвольной точностью аппроксимировать смесью нормальных функций распределения. Сумма под знаком модуля в (1) называется аппроксимационной [2], таким образом возникает задача статистического оценивания параметров этой суммы. Но статистическое оценивание большого числа параметров может представлять определенную трудность для определения неизвестных коэффициентов a_1, \dots, a_N , b_1, \dots, b_N , $\alpha_1, \dots, \alpha_N$.

Интуитивно ясно, что применение аппроксимационной суммы Зубова будет эффективно, если порождающая функция распределения в определенном смысле близка к искомой функции распределения. Развивая эту идею с помощью метода максимального правдоподобия, удалось получить следующий результат [3]: если искомое и порождающее распределение вероятности абсолютно непрерывны (имеют плотности) и плотности этих распределений близки, то при аппроксимации можно ограничиться рассмотрением двучленных сумм Зубова. В работе предложены два семейства распределений близких к нормальному стандартному распределению, для которых задача получения эффективных оценок параметров может быть алгоритмизована [4]. Приводится алгоритм получения таких оценок, основанный на экстремальном свойстве исследуемых распределений по отношению к энтропии.

Литература

1. Зубов В. И. *Проблема обращения центральной предельной теоремы А. М. Ляпунова* // Докл. РАН. 1995. Т. 342, № 1. С. 1516.
2. Шмыров А. С., Шмыров В. А. *Теория вероятностей*. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2012.

3. Тукачев П. А., Шмыров А. С. *Аппроксимационные суммы Зубова и их применение*. М.: Наука, 1966. // Процессы управления и устойчивость: Тр. 36-й научной конференции аспирантов и студентов / Под ред. Н. В. Смирнова, В. Н. Старкова. Санкт-Петербург: Изд-во СПбГУ, 2005. С. 975–978.

4. Боровков А. А. *Математическая статистика*. М.: Физматлит, 2007.

МЕТОДЫ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НМ-СЕТЕЙ С ПРИОРИТЕТНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Н.В. Бекиш, О.М. Китурко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Ожешко 22, 230000 Гродно, Беларусь
nat67@list.ru

В докладе рассматривается НМ (Howard — Matalytski) — сеть произвольной структуры, состоящая из определенного числа систем массового обслуживания (СМО). Заявка при переходе из одной СМО в другую приносит последней системе некоторый доход и соответственно доход первой системы уменьшается на эту величину.

Для моделирования НМ-сетей с приоритетными заявками будем использовать процессно-ориентированную модель. В основе ее лежит использование объектов двух типов: 1) процессы (активного типа), 2) ресурсы (неактивного типа).

При имитационном моделировании процесса изменения доходов в системах замкнутой НМ-сети с приоритетными заявками, вводятся в рассмотрение процессы и ресурсы. Ресурсом является СМО, а процессом — каждая заявка, обслуживаемая в сети. Число линий обслуживания в СМО, закон распределения времен обслуживания заявок в каждой линии и другие представляют собой набор свойств ресурса. Для каждого процесса задается приоритет, определяемый следующим образом: либо заявка имеет приоритет (заявки первого типа) в обслуживании, либо не имеет (заявки второго типа). Процессы с приоритетом обслуживаются в первую очередь, а процессы без приоритета должны ждать. Преимущественное внимание уделяется приоритетным заявкам, которые могут прервать обслуживание неприоритетных заявок.

Процессы могут «захватывать» ресурсы, когда те свободны, «удерживать» их в течение некоторого времени, или становиться в очередь к ресурсам, что равносильно обслуживанию заявок в СМО. Причем тут срабатывает принцип приоритетности заявок. Если процесс «занят» неприоритетной заявкой и больше нет свободных процессов, то приоритетная заявка «выталкивает» неприоритетную и обслуживается указанным процессом. Другими словами, указанная неприоритетная заявка прерывает свое обслуживание и становится в очередь. Когда очередь доходит до неприоритетной заявки, которая была «вытолкнута», она обслуживается с того момента, с которого прервали ее обслуживание, т. е. дообслуживается. После захвата и удержания одного ресурса, процесс переходит к другому ресурсу, согласно матрице вероятностей переходов. За переход от одного ресурса к другому, некоторый определенный доход переходит от ресурса-источника к ресурсу-получателю. Эта величина определяется генератором, сопоставленным ресурсу, участвующему в переходе.

В рассмотрении также вводятся объекты еще одного типа - генераторы доходов, которые могут быть случайными величинами (СВ). Для каждой СМО необходимо сопоставить по три генератора доходов — первый для получения значения выигрыша от перехода заявки первого типа из этой системы в другую и наоборот, второй — для получения значения выигрыша от перехода заявки второго типа из этой системы в другую и наоборот, третий — для получения выигрыша СМО за промежуток времени, в течение которого все заявки находились на обслуживании.

При имитационном моделировании был использован пакет SimPy (Simulation in Python) — открытая программная библиотека для имитационного моделирования различных процессов с дискретными событиями, написанная на языке программирования Python. Для представления компонентов имитации в пакете существуют два основных класса — Process для активных процессов и Resource — для ресурсов. Кроме того, введен важный класс Monitor, который собирает моделируемые данные для анализа и статистики.

О ВЕРОЯТНОСТНОМ ОПИСАНИИ СЛУЧАЙНЫХ ЗАМКНУТЫХ СЕПАРАБЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ В \mathbb{R}

Ю.П. Вирченко¹, О.Л. Шпилинская²

¹ Белгородский государственный университет, Белгород, Россия
virch@bsu.edu.ru

² Институт монокристаллов НАН Украины, Харьков, Украина
shpilolga@mail.ru

Случайное множество $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P} \rangle$ с пространством погружения $[0, z] \subset \mathbb{R}$ ($\Omega = \{\tilde{X} \subset [0, z]t\}$) называется замкнутым, если его случайные реализации \tilde{X} с вероятностью 1 замкнуты.

Случайное замкнутое множество $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P} \rangle$ называется сепарабельным, если для любого счетного плотного в $[0, z]$ множества R с вероятностью 1 для случайных реализаций $\tilde{X} \subset [0, z]$ имеет место $\tilde{X} \cap R = \tilde{X}$. Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы случайное множество $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P} \rangle$ было сепарабельным необходимо и достаточно чтобы его реализации с вероятностью 1 были представимы в виде*

$$\tilde{X} = \overline{\bigcup_{k \in \tilde{N}} [\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k]}, \quad (1)$$

где \tilde{N} — случайное счетное множество меток и случайные отрезки $[\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k]$ попарно не пересекаются. Для каждой реализации \tilde{X} , для которой такое разложение имеет место, множество отрезков $\{[\tilde{\alpha}_k, \tilde{\beta}_k]; k \in \tilde{N}\}$ единственно.

Замкнутые сепарабельные множества в \mathbb{R} допускают вероятностное описание (задание вероятностной меры \mathbb{P} на подходящей σ -алгебре \mathfrak{B}) на основе бесконечного набора симметричных функций [1] $G_l(x_1, \dots, x_l) \equiv \Pr\{x_j \in \tilde{X}; j = 1, \dots, l\}$, $x_j \in [0, z]$, $j = 1, \dots, l$, таких, что $G_{l-1}(x_1, \dots, x_{l-1}) \geq G(x_1, \dots, x_{l-1}, x_l)$, $l \in \mathbb{N}$, $l \neq 1$. Кроме того, любое замкнутое случайное множество в \mathbb{R} (не обязательно сепарабельное) допускают вероятностное описание на основе бесконечного набора функций [2]

$$H_l(x_1, y_1; \dots; x_l, y_l) \equiv \Pr\{[x_j, y_j] \cap \tilde{X} = \emptyset; j = 1, \dots, l\}, \quad \{x_j, y_j\} \subset [0, z], \quad j = 1, \dots, l,$$

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < x_l < y_l, \quad l \in \mathbb{N},$$

которые удовлетворяют соотношениям согласованности

$$H_l(x_1, y_1; \dots; x_j, x_j; \dots; x_l, y_l) = H_{l-1}(x_1, y_1; \dots; \cancel{x_j}, \cancel{y_j}; \dots; x_l, y_l), \quad j = 1, \dots, l, \quad l \in \mathbb{N}, \quad l \neq 1,$$

$$H_l(x_1, y_1; \dots; x_j, y_j; y_j, y_{j+1} \dots; x_l, y_l) = H_{l-1}(x_1, y_1; \dots; x_j, y_j, \cancel{y_{j+1}}, y_{j+1}; \dots; x_l, y_l),$$

$j = 1, \dots, l$, $l \in \mathbb{N}$, $l \neq 1$, $H_1(0, z) = 1$. Однако, оба способа определения вероятностной меры оказываются чрезвычайно неэффективными в приложениях.

Рассмотрен частный случай замкнутых сепарабельных множеств, которые названы *конечно-порожденными*. Эти множества в соответствующем им разложении (1) имеют с вероятностью 1 только лишь конечный набор компонент, в котором число \tilde{l} случайно. Доказанная теорема позволяет задавать вероятностную меру \mathbb{P} для таких случайных множеств на основе вероятностей $p_l = \Pr\{\tilde{l} = l\}$ функций распределения случайных величин $F_l(x_1, y_1; \dots; x_l, y_l) \equiv \Pr\{\tilde{\alpha}_j < x_j, \tilde{\beta}_j < y_j, j = 1, \dots, l \mid \tilde{l} = l\}$, $l \in \mathbb{N}_+$. Функции F_l , $l \in \mathbb{N}$ обладают специальным свойством: если для какой-то пары $\{x_j, y_j\}$ имеет место $x_j \geq y_j$, $j = 1, \dots, l$, то $F_l(x_1, y_1; \dots; x_j, y_j; \dots; x_l, y_l) = F_l(x_1, y_1; \dots; y_j, y_j; \dots; x_l, y_l)$, а также если для какого-то $j = 1, \dots, l-1$ имеет место $y_j \geq x_{j+1}$, то при всех $l \in \mathbb{N}, l \neq 1$ выполняется

$$F_l(x_1, y_1; \dots; x_j, y_j; x_{j+1}, y_{j+1}; \dots; x_l, y_l) = F_l(x_1, y_1; \dots; x_j, x_{j+1}; x_{j+1}, y_{j+1}; \dots; x_l, y_l).$$

Получены алгебраические формулы перехода, которые выражают вероятности $G_m(x_1, \dots, x_m)$ и $H_m(x_1, y_1; \dots; x_m, y_m)$ в терминах набора набора $\{F_l, p_l; l \in \mathbb{N}\}$.

Литература

1. Matheron G. *Random Sets and Integral Geometry*. New York: John Wiley and Sons, 1975.
2. Virchenko Yu. P., Shpilinskaya O. L. *Marginal probability distributions of random sets in \mathbb{R} with markovian refinements // Theory of stochastic processes*. 2005. Vol. 11(27), no. 3–4. P. 121–130.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

Т.И. Воротницкая

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
iliukevich@bsu.by

Рассматриваются стационарные в широком смысле независимые случайные процессы $X(t)$ и $d(t)$, $t \in Z$ с математическими ожиданиями $m^X = 0$ и m^d , ковариационными функциями $R^X(\tau)$, $R^d(\tau)$, $\tau \in Z$, спектральными плотностями $f^X(\lambda)$, $f^d(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, смешанными моментами n -го порядка $m_n^X(t_1, \dots, t_{n-1})$, $m_n^d(t_1, \dots, t_{n-1})$ и смешанными семиинвариантами n -го порядка $c_n^X(t_1, \dots, t_{n-1})$, $c_n^d(t_1, \dots, t_{n-1})$, $t_j \in Z$, $j = \overline{1, 3}$.

Пусть через равные промежутки времени получено T последовательных наблюдений $Y(0), Y(1), \dots, Y(T-1)$ за процессом $Y(t) = X(t)d(t)$, $t \in Z$ [1]. По этим наблюдениям построена оценка спектральной плотности процесса $X(t)$ вида

$$\hat{f}^X(\lambda) = \frac{1}{2\pi T} \sum_{\tau=-K_T}^{K_T} k\left(\frac{\tau}{K_T}\right) \left(\frac{1}{(R^d(\tau) + (m^d(\tau))^2)} \right)^{T-\tau-1} \sum_{t=0}^{T-\tau-1} Y(t+\tau)Y(t)e^{-i\lambda\tau},$$

где $k(x) = k(-x)$, $k(0) = 1$, $|k(x)| \leq L$ для некоторого действительного L и всех $|x| \leq 1$, последовательность целых чисел $\{K_T\}$ такова, что $K_T \rightarrow \infty$ и $K_T/T \rightarrow 0$ при $T \rightarrow \infty$ [2].

Оценка является асимптотически несмещенной и состоятельной в среднеквадратическом смысле при выполнении следующих ограничений на ковариационные функции и семиинварианты третьего и четвертого порядков процессов $X(t)$ и $d(t)$, $t \in Z$:

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R^X(\tau)| < \infty, \quad \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R^d(\tau)| < \infty, \quad \sum_{u=-\infty}^{\infty} |c_4^X(u + \tau_1, u, u + \tau_2)| < \infty,$$

$$\sum_{u=-\infty}^{\infty} |c_3^X(u + \tau_1, u)| < \infty, \quad \sum_{u=-\infty}^{\infty} |c_4^d(u + \tau_1, u, u + \tau_2)| < \infty, \quad \sum_{u=-\infty}^{\infty} |c_3^d(u + \tau_1, u)| < \infty$$

равномерно по всем $\tau_1, \tau_2 \in Z$.

Литература

1. Varatnitskaya T. *Estimating Main Characteristics of Processes with Non-Regular Observations* // Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica. 2007. Vol. 12. P. 45–53.
2. Воротницкая Т.И. *Оценка спектральной плотности стационарного случайного процесса с нерегулярными наблюдениями* // Вестн. БГУ. 2010. Сер. 1. № 1. С. 118–122.

АНАЛИЗ ДВУХФАЗНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ СО ВТОРОЙ ФАЗОЙ, ОПИСЫВАЕМОЙ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ С КОНЕЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ СОСТОЯНИЙ

А.Н. Дудин

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
dudin@bsu.by

Двухфазные системы обслуживания описывают функционирование многих производственных, технических и административных систем и поэтому являются популярным объектом исследований (см., например, [1, 2]). В последние годы выявлена существенная зависимость важнейших характеристик производительности таких систем не только от интенсивности входного потока, но и от корреляции длин последовательных интервалов между моментами поступления и дисперсии распределения этих длин (см., например, [3–15]). В этих работах исследованы системы с групповым марковским входным потоком и различными механизмами обработки запросов на фазах системы. В данной работе предложена схема унифицированного исследования таких систем при формальном описании функционирования второй фазы в терминах многомерной цепи Маркова с непрерывным временем и конечным пространством состояний. Использование этой схемы позволяет существенно упростить анализ тандемных систем с различными механизмами обработки запросов на второй фазе.

Литература

1. Gnedenko B. W., Konig D. *Handbuch der Bedienungstheorie*. Berlin: Akademie Verlag, 1983.
2. Balsamo S., Persone V. D. N., Inverardi P. *A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction* // Performance Evaluation. 2003. V. 51. P. 269–288.
3. Breuer L., Dudin A. N., Klimenok V. I., Tsarenkov G. V. *A two-phase BMAP/G/1/N → PH/1/M – 1 system with blocking* // Automation and Remote Control. 2004. V. 65. P. 117–130.
4. Dudin A. N., Kim C. S., Klimenok V. I., Taramin O. S. *A dual tandem queueing system with a finite intermediate buffer and cross traffic* // Proc. of the 5th international conference “Queueing Theory and Network Applications”. 2010. P. 93–100.
5. Gomez-Corral A. *A tandem queue with blocking and Markovian arrival process* // Queueing Systems. 2002. V. 41. P. 343–370.
6. Heindl A. *Decomposition of general queue networks with MMPP inputs and customer losses* // Performance Evaluation. 2003. P. 117–136.
7. Klimenok V. I., Breuer L., Tsarenkov G. V., Dudin A. N. *The BMAP/G/1/N → PH/1/M – 1 tandem queue with losses* // Performance Evaluation. 2005. V. 61. P. 17–60.
8. Kim C. S., Klimenok V. I., Tsarenkov G. V., Breuer L., Dudin A. N. *The BMAP/G/1 → PH/1/M tandem queue with feedback and losses* // Performance Evaluation. 2007. V. 64. P. 802–808.
9. Kim C. S., Park S. H., Dudin A., Klimenok V., Tsarenkov G. *Investigation of the BMAP/G/1 → PH/1/M tandem queue with retrials and losses* // Applied Mathematical Modelling. 2010. V. 34. P. 2926–2940.
10. Kim C. S., Klimenok V. I., Taramin O. S. *A tandem retrial queueing system with two Markovian flows and reservation of channels* // Computers and Operations Research. 2010. V. 37. P. 1238–1246.

11. Klimenok V. I., Taramin O. S. *Tandem service system with batch Markov flow and repeated calls* // Automation and Remote Control. 2010. V. 71. P. 1–13.
12. Клименок В. И., Тарамин О. С. *Двухфазные системы обслуживания с коррелированными потоками*. Мн.: РИВШ, 2011. 144 с.
13. Клименок В. И., Тарамин О. С. *Двухфазная система $GI/PH/1 \rightarrow PH/1/0$ с потерями* // Автоматика и телемеханика. 2011. Т. 72. С. 113–126.
14. Kim C. S., Dudin S., *Priority Tandem Queueing Model with Admission Control* // Computers and Industrial Engineering. 2011. V. 60. P. 131–140.
15. Kim C. S., Dudin A. N., Klimenok V. I., Taramin O. S. *A tandem $VMAP/G/1 \rightarrow M/N/0$ queue with group occupation of servers at the second station* // Mathematical Problems in Engineering. 2012. V. 2012. ID 324604. 26 p.

ДВУХФАЗНАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕТЕРПЕЛИВЫМИ ЗАПРОСАМИ И БЕСКОНЕЧНЫМ ПРОМЕЖУТОЧНЫМ БУФЕРОМ

С.А. Дудин

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
dudin85@mail.ru

Введение. Рассматривается двухфазная система обслуживания с марковским входным потоком как модель работы центра информационной и технической поддержки. Центр информационной и технической поддержки предоставляет широкий спектр информационных услуг, а также оказывает техническую поддержку в процессе использования аппаратного или программного обеспечения различного назначения. Примером информационно-сервисного центра является служба информационной и технической поддержки интернет провайдеров. В случае возникновения проблем с настройкой интернет соединения абонент интернет услуг может обратиться в службу информационной поддержки своего провайдера для их решения. Обычно служба информационной поддержки имеет двухуровневую структуру. На первом этапе клиент звонит в call-центр обслуживающей компании, дожидается ответа оператора, который регистрирует обращение клиента и при возможности помогает клиенту самостоятельно. В случае если оператор call-центра не может решить проблему пользователя самостоятельно, он просит клиента ожидать, пока с ним свяжется специалист (системный администратор, инженер, техник). На втором этапе специалисты службы поддержки получают заявки от операторов, перезванивают клиентам и помогают им решить возникшие проблемы. Обзор литературы по call-центрам приведен в работе [1].

Для моделирования работы службы информационной и технической поддержки рассматривается двухфазная система массового обслуживания. Первая фаза представляет собой N -линейную систему с буфером размера $K - N$. В систему поступает марковский входной поток запросов, заданный неприводимой цепью Маркова с непрерывным временем ν_t , $t \geq 0$. Предполагается, что очередь первой фазы является «видимой». То есть, если в момент прихода запроса все приборы первой фазы заняты и число запросов в буфере равно l , $l = \overline{0, K - N - 1}$, то этот запрос с вероятностью p_l покидает систему, а с дополнительной вероятностью становится в очередь. Если в момент поступления запроса буфер заполнен, то запрос всегда покидает систему. Если запрос попадает в буфер, то он уходит из системы из-за нетерпеливости через экспоненциально распределенное с параметром α , $0 < \alpha < \infty$, время с момента попадания в буфер при условии, что он не попал на обслуживание. После обслуживания на первой фазе запрос с вероятностью q , $0 \leq q \leq 1$, покидает систему, а с дополнительной вероятностью $1 - q$ переходит на вторую фазу системы. Вторая фаза представляет собой R -линейную систему с бесконечным буфером. Запросы, попавшие в буфер

второй фазы, не покидают систему из-за нетерпеливости и всегда дожидаются начала обслуживания. Времена обслуживания запросов на обеих фазах имеют распределения фазового типа.

Получено условие существования стационарного режима функционирования системы. Приведен алгоритм вычисления стационарных вероятностей и основных характеристик производительности. Найдены преобразования Лапласа — Стильтеса распределения времени пребывания и ожидания запроса на первой и второй фазах. Приведены результаты численных экспериментов. Численно решена задача оптимизации функционирования системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Министерства образования, грант № Ф12МВ-002.

Литература

1. Kim C. S., Dudin S., Taramin O., Baek J. *Queueing system MAP/PH/N/N + R with impatient heterogeneous customers as a model of call center* // Applied Mathematical Modelling, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2012.03.021>.

МНОГОЛИНЕЙНАЯ СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ С МАРКОВСКИМ ВХОДНЫМ ПОТОКОМ И ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

О.С. Дудина

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь dudina_olga@email.com

Введение. Рассматривается многолинейная система обслуживания с повторными вызовами как модель функционирования центра обслуживания звонков. Центр обслуживания звонков (колл-центр) представляет собой централизованный офис, который используется для получения и передачи информации, поступающей в виде запросов по телефону. Центры обслуживания звонков играют важную роль в современном мире. Согласно последним исследованиям 500 наиболее крупных мировых компаний имеют по крайней мере один колл-центр для общения со своими клиентами. Рассматривая центр обслуживания звонков как математическую модель, можно решить широкий круг задач по оптимизации его функционирования. По статистическим данным 60-80 % затрат колл-центра приходится на обучение и содержание его персонала, поэтому наиболее важной задачей является нахождение оптимального числа операторов, необходимых для обслуживания клиентов с заданным уровнем обслуживания.

Исследована система обслуживания, состоящая из N приборов (операторов) и буфера размера $R - N$ (линий для ожидания). В систему поступает марковский входной поток, заданный управляющим процессом ν_t , $t \geq 0$, который является неприводимой регулярной цепью Маркова с непрерывным временем и конечным пространством состояний. Время обслуживания запроса каждым прибором имеет распределение фазового типа.

Если в момент прихода запроса есть свободный прибор, то этот запрос немедленно начинает обслуживаться. Если все приборы и все места в буфере заняты, запрос теряется с вероятностью q_1 или с дополнительной вероятностью идет на некоторое виртуальное место (орбиту), откуда совершает повторные попытки попасть на обслуживания через случайные интервалы времени. Если в момент поступления произвольного запроса, все приборы заняты и l , $l = \overline{0, R - N - 1}$, запросов находится в буфере, то этот запрос отказывается присоединяться к буферу с вероятностью p_l или становится в буфер с дополнительной вероятностью. В первом случае, запрос покидает систему навсегда с вероятностью q_2 или с дополнительной вероятностью идет на орбиту.

Запросы могут проявлять нетерпеливость во время ожидания в буфере: запрос покидает систему через экспоненциально распределенное время с параметром θ , $0 < \theta < \infty$, если он не попал на обслуживание. В случае ухода из-за нетерпеливости, запрос покидает систему навсегда с вероятностью q_3 или идет на орбиту с дополнительной вероятностью.

Процесс функционирования системы был описан многомерной цепью Маркова с непрерывным временем. Получено условие существования стационарного режима. Для нахождения стационарного распределения был использован численно устойчивый алгоритм, приведенный в [1]. Получены формулы для вычисления основных стационарных характеристик производительности системы. Проведен численный эксперимент, иллюстрирующий влияние коэффициента корреляции во входном потоке и коэффициента вариации процесса обслуживания на функционирование системы. Численно решена задача нахождения оптимального числа операторов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант № Ф11М-003).

Литература

1. Klimenok V.I., Dudin A.N. *Multi-dimensional asymptotically quasi-Toeplitz Markov chains and their application in queueing theory* // Queueing Systems. 2006. P. 245–259.

О МОДЕЛИРОВАНИИ СТАЦИОНАРНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ОДНОМЕРНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В.Е. Евдокимович¹, Н.М. Курносенко²

¹ Белорусский государственный университет транспорта
Кирова 34, 246653 Гомель, Беларусь
vevdokimovich@yandex.ru

² Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь

В [1] рассматривается следующая модель для стационарного процесса ξ_t , $t = 1, 2, \dots$, с произвольным одномерным распределением вероятностей $P\{\xi_t < x\} = F(x)$.

Пусть $\dots, \xi_{-1}^0, \xi_0^0, \xi_1^0, \dots$ — независимы и одинаково распределены согласно $F(x)$, а δ_t , $t = 1, 2, \dots$, — независимый $\{\xi_i^0\}$ стационарный целочисленный процесс с вероятностями состояний $P\{\delta_t = i\} = p_i$, $i = 0, 1, 2, \dots$, $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. В этом случае процесс $\xi_t = \xi_{t-\delta_t}^0$, $t = 1, 2, \dots$, имеет одномерное распределение $F(x)$ и стационарную корреляционную функцию $\rho_h = \text{cov}(\xi_t, \xi_{t-h})$, $h = 0, 1, \dots$. Если δ_t и $\delta_{t'}$ независимы при любых $t = t'$, то выражение для ρ_h напоминает корреляционную функцию в модели скользящего среднего для временного ряда. Поэтому процесс ξ_t называют процессом рандомизированного скользящего среднего [1].

Предполагается обобщение указанной модели, которое основано на том, что процесс ξ_t стационарен не только тогда, когда таковым является процесс δ_t . Для стационарности ξ_t в узком смысле необходимо и достаточно чтобы при любых $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $n = 2, 3, \dots$, совместная характеристическая функция

$$\varphi_{t_1, t_2, \dots, t_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) = M \exp[i(u_1 \xi_{t_1 - k_1}^0 + \dots + u_n \xi_{t_n - k_n}^0)]$$

не зависима от t_i . Выполнение этого условия обеспечивается свойствами только процесса δ_t , поскольку математическое ожидание зависит лишь от всевозможных разностей между $t_i - k_i$ и $t_j - k_j$. Найдены выражения для стационарной корреляционной функции, когда

$$\delta_t = X_1 + X_2 + \dots + X_t, \quad t = 1, 2, \dots,$$

где X_1, X_2, \dots независимы и одинаково распределены.

Литература

1. Марченко А. С. *Рандомизированные модели стационарных временных рядов с произвольным одномерным распределением вероятностей* // Теория и алгоритмы статистического моделирования. Новосибирск, 1984. С. 19–38.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Д. Егоров

Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
egorov@im.bas-net.by

В докладе рассматривается задача вычисления математического ожидания нелинейных функционалов, заданных на траекториях решения уравнения

$$X_t = 1 + \int_0^t f(s)X_s dN_s, \quad t \in [0, 1], \quad (1)$$

где $N = N_s, s \in [0, 1]$ — стандартный процесс Пуассона, а также стохастических уравнений более общего вида. Решение аналогичной задачи для уравнений по винеровскому процессу рассмотрено в работе [1], в которой получены формулы точные для функциональных многочленов от решения некоторых специальных видов линейных уравнений Ито.

Теорема. Пусть функционал $F(X_{(\cdot)})$ задан на траекториях решения уравнения (1). Тогда имеет место следующая приближенная формула, которая является точной для функциональных многочленов третьей степени от решения уравнения:

$$\begin{aligned} E[F(X_{(\cdot)})] \approx & \Delta F(p_2(\cdot)) - F(0) + \sum_{k=1}^2 A_k \left\{ \Lambda F \left(c_k p_2(\cdot) \left(\frac{p_1(1)p_3(1)}{(p_2(1))^2} \right)^{1/3} \right) - \right. \\ & \int_0^1 \int_0^1 \Lambda F \left(c_k p_2(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{p_1(u)}{p_2(u)} \right) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{p_3(v)}{p_2(v)} \right) \right)^{1/3} 1_{[0, \cdot]}(u) 1_{[\cdot, 1]}(v) \right) dudv - \\ & \int_0^1 \Lambda F \left(c_k p_2(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{p_1(u)}{p_2(u)} \right) \frac{p_3(1)}{p_2(1)} \right)^{1/3} 1_{[\cdot, 1]}(u) \right) du - \\ & \left. \int_0^1 \Lambda F \left(c_k p_2(\cdot) \left(\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{p_3(u)}{p_2(u)} \right) \frac{p_1(0)}{p_2(0)} \right)^{1/3} 1_{[\cdot, 1]}(u) \right) du \right\} + \int_0^1 \Delta F \left(p_2(\cdot) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{p_3(u)}{p_2(u)} \right)^{1/2} 1_{[0, \cdot]}(u) \right) du, \end{aligned}$$

где $p_i(u) = \exp\{\int_0^u (1+f(s))^{3-i} f(s) ds\}$, $i = 1, 2$, $p_3(u) = \exp\{\int_0^u (1+f(s)) ds\}$, $\Lambda F(f(\cdot)) = (F(f(\cdot)) - F(-f(\cdot)))/2$, $\Delta F(f(\cdot)) = (F(f(\cdot)) + F(-f(\cdot)))/2$, параметры A_k, c_k , $k = 1, 2$, определяются из соотношений $A_1 c_1 + A_2 c_2 = 0$, $A_1 c_1^3 + A_2 c_2^3 = 1$.

При доказательстве используется явный вид решения уравнения (1). Рассматриваются составные формулы, сходящиеся к точным значениям математических ожиданий функционалов, основанные на полученных формулах.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф11К-020).

Литература

1. Egorov A., Sabelfeld K. *Approximate formulas for expectations of functionals of solutions to stochastic differential equations* // Monte Carlo Methods and Applications. 2010. Vol. 16, no. 2. P. 95–127.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ОТ РЕШЕНИЙ СДУ С РАЗРЫВНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

А.В. Жерело

Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
ant@im.bas-net.by

В докладе рассмотрено уравнение вида

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_{s-}, s) dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} g(X_{s-}, s, u) \tilde{\nu}(ds \times du),$$

где $t \in [0, T]$, $W_s = W(s, \omega)$ — винеровский процесс, $\tilde{\nu}_s(B) = \tilde{\nu}(s \times B, \omega)$, $B \subset \mathbb{R}$ — центрированная стохастическая пуассоновская мера; мера $\pi(B)$ является характеристикой меры $\tilde{\nu}_s(B)$, $\pi(\mathbb{R}) < \infty$.

В данной работе предлагается метод приближенного вычисления значений функционалов вида $E[\int_0^t F(X_s) ds]$, зависящих от решения X_t указанного выше уравнения; $F(x)$ — гладкий функционал. Метод основан на аппроксимации слабого типа, точной для полиномов третьей степени от винеровского процесса и центрированной пуассоновской меры, в сочетании с дискретизацией временного интервала.

Исследована сходимость предложенного метода.

Литература

1. Egorov A. D., Sobolevsky P. I., Yanovich L. A. *Functiona Integrals; Approximate Evaluation and Applications*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993.
2. Kloeden P. E., Platen E. *Numerical solution of stochastic differential equations*. Springer, 1999.
3. Applebaum D. *Levy processes and stochastic calculus*. Cambridge University Press, 2009.

АПРИОРНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ КЛАССОВ И РИСК БАЙЕСОВСКОГО РЕШАЮЩЕГО ПРАВИЛА

Е.Е. Жук

Белорусский государственный университет
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
zhukee@mail.ru

Пусть в пространстве наблюдений R^N ($N \geq 1$) регистрируются случайные вектора-наблюдения $x \in R^N$ из $L \geq 2$ классов $\{\Omega_1, \dots, \Omega_L\}$. Наблюдение x принадлежит к классу Ω_{d^o} со случайным неизвестным (ненаблюдаемым) номером $d^o \in S$, $S = \{1, \dots, L\}$:

$$P\{d^o = i\} = \pi_i > 0, \quad i \in S; \quad \sum_{i \in S} \pi_i = 1, \quad (1)$$

где $\pi = \{\pi_i\}_{i \in S}$ — априорные вероятности классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ [1, 2]. Наблюдения из класса Ω_i (при фиксированном номере $d^o = i$) описываются условной плотностью распределения [1, 2]:

$$p_i(x) \geq 0, \quad x \in R^N : \int_{R^N} p_i(x) dx = 1, \quad i \in S. \quad (2)$$

Задача статистической классификации заключается в построении решающего правила (РП) [1, 2]: $d = d(x) : R^N \rightarrow S$, относящего наблюдение x к одному из классов $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ ($d \in S$) и являющегося статистической оценкой для неизвестного d^o .

Эффективность РП $d = d(x) \in S$, $x \in R^N$, обычно характеризуется при помощи риска, имеющего смысл ожидаемых потерь при классификации [1, 2]: $r = r(d) = E\{w_{d^o, d(x)}\}$, где $w_{ij} \geq 0$ — величина («цена») потерь при отнесении наблюдений, принадлежащих классу Ω_i , в класс Ω_j ($i, j \in S$). Как известно [1, 2], минимально возможное (оптимальное) значение риска гарантирует байесовское решающее правило (БРП):

$$d_o(x) = d(x; \pi) = \arg \min_{j \in S} f_j(x; \pi), \quad x \in R^N;$$

$$f_j(x; \pi) = \sum_{i \in S} \pi_i w_{ij} p_i(x), \quad j \in S, \quad (3)$$

и $r(d) \geq r(d_o)$, $\forall d(\cdot)$, а величина $r_o = r(d_o)$ называется байесовским риском [1, 2].

Пусть теперь условные плотности $\{p_i(\cdot)\}_{i \in S}$ из (2), задающие распределения вероятностей наблюдений в классах, остаются неизменными, тогда как априорные вероятности из (1) меняют свои значения с $\pi^o = \{\pi_i^o\}_{i \in S}$ на $\pi = \{\pi_i\}_{i \in S}$ (изменяются пропорции по числу наблюдений между классами):

$$\pi_i = \pi_i^o + \varepsilon_i, \quad i \in S; \quad -\pi_i^o < \varepsilon_i < 1 - \pi_i^o, \quad i \in S; \quad \sum_{i \in S} \varepsilon_i = 0, \quad (4)$$

где $\{\varepsilon_i\}_{i \in S}$ — величины, на которые изменились значения соответствующих априорных вероятностей. Степень этих изменений будем характеризовать уровнем отклонений [3]:

$$\varepsilon_+ = \max_{i \in S} |\varepsilon_i|. \quad (5)$$

Чем меньше ε_+ , тем ближе $\{\pi_i\}_{i \in S}$ к $\{\pi_i^o\}_{i \in S}$, и при $\varepsilon_+ = 0$: $\pi = \pi^o$.

Установим связь между риском $r_o(\pi^o)$, соответствующем БРП $d(\cdot; \pi^o)$, и значением риска $r_o(\pi)$ БРП $d(\cdot; \pi)$ после изменения априорных вероятностей с $\{\pi_i^o\}_{i \in S}$ на $\{\pi_i\}_{i \in S}$.

Введем в рассмотрение величины, имеющие смысл условных рисков для БРП $d(\cdot; \pi)$ (ожидаемых потерь при классификации наблюдений из соответствующих классов):

$$R^{(i)}(\pi) = E\{w_{d^o, d(x; \pi)} \mid d^o = i\} = \sum_{j \in S} w_{ij} \int_{R^N} \prod_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} U(f_k(x; \pi) - f_j(x; \pi)) p_i(x) dx, \quad i \in S, \quad (6)$$

где $\{f_j(\cdot; \pi)\}_{j \in S}$ определены в (3), а $U(z) = \{1, z \geq 0; 0, z < 0\}$, $z \in R$, — единичная функция Хэвисайда. При этом справедливо очевидное соотношение: $r_o(\pi) = \sum_{i \in S} \pi_i R^{(i)}(\pi)$.

Теорема. Пусть классы $\{\Omega_i\}_{i \in S}$ определяются моделью (1), (2). Тогда при малых отклонениях (5) априорных вероятностей $\{\pi_i\}_{i \in S}$ из (4) от значений $\{\pi_i^o\}_{i \in S}$: $\varepsilon_+ \rightarrow 0$, для соответствующих байесовских рисков справедливо асимптотическое соотношение:

$$r_o(\pi) = r_o(\pi^o) + \sum_{i \in S} \varepsilon_i R^{(i)}(\pi^o) + O(\varepsilon_+^2). \quad (7)$$

Следствие. В условиях теоремы для уклонения байесовского риска $r_o(\pi) - r_o(\pi^o) = O(\varepsilon_+)$ имеет место неравенство:

$$|r_o(\pi) - r_o(\pi^o)| \leq \varepsilon_+ (\max_{i \in S} R^{(i)}(\pi^o) - \min_{j \in S} R^{(j)}(\pi^o)) + O(\varepsilon_+^2),$$

а при равных между собой значениях условных рисков $\{R^{(i)}(\pi^o)\}_{i \in S}$ из (6) : $r_o(\pi^o) = R^{(i)}(\pi^o)$, $i \in S$, уклонение риска $r_o(\pi) - r_o(\pi^o) = O(\varepsilon_+^2)$.

Результаты теоремы и следствия к ней позволяют на практике аналитически оценить изменение риска БРП (3) при малых изменениях значений априорных вероятностей. Из (7) также видно, что уменьшение априорных вероятностей, соответствующих большим значениям условных рисков, и соответствующее увеличение априорных вероятностей для меньших значений условных рисков приводит к уменьшению байесовского риска, и наоборот.

В качестве примера рассмотрен также часто встречающийся на практике случай двух классов ($L = 2$, $S = \{1, 2\}$) и модели Фишера, когда плотности, описывающие классы, многомерные нормальные (гауссовские) [1–3].

Литература

1. Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. *Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности*. М.: Финансы и статистика, 1989.
2. Харин Ю. С., Жук Е. Е. *Математическая и прикладная статистика*. Мн.: БГУ, 2005.
3. Жук Е. Е. Устойчивость байесовского решающего правила при неточно заданных априорных вероятностях классов // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 4. С. 14–20.

АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ В МЕДИЦИНСКОМ СТРАХОВАНИИ

А.И. Заливская, В.В. Сечко

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
zalivskaya.alexandra@gmail.com, sechkovv@bsu.by

Медицинское страхование является формой социальной защиты интересов населения в охране здоровья. В настоящее время на западе широко распространено добровольное медицинское страхование (ДМС), и оно же активно развивается в России. В Республике Беларусь на данный момент нет единой и целостной схемы реализации ДМС, тем не менее, некоторые страховые компании уже предоставляют гражданам возможность застраховать свое здоровье.

В основе расчетов страховых премий ДМС лежит два основных принципа: принцип эквивалентности и принцип солидарности (согласованность интересов). Основная классификация ДМС проводится по длительности, при этом выделяют краткосрочное страхование и долгосрочное страхование.

В краткосрочном страховании выделяют два основных класса: с фиксированными выплатами и с компенсацией фактических расходов. Классификация долгосрочного страхования осуществляется в зависимости от видов взносов, видов выплат, количества участников и длительности периода страхования. Ключевой особенностью долгосрочного страхования является то, что оно подразумевает систематическое накопление резервов. Существует два основных метода расчета резерва страхования: перспективный (прямой) и ретроспективный (обратный) [1]. Оба этих метода дают одинаковый результат.

Основными расчетными компонентами страховой премии (брутто-премии) являются нетто-премия, рисковая составляющая и нагрузка (административные расходы, прибыль компании и др.). При определении нетто-премии учитываются размеры выплат и вероятность наступления страхового случая.

Было проведено исследование зависимости размеров страховых премий в долгосрочном страховании от различных факторов, оказывающих влияние на здоровье человека. В результате была выведена система коэффициентов, определяющая эти зависимости. Для отражения влияния определенных факторов в расчетных формулах существует т.н. базовая величина затрат, которая формируется как комбинация соответствующих коэффициентов. На основе исследования методов ДМС были получены формулы для расчетных компонент и разработано программное обеспечение для вычисления страховых премий, которое позволяет корректно вычислять размеры необходимых потоков платежей для рассмотренных видов ДМС и резервов для долгосрочного страхования.

Литература

1. Медведев Г. А., Сечко В. В. *Страховая математика*. Мн.: БГУ, 2003.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ НАСТУПЛЕНИЯ СЕРИИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ В ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СХЕМЕ

Н.М. Зуев

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
ZuevNM@bsu.by

В работе приводятся рекуррентные соотношения для нахождения распределения и центральных моментов времени появления серии событий в полиномиальной схеме.

Будем рассматривать последовательность независимых испытаний, в которых могут происходить только события A_1, \dots, A_l с вероятностями p_1, \dots, p_l соответственно.

Пусть нас интересует появление определенной последовательности из событий длины k , составленной из событий A_1, \dots, A_l . Такую последовательность обозначим ε . Первые i элементов этой последовательности обозначим ε_i . Пусть S_n — n реализаций в рассмотренной схеме испытаний.

Обозначим $\varepsilon_i \prec S_n$, если последние i событий в последовательности S_n совпадают с ε_i . Пусть $\xi = \min\{n : \varepsilon \prec S_n\}$, $p(n) = P\{\xi = n\}$, $p_i(n) = P\{\xi = n \mid \varepsilon_i\}$.

Теорема 1. *Распределение $p(n)$ случайной величины ξ находится рекуррентным образом из системы k линейных уравнений:*

$$p_{i-1}(n) = p_j p_i(n) + \sum_{s \neq j} p_s p_{l(s)}(n + l(s) - i),$$

где $p_0 = p(n)$, $p_i(n) = 0$, если $n < k$, $p_k(n) = 1$, $l(s) = \max\{r : \varepsilon_r \prec \varepsilon_{i-1} A_s\}$.

Пусть $E_i\{l\} = E\{(\xi + l)^m \mid \varepsilon_i\}$, $E_i = E\{\xi^m \mid \varepsilon_i\}$.

Теорема 2. *Моменты $E\{\xi^m\}$ случайной величины ξ находятся рекуррентным образом из системы k линейных уравнений:*

$$E_{i-1} = p_j p_i(n) + \sum_{s \neq j} p_s E_{l(s)}(i - l(s)),$$

$$E_0(l) = E\{(\xi + l)^m\}, \quad E_k(l) = (k + l)^m.$$

Доказательства теорем следуют из формулы полной вероятности и свойств математического ожидания.

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РЕКУРРЕНТНЫМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ И ПОВТОРНЫМИ ВЫЗОВАМИ

В.И. Клименок

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
klimenok@bsu.by

Системы массового обслуживания являются общепризнанными математическими моделями стохастических процессов, протекающих в различных телекоммуникационных сетях и системах. Актуальным направлением является исследование систем с повторными вызовами, которые хорошо моделируют процессы повторной передачи информации в реальных объектах. В таких системах заявки, заставшие обслуживающее устройство занятым, не уходят из системы и не становятся в очередь, а идут на так называемую орбиту — виртуальный буфер для таких заявок, откуда делают повторные попытки попасть на обслуживание через случайные интервалы времени. В большинстве работ, посвященных системам с повторными вызовами, рассматриваются модели с наиболее простым при аналитическом анализе стационарным пуассоновским потоком. В настоящее время существует ряд работ по системам с повторными вызовами и групповым марковским потоком, который является хорошей математической моделью трафика в современных телекоммуникационных сетях. Вместе с тем, даже эта достаточно общая модель марковского потока не может быть использована при описании реальных потоков с произвольным распределением интервалов между поступлениями запросов. Примером могут служить потоки, у которых эти интервалы имеют детерминированное, логнормальное, равномерное распределения, распределение Вейбулла. Системы с повторными вызовами и такими немарковскими потоками практически не рассматривались в литературе, что объясняется, видимо, математическими трудностями, возникающими при их исследовании.

В данной работе рассматривается одна из таких систем. Это однолинейная система массового обслуживания с повторными вызовами и постоянной интенсивностью повторов. Интервалы между поступлениями первичных заявок являются независимыми случайными величинами с произвольной функцией распределения $A(t)$, преобразованием Лапласа — Стилтеса $A^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} dA(t)$, $\text{Re } s \geq 0$, и конечным первым моментом $\int_0^\infty t dA(t) < \infty$. Времена обслуживания как первичных, так и повторных заявок есть независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметром μ . Система не имеет буфера. Если в момент поступления заявки обслуживающий прибор свободен, то заявка немедленно начинает обслуживаться. Если прибор занят, то заявка идет на орбиту неограниченного объема. Старейшая по времени пребывания на орбите заявка делает повторные попытки занять прибор через экспоненциально распределенное время с параметром γ .

Трудности, возникающие при математическом анализе процессов, описывающих функционирование системы, удастся преодолеть путем переопределения понятия время обслуживания в системе с учетом явления повторных попыток. Переопределенное время имеет распределение фазового типа. Дальнейшее исследование основано на вероятностных соображениях и применении матрично-аналитических методов теории массового обслуживания.

В результате найдено условие существования стационарного режима в системе, получены формулы для вычисления стационарного распределения в моменты поступления заявок и в произвольные моменты времени, найдено преобразование Лапласа — Стилтеса времени пребывания в системе. Найдено математическое ожидание времени пребывания для детерминированного, равномерного, гиперэкспоненциального, эрланговского распределений интервалов во входном потоке.

О НАХОЖДЕНИИ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА НМ-СЕТИ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВРЕМЕНАМИ ПРЕБЫВАНИЯ ЗАЯВОК В ОЧЕРЕДЯХ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Е.В. Косарева, М.А. Маталыцкий, К.В. Розов

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
{koluzaeva,m.matalytski}@gmail.com

Рассмотрим НМ(Howard — Matalytski)-сеть произвольной топологии с однотипными заявками состоящую из систем массового обслуживания (СМО) S_1, S_2, \dots, S_n (S_0 — внешняя среда), в общем случае СМО могут содержать m_i линий обслуживания, $i = \overline{1, n}$. Состояние такой сети может быть описано вектором $k(t) = (k_1, k_2, \dots, k_n, t)$, где k_i — число линий заявок в системе S_i в момент времени t , $i = \overline{1, n}$. В сеть поступает поток заявок с интенсивностью λ . Обозначим интенсивность обслуживания в системе S_i (в случае, когда в этой системе находятся k_i заявок) как $\mu(k_i)$; p_{ij} — вероятность перехода заявки в систему S_j после ее обслуживания в системе S_i , $\sum_{j=0}^n p_{ij} = 1$, $i = \overline{0, n}$. Если заявка не дождалась обслуживания в системе S_i , то она переходит в систему S_j с вероятностью q_{ij} ; θ_i — интенсивность ухода заявки из очереди i -й СМО, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{0, n}$. Матрицы $P = \|p_{ij}\|_{(n+1) \times (n+1)}$, $Q = \|q_{ij}\|_{n \times (n+1)}$ являются матрицами переходов неприводимых марковских цепей. Заявка при переходе из одной системы в другую приносит последней некоторый доход, а доход первой СМО уменьшается на эту величину. Поэтому в НМ-сетях кроме случайного процесса числа заявок в системах сети, необходимо исследовать процесс изменения доходов в них.

Обозначим через $v_i(k, t)$ полный ожидаемый доход, который получает система S_i сети за время t , если в начальный момент времени сеть находится в состоянии k . В общем случае, когда функционирование сети описывается марковским процессом $k(t)$, $t \geq 0$, а доходы от переходов между состояниями сети не зависят от времени, систему РДУ для ожидаемого дохода системы S_i можно записать в виде

$$\frac{dv_i(k, t)}{dt} = A_i(k) - \Lambda_i(k)v_i(k, t) + \sum_{c,s=1}^n \Phi_{ics}(k)v_i(k + I_c - I_s, t), \quad (1)$$

где $\Lambda_i(k)$, $\Phi_{ics}(k)$ — некоторые ограниченные неотрицательные функции. Число уравнений в этой системе равно числу состояний сети.

Ранее метод последовательных приближений, совмещенный с методом рядов использовался для исследования ожидаемых доходов открытых НМ-сетей произвольной архитектуры с разнотипными заявками многих классов [1]. В докладе рассматриваются аналогичные результаты, полученные для НМ-сетей с ограниченным временем пребывания заявок в очередях систем.

Пусть $v_{im}(k, t)$ — приближение дохода $v_i(k, t)$ на m -й итерации, полученное методом последовательных приближений, совмещенным с методом рядов, $m = 0, 1, 2, \dots$. Доказано, что:

1) последовательные приближения $v_{im}(k, t)$, $m = 1, 2, \dots$, сходятся при $t \rightarrow \infty$ к стационарному решению системы уравнений (1), если оно существует;

2) последовательность $\{v_{im}(k, t)\}$, $m = 0, 1, 2, \dots$, при любом ограниченном по t нулевом приближении $v_{i0}(k, t)$ сходится при $m \rightarrow \infty$ к единственному решению системы уравнений (1);

3) любое приближение $v_{im}(k, t)$, $m \geq 1$, можно представить в виде степенного ряда, коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям.

Литература

1. Матальцкий М. А., Колузаева Е. В. *Исследование марковских сетей с доходами и разнотипными заявками многих классов методом последовательных приближений* // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2008. № 4. С. 113–118.

**АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОГО СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО
ОТКЛОНЕНИЯ ПРИ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОЦЕНИВАНИИ
ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, УЧИТЫВАЮЩАЯ НАЛИЧИЕ
ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ВЫБОРОЧНЫМИ ДАННЫМИ**

Е.Г. Красногир

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
krasnahir@bsu.by

Задача вычисления оптимального параметра размытости. Пусть X — стационарный марковский случайный процесс с неизвестной маргинальной плотностью вероятностей $f(x)$, а X_1, X_2, \dots, X_n — наблюдения этого процесса соответственно в моменты времени $t, t + \Delta, t + 2\Delta, \dots, t + (n - 1)\Delta$ ($\Delta > 0$). Для оценивания $f(x)$ используется статистика

$$f_h(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right), \quad (1)$$

где $h > 0$ — параметр размытости, $K(z)$ — ядерная функция, имеющая свойства плотности вероятностей [1]. Рассмотрим функцию [2]

$$\begin{aligned} \text{MISE}(h) = & \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx - 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x - hz)K(z) dx dz + \frac{1}{hn} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(z) dz + \\ & + \frac{2}{n^2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \sum_{j=1}^{n-1} (n - j) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(u)K(v)f_j(x - hu, x - hv) du dv, \end{aligned} \quad (2)$$

являющуюся интегральным среднеквадратичным отклонением оценки (1) от истинной плотности вероятностей ($f_j(t, s)$ — совместная плотность вероятностей отсчетов X_k и X_{k+j} , $k = \overline{1, n - j}$, $j = \overline{1, n - k}$). Оптимальным будет параметр h , минимизирующий (2).

Очевидно, что присутствие в (2) неизвестной совместной плотности вероятностей элементов выборки значительно усложняет задачу оценивания. Поэтому возникает необходимость построения аппроксимации, имеющей по сравнению с (2) более простой вид и в то же время учитывающей наличие зависимости между выборочными данными.

Аппроксимация для MISE(h). Установлено, что для построения простейшей аппроксимации для функции (2), не содержащей $f_j(t, s)$ и при этом учитывающей наличие зависимости между выборочными данными, нужно взять в (2) $n = 1$. Для моделей динамики процессов процентных ставок на финансовом рынке [3–5], описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями, параметр размытости, получающийся при минимизации данной аппроксимации, является верхней границей среди всех h , получаемых при минимизации (2) для различных ρ — коэффициентов корреляции наблюдений X_k и X_{k+1} . Верхняя граница является достижимой при $\rho = 1$.

Литература

1. Turlach B. A. *Bandwidth selection in kernel density estimation: a review*. Technical report. Louvain-la-Neuve, 1993.
2. Красногир Е. Г., Медведев Г. А. *О непараметрических оценках плотности вероятностей по выборкам зависимых отсчетов* // Вестн. Томского гос. ун-та. Прилож. 2006. № 19. С. 172–178.
3. Vasicek O. *An equilibrium characterization of the term structure* // J. of Financial Economics. 1977. Vol. 5. P. 177–188.
4. Cox J. C., Ingersoll J. E., Ross S. A. *A theory of the term structure of interest rates* // Econometrica. 1985. Vol. 53, № 2. P. 385–407.
5. Ahn D.-H., Gao B. *A parametric nonlinear model of term structure dynamics* // Rev. Financial Studies. 1999. Vol. 126 № 4. P. 721–762.

ОЦЕНИВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФИНАНСОВЫХ ДЕРИВАТИВОВ НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

П.М. Лаппо

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
lapporm@bsu.by

Классическая безарбитражная теория оценивания на полном рынке основана на возможности построения воспроизводящего (хеджирующего) портфеля для оцениваемого дериватива. Модель безарбитражного рынка является полной тогда и только тогда, когда существует единственная риск-нейтральная вероятностная мера [3]. В случае неполного рынка существуют различные подходы (см., например, [1]). В работе [2] предпринята попытка аппроксимации неполного рынка полным с использованием модели фиктивного полного рынка, на котором стоимость рискованной ценной бумаги может принимать только два значения. В [2] случайные величины относительных приращений стоимостей ценных бумаг предполагались независимыми. Однако, как показывают статистические тесты, гипотеза о независимости относительных приращений подтверждается далеко не всегда. Например, это не выполняется для ряда акций российских компаний.

В настоящей работе относительные приращения стоимостей ценных бумаг за различные периоды предполагаются, в отличие от работы [2], случайными величинами, образующими цепь Маркова. Такая модель носит название марковской биномиальной модели. Она рассматривалась в ряде работ (см. например, [4, 5]). Для данной модели соответствующая риск-нейтральная мера зависит от безрисковой процентной ставки, значений случайных величин, коэффициента корреляции между соседними относительными приращениями и от того, в каком состоянии находится цепь Маркова. В докладе приводятся результаты использования такой модели в качестве аппроксимирующей для оценки опционов на акции некоторых российских компаний. При этом для выбора параметров модели использовались квадратичный критерий и эмпирические распределения. Результаты расчетов показывают, что за счет учета корреляции между относительными приращениями удается уменьшить среднеквадратическую ошибку оценки функции выплат по сравнению со случаем независимых приращений. Полученные результаты могут быть полезными для участников биржевых торгов и лиц, принимающих инвестиционные решения.

Литература

1. Staum J. *Incomplete Markets* // Handbooks in OR and MS. Vol. 15. Elsevier B.V., 2008. P. 511–563.
2. Lappo P., and Zuev N. *Derivatives Pricing in Incomplete Markets*. In: Transactions of the 29th International Congress of Actuaries, 2010. www.ica2010.com, 10 p.

3. Panjer H. H. et al. *Financial Economics: With applications to Investments, Insurance and Pensions*. Schaumburg, 1998. 670 p.

4. Radkov P., and Minkova L. *Markov-Binomial Option Pricing Model*. In: Proceedings of the International Conference CDAM'2010. Vol. 2. 2010. P. 169–174.

5. Omev E., Santos J, and Guick S. *A Markov-binomial distribution // Applicable Analysis and Discrete Mathematics*. Vol. 2. P. 38–50.

ИНВАРИАНТНОСТЬ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЙ СЕТИ С ВРЕМЕННО НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ

Ю.В. Малинковский, Ю.С. Боярович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
malinkovsky@gsu.by, juls1982@list.ru

Введение. В настоящее время большой интерес для исследователей представляют сети массового обслуживания с временно неактивными заявками. Заявки в таких сетях делятся на два класса. Первые могут получать обслуживание, вторые являются неактивными и не обслуживаются, скапливаясь в очередях узлов. Неактивные заявки можно интерпретировать, как заявки, имеющие некоторый дефект, делающий их непригодными для обслуживания. В [1] исследована открытая сеть с неактивными заявками: установлен вид стационарного распределения состояний в предположении, что длительности обслуживания заявок распределены по экспоненциальному закону. В настоящей работе устанавливается инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний по отношению к функциональной форме распределений длительностей обслуживания заявок при фиксированных первых моментах.

Инвариантность стационарного распределения вероятностей состояний. Рассматривается открытая сеть с множеством узлов $J = \{1, \dots, N\}$. Все заявки в сети подразделяются на обыкновенные, которые могут получать обслуживание, и неактивные. В узлы сети поступают независимые пуассоновские потоки заявок с интенсивностями λ_i , информационных сигналов с интенсивностями ν_i и φ_i , $i \in J$. Поступивший в i -й узел с интенсивностью ν_i сигнал уменьшает количество обыкновенных заявок (в случае их наличия) на единицу и увеличивает на единицу количество неактивных заявок; поступивший в i -й узел с интенсивностью φ_i сигнал уменьшает на единицу количество неактивных заявок (в случае их наличия), увеличивая на единицу число обыкновенных заявок $i \in J$. Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $z(t) = ((n_1(t), n'_1(t)), \dots, (n_N(t), n'_N(t)))$, где $n_i(t)$ и $n'_i(t)$ — число обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i -м узле в момент времени t , $i \in J$. $z(t)$ обладает фазовым пространством $Z = \{((n_1, n'_1), \dots, (n_N, n'_N)) \mid n_i, n'_i \geq 0, i \in J\}$. Длительность обслуживания заявки в i -м узле — случайная величина с произвольной функцией распределения $B_i(n_i + n'_i, x_{n_i + n'_i})$ и математическим ожиданием $1/\mu_i$, $i \in J$. Дисциплина обслуживания — *LSFS – PR*. Заявка, обслуженная в i -м узле, мгновенно с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в j -й узел, а с вероятностью $p_{i,0}$ покидает сеть ($i, j \in J$, $\sum_{j \in J} p_{i,j} + p_{i,0} = 1$).

Теорема. При выполнении условий $\varepsilon_i < \mu_i$, $\varepsilon_i \nu_i < \mu_i \varphi_i$, $i \in J$, процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение состояний $\{p(z), z \in Z\}$ не зависит от функционального вида распределений $B_i(s, x)$, $i \in J$ и имеет вид

$$p(z) = p_1(n_1, n'_1) p_2(n_2, n'_2) \dots p_N(n_N, n'_N),$$

где

$$p_i(n_i, n'_i) = \left(\frac{\varepsilon_i \nu_i}{\varphi_i \mu_i} \right)^{n'_i} \left(\frac{\varepsilon_i}{\mu_i} \right)^{n_i},$$

ε_i — единственное положительное решение системы уравнений трафика:

$$\varepsilon_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^N \varepsilon_j p_{j,i}, \quad i \in J.$$

Литература

1. Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A. *Distributions in stochastic network models*. Nova Publishers, 2008.
2. Инвинций В. А. *Об условии инвариантности стационарных вероятностей для сетей массового обслуживания*. Теория вероятностей и ее применения. 1982. Т. 27, № 1. С. 188–192.

ЗАМКНУТАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ВРЕМЕННО НЕАКТИВНЫМИ ЗАЯВКАМИ И ОБХОДАМИ УЗЛОВ

Л.Н. Марченко, Ю.С. Боярович

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
lmarchenko@gsu.by, juls1982@list.ru

Введение. В теории массового обслуживания актуальна проблема исследования надежности обслуживающих узлов. Однако не только обслуживающие узлы могут выходить из строя. Свои качественные характеристики могут терять и поступающие в узел заявки. В этом отношении интересным является класс сетей с временно неактивными заявками. Заявки в таких сетях делятся на обыкновенные, которые могут обслуживаться и неактивные, которые не обслуживаются, скапливаясь в очередях узлов. Неактивные заявки можно интерпретировать, как заявки, имеющие дефект, делающий их непригодными для обслуживания.

Сети с обходами заявок узлов впервые были введены Ю. В. Малинковским [1]. В таких сетях заявки, поступающие в узлы могут с некоторой вероятностью обходить узлы сети и вести себя в дальнейшем как обслуженные. В настоящей работе исследовано стационарное функционирование замкнутой сети массового обслуживания с временно неактивными заявками и обходами узлов. Установлен вид стационарного распределения вероятностей состояний.

Замкнутая сеть с временно неактивными заявками и обходами узлов. Рассматривается замкнутая сеть с множеством узлов $J = \{1, \dots, N\}$. В сети циркулируют M заявок. Заявки в сети подразделяются на обыкновенные, которые могут обслуживаться, и неактивные. В узлы сети извне поступают независимые пуассоновские потоки информационных сигналов с интенсивностями ν_i , φ_i , $i \in J$. Поступивший в i -й узел с интенсивностью ν_i сигнал уменьшает число обыкновенных заявок (в случае их наличия) на единицу и увеличивает на единицу число неактивных; поступивший в i -й узел с интенсивностью φ_i сигнал уменьшает на единицу число неактивных заявок (в случае их наличия), увеличивая на единицу число обыкновенных заявок, $i \in J$. Обслуживание — экспоненциальное с параметром μ_i , $i \in J$. Заявка, обслуженная в узле i с вероятностью $p_{i,j}$ переходит в узел j , ($\sum_{j \in J} p_{i,j} = 1$). Поступающая в узел $i \in J$ заявка, с вероятностью f_i присоединяется к очереди, а с вероятностью $1 - f_i$ мгновенно обходит узел и ведет себя в дальнейшем как обслуженная. Состояние сети характеризуется вектором $z(t) = ((n_1(t), n'_1(t)), \dots, (n_N(t), n'_N(t)))$, где $n_i(t)$ и $n'_i(t)$ — число обыкновенных и соответственно неактивных заявок в i -м узле в момент времени t . $z(t)$ — марковский процесс с фазовым пространством $Z = \{((n_1, n'_1), \dots, (n_N, n'_N)) \mid n_i, n'_i \geq 0, \sum_{i \in J} (n_i + n'_i) = M\}$.

Теорема. Процесс $z(t)$ эргодичен, а его стационарное распределение вероятностей состояний $\{p(z), z \in Z\}$ имеет вид

$$p(z) = \frac{1}{G(M, N)} p_1(n_1, n'_1) \dots p_N(n_N, n'_N), \quad p_i(n_i, n'_i) = \left(\frac{f_i \varepsilon_i}{\mu_i} \right)^{n_i} \left(\frac{f_i \varepsilon_i \nu_i}{\mu_i \varphi_i} \right)^{n'_i},$$

где ε_i — единственное с точностью до постоянного множителя положительное решение системы уравнений трафика

$$\varepsilon_j = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i p_{i,j}, \quad j \in J.$$

Здесь $G(M, N)$ — нормирующая константа, находящаяся из условия $\sum_{z \in Z} p(z) = 1$.

Литература

1. Малинковский Ю. В. *Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками*. Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 102–110.
2. Tsitsiashvili G. Sh., Osipova M. A. *Distributions in stochastic network models*. Nova Publishers, 2008.

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ СЕТЕЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВРЕМЕНЕМ ОЖИДАНИЯ ЗАЯВОК И НЕНАДЕЖНЫМ ОБСЛУЖИВАНИЕМ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

М.А. Маталыцкий, С.Э. Статкевич

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
m.matalytski@gmail.com, sstat@grsu.by

В докладе рассматриваются разработанные методы и методики нахождения вероятностно-стоимостных характеристик, оптимизации затрат в сетях массового обслуживания (МО) с ограниченным временем ожидания заявок в очередях и ненадежными СМО в переходном режиме, применяемых в качестве стохастических моделей различных информационно-телекоммуникационных систем и сетей.

Особое внимание уделено: а) методике нахождения с помощью аппарата многомерных производящих функций вероятностных характеристик экспоненциальных сетей МО, когда параметры входящего потока, обслуживания и пребывания заявок в очереди, восстановления линий обслуживания зависят от времени, а сети функционируют в условиях высокой нагрузки [1, 2]; б) разработанному рекуррентному по моментам времени методу для замкнутых сетей с ограниченным временем ожидания заявок, позволяющему находить их средние характеристики в случае, когда времена обслуживания заявок в линиях СМО распределены по произвольным законам; в) использованию его при решении задач оптимизации таких сетей [3]; г) асимптотическому анализу замкнутой марковской сети с ненадежными СМО, с помощью которого можно находить распределение вероятностей состояний и вероятностно-временные характеристики сети при большом числе обслуживаемых в ней заявок [4].

Рассматривается также методика нахождения ожидаемых доходов в системах НМ-сетей с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием в случаях, когда доходы от переходов между их состояниями являются детерминированными функциями, зависящими от состояний сети и времени или случайными величинами с заданными моментами первого и второго порядков [5]. Методика основана на получении и решении систем разностно-дифференциальных уравнений для ожидаемых доходов СМО сетей и использовании найденных выражений для средних значений случайных доходов.

Рассмотрено применение полученных результатов при разработке моделей и программного обеспечения для расчета характеристик автоматизированных систем документооборота и при прогнозировании доходов пунктов коллективного пользования РУП «Белтелеком».

Литература

1. Статкевич С.Э. *Анализ сети массового обслуживания с ограниченным временем ожидания заявок в переходном режиме* // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2011. №3. С. 97–110.
2. Matalytski M., Statkevich S. *Time-depend state probabilities of queueing network with unreliable systems in transient regime* // Scientific Research of the Institute of Mathematics of Czestochowa University of Technology. 2011. Vol. 2, №10. P. 175–187.
3. Статкевич С.Э., Матальцкий М.А. *Оптимизация замкнутых сетей с ограниченным временем ожидания заявок в переходном режиме* // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2012. №1. С. 134–142.
4. Статкевич С.Э., Русилко Т.В. *Асимптотический анализ марковской сети с ненадежными системами обслуживания* // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2011. №1. С. 87–95.
5. Matalytski M., Statkevich S. *Investigation of HM-network with unreliable queueing systems and random incomes* // Scientific Research of the Institute of Mathematics of Czestochowa University of Technology. 2010. Vol. 2. №9. P. 173–192.

**ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ
УРАВНЕНИЯМИ АВТОРЕГРЕССИИ**

Ю.В. Меленец

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
melene@tut.by

Пусть $\{X_t, t = 1, 2, \dots\}$ — нестационарный случайный процесс, математическое ожидание и ковариации которого ограничены и являются периодическими функциями. Рассмотрим две возможности описания и исследования такого процесса уравнениями авторегрессии. В первом случае рассмотрим уравнение авторегрессии вида

$$X_t = \sum_{k=1}^n a_k X_{t-k} + \xi_t, \quad (1)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n — постоянные коэффициенты, $a_n \neq 0$, $n > 1$, $\xi_t, t = 1, 2, \dots$, — стационарная последовательность случайных величин с $M\xi_t = 0$ и корреляционной функцией $R(\tau)$, удовлетворяющей условию $\sum_{\tau=0}^{\infty} |R(\tau)| < +\infty$. Уравнение $\sum_{m=0}^n a_m x^{n-m} = 0$ назовем характеристическим уравнением авторегрессии (1). Доказана следующая

Теорема. Пусть среди n различных корней характеристического уравнения имеется s пар комплексно-сопряженных корней с модулями, равными единице, и аргументами ϕ_k , $1 \leq k \leq s$, $2s \leq n$. Пусть модули оставшихся $n - 2s$ корней меньше единицы. Для того, чтобы уравнению (1) удовлетворял временной ряд с ограниченной при $t \rightarrow \infty$ дисперсией, необходимо и достаточно выполнение условий $g(\phi_k) = 0$, $1 \leq k \leq s$, где $g(z)$ есть спектральная плотность последовательности ξ_t .

Во втором случае рассмотрим уравнение авторегрессии, параметры которой являются периодическими функциями:

$$X_t = \sum_{k=1}^n a_k(t) X_{t-k} + \xi_t, \quad (2)$$

где $\xi_t, t = 1, 2, \dots$ — нестационарная последовательность независимых случайных величин с $M\xi_t = 0$, $D\xi_t = \sigma_t^2$, $\sigma_\tau^2 = \sigma_{\tau+jT}^2$, $a_k(\tau) = a_k(\tau + jT)$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq \tau \leq T$, $j = 1, 2, \dots$, T — натуральное число, имеющее смысл периода. Предполагается, что период T известен,

и рассмотрена задача оценивания nT коэффициентов $a_k(\tau)$, $1 \leq k \leq n$, $1 \leq \tau \leq T$, T дисперсий σ_τ^2 , $1 \leq \tau \leq T$, и исследования свойств полученных оценок.

Применялся метод максимального правдоподобия. Используя свойства периодичности параметров $\{a_k(\tau), \sigma_\tau^2\}$ уравнения (2), получено, что задача оценивания совокупности этих параметров распадается на T однотипных задач. При фиксированном значении τ , $1 \leq \tau \leq T$, оценки коэффициентов $a_k(\tau)$, $1 \leq k \leq n$, найдены как решение задачи

$$\sum_{j=1}^{m_\tau} \left(x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^n a_k(n+\tau) \cdot x_{n+\tau+(j-1)T-k} \right)^2 \rightarrow \min_{\{a_k(\tau)\}},$$

а дисперсия $\sigma_{\tau+n}^2$ по найденным оценкам $\hat{a}_k(\tau)$ определяется по следующей формуле:

$$\sigma_{\tau+n}^2 = \frac{1}{m_\tau - 1} \sum_{j=1}^{m_\tau} \left(x_{n+\tau+(j-1)T} - \sum_{k=1}^n \hat{a}_k(n+\tau) \cdot x_{n+\tau+(j-1)T-k} \right)^2.$$

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ОБНАРУЖЕНИЯ РАЗЛАДКОВ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОПУЛ

В.А. Морозов

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
vamorozov70@gmail.com

Введение. Традиционно для описания зависимости между случайными величинами используется корреляция Спирмена. Известно, однако, что такой подход удовлетворителен только при условии нормальности переменных или, если их распределение принадлежит классу эллиптических. В тоже время известно, что распределения финансовых данных существенно асимметричны. В последние годы наблюдается количественный рост статей по методам, использующим копула [1–3].

Последовательные алгоритмы. Если многомерная функция распределения n раз дифференцируема, то плотность распределения можно представить в виде

$$f(x) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i),$$

где

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$

— плотность d -мерной копулы $C(u_1, \dots, u_d)$.

Пусть дана выборка независимых одинаково распределенных случайных векторов размерности d . Рассматривается простейший случай единственного изменения параметров плотности распределения. Требуется оценить момент разладки. Исследовался последовательный алгоритм обнаружения разладки на основе кумулятивных сумм

$$S_t = \sum_{k=1}^t s_k,$$

где s_k — некоторая статистика.

В качестве статистики использовались:

— статистика, основанная на логарифме псевдоотношения правдоподобия, в которой истинные плотности заменяются копула плотностями;

— статистика, основанная на расстоянии между распределениями, определяемом аналогом дивергенции Кульбака.

Результаты численных экспериментов показали возможность использования копул для оценивания моментов разладки временных рядов.

Литература

1. Embrecht P. M. E., McNeil A. J., Straumann D. *Correlation and dependency in risk management: Properties and pitfalls. Risk management : Value at Risk and Beyond*. Cambridge University Press, 2002.
2. Remillard B., Scaillet O. *Математические методы оптимального управления*. М.: Наука, 1966.
3. Frees E. W., Valdez E. A. *Understanding relationships using copulas* // North American Actuarial Journal. 1998. No. 2(1).

АНАЛИЗ СЕТИ С ВЕРОЯТНОСТЯМИ ОБХОДОВ ЗАЯВОК, СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВРЕМЕНИ

В.В. Науменко¹, М.А. Матальцкий²

¹ Гродненский филиал РУП «Белтелеком»
Горького 87а, 230009 Гродно, Беларусь
victornn86@gmail.com

² Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
m.matalytski@gmail.com

В настоящее время значительное развитие получили информационные телекоммуникационные системы и сети (ИТСС). Широко стоит вопрос о справедливом и полном удовлетворении требований их пользователей. На практике часто возникают ситуации, когда пользователь, направляющий запрос в узел ИТСС, оценивает, сколько времени ему придется ожидать или сколько запросов пользователей находится перед ним в очереди, и, в зависимости от этой оценки остается ожидать либо пересылает свой запрос в другой узел ИТСС. Такая ситуация, к примеру, может возникнуть в сервисных пунктах или пунктах коллективного пользования (ПКП). Клиент, приходя в один из ПКП, оценивает, сколько времени ему необходимо будет ожидать в очереди и принимает решение перейти к другому свободному оператору для обслуживания своего запроса, или же к оператору с наименьшей очередью клиентов. Клиент также может уйти из этого ПКП в другой.

В качестве вероятностных моделей таких объектов могут служить сети массового обслуживания (МО) с обходами систем обслуживания (СМО) заявками. Для снижения загруженности СМО и более равномерного распределения нагрузки в сети могут быть использованы различные приемы, один из которых — введение вероятностных обходов СМО заявками. Такая модель, в частности, позволяет учитывать ограничения на число заявок или на предполагаемые длительности ожидания заявок в СМО, а также ограничения на прием заявок, приходящих из определенных других СМО.

Заявки с некоторой вероятностью присоединяются к очереди СМО, а с дополнительной вероятностью мгновенно переходят в соответствии с матрицей вероятностных переходов в другую СМО или покидают сеть. Вероятность присоединения к СМО зависит от состояния этой СМО, и номера СМО, из которой заявка направляется в эту СМО. Поступающий в сеть поток заявок — простейший. Результаты по исследованию таких сетей в стационарном режиме приведены в работах [1–3]. В работе [4] рассматривался случай, когда вероятности

обходов заявок системам сети не зависят от состояния сети и времени. Найдены вероятности состояний сети такого типа в переходном режиме. Для нахождения вероятностей состояний сети использовался метод многомерных производящих функций.

В докладе рассмотрено исследование открытой экспоненциальной сети МО с обходами систем обслуживания заявками в переходном режиме в случае, когда вероятности переходов и обходов заявок между системами сети зависят от времени с помощью аппарата многомерных производящих функций. Найдены вероятности состояний сети такого типа в переходном режиме.

Литература

1. Ивницкий В. А. *Теория сетей массового обслуживания*. М.: Физматлит, 2004.
2. Малинковский Ю. В. *Сети массового обслуживания с обходами узлов заявками* // Автоматика и телемеханика. 1991. № 2. С. 102–110.
3. Матальцкий М. А., Тихоненко О. М., Колузаева Е. В. *Теория массового обслуживания и ее применение*. Гродно, 2011.
4. Matalytski M., Naumenko V. *Analysis of queueing network with messages bypass of systems in transient behavior* // Scientific Research of the Institute of Mathematics and Computer Science Czestochowa University of Technology. 2012. Vol. 11. № 2.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОЦЕНИВАНИЮ ПАРАМЕТРОВ КОПУЛ

А.И. Новик

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
NovikHanna@mail.ru

Введение. Целью работы является оценивание параметров копул на основе параметрического подхода. Проведено моделирование двумерного распределения и оценивание параметров копул, используя пакет R.

В последнее время особое внимание уделяется моделям копул, позволяющим из многомерного распределения получить маргинальные распределения и исследовать их зависимость. Пусть $f_X(x), f_Y(y)$ — маргинальные плотности распределения вероятностей для выборок независимых одинаково распределенных случайных последовательностей $X = \{x_1, x_2, \dots, x_T\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ с совместной функцией распределения $F_{XY}(x, y)$, маргинальными функциями распределения $F_X(x), F_Y(y)$. Плотность копулы определяется по формуле

$$c(F_X(x), F_Y(y)) = \frac{\partial^2 C(F_X(x), F_Y(y))}{\partial F_X(x) \partial F_Y(y)}.$$

Совместную плотность распределения $f_{XY}(x, y)$ можно представить в виде

$$f_{XY}(x, y) = c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y).$$

Основным методом оценки параметров копул является метод максимального правдоподобия. Логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln c(F_X(x_t), F_Y(y_t)) + \sum_{t=1}^T \ln(f_X(x_t) f_Y(y_t)).$$

Согласно методу максимального правдоподобия, в качестве оценки неизвестного параметра θ принимается такое значение $\hat{\theta}$, которое максимизирует функцию $l(\theta)$, т. е. оценка $\hat{\theta}$ является точкой максимума логарифмической функции правдоподобия: $\hat{\theta} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta)$.

Оценка, построенная по методу максимального правдоподобия, является состоятельной, асимптотически эффективной и асимптотически нормальной:

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta_0) \rightarrow N(0, \mathfrak{I}^{-1}(\theta_0)),$$

где θ_0 — точное значение параметра, $\mathfrak{I}(\theta_0)_{x,y} = E[\partial_x L(\theta_0) \partial_y L(\theta_0)]$ — информационная матрица Фишера.

В статистическом пакете R для сгенерированных по нормальному закону распределения двух последовательностей построены копулы Клейтона, Гумбеля и Франка. По методу максимального правдоподобия рассчитаны оценки параметров копул. Вычисленная среднеквадратическая ошибка указывает, что на основании исследуемого метода построены достаточно точные оценки параметров копул.

Литература

1. Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W. *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons Ltd., 2004.
2. Novik A., Trough N. *Construction of copula models*. // Modeling and Simulation (MS 2012). Proceedings of the International Conference 2–4 May 2012, Minsk, Belarus. P. 148–151.

О ПРИМЕНЕНИИ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ ЗАЯВОК КЛИЕНТОВ В СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ

Т.В. Русилко

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, факультет математики и информатики
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
romaniuk@grsu.by

Процесс обработки потоков заявок клиентов, поступающих в страховую компанию (СК), включает следующие этапы: заключения договора страхования, «ожидания», оценки предъявленного иска и оплаты. На каждом из этапов обслуживания задействовано определенное число сотрудников СК, обрабатывающих заявки с определенной интенсивностью, которая зависит от времени. Число заключенных договоров также меняется в течение времени и описывается случайным процессом [1]. Естественной является задача определения необходимого на данном интервале времени числа сотрудников СК, максимизирующего доход компании при ограничениях на среднюю длину очередей на этапах обслуживания.

При моделировании процессов обработки заявок предлагается использовать замкнутую экспоненциальную сеть массового обслуживания, каждая из систем которой соответствует определенному этапу обработки заявки клиента. Данная сеть исследуется в асимптотическом случае большой загрузки, когда число клиентов страховой компании достаточно велико. Используя методику диффузионной аппроксимации можно получить дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных для плотности распределения вероятностей вектора состояния сети, и затем ряд средних характеристик сети [2]. Например, компоненты вектор среднего относительного числа заявок в каждой из систем сети и дисперсий этих величин удовлетворяют системам обыкновенных дифференциальных уравнений, определяемым структурой сети и ее параметрами функционирования. Определив средние характеристики сети можно формулировать и решать ряд оптимизационных задач, которые сводятся к задачам линейного программирования.

Актуальной является также задача прогнозирования дохода страховой компании. Очевидно, что доход СК связан с получением премий от клиентов при заключении договоров страхования, а расход обусловлен выплатой по искам и затратами на обслуживание клиентов. Состояние сети, используемой в качестве модели процесса обработки заявок клиентов, описывается марковским случайным процессом. Поэтому вводится в рассмотрение понятие дохода от изменения состояния сети и пребывания заявки в каждом из состояний. Применяя теорию марковских процессов с доходами, можно получить дифференциальные уравнения для прогнозирования среднего ожидаемого дохода СК.

Таким образом, сети массового обслуживания могут быть применены при анализе, прогнозировании и оптимизации процесса функционирования страховых компаний.

Литература

1. Русилко Т. В. *Исследование стохастической модели обработки заявок клиентов в страховой компании с зависимыми от времени параметрами обслуживания* // Весн. Гродзенскага дзярж. ўн-та імя Я. Купалы. Сер. 2. 2011. № 3. С. 167–174.

2. Матальцкий М. А., Русилко Т. В. *Математический анализ стохастических моделей обработки исков в страховых компаниях*. Гродно: ГрГУ, 2007.

ПРИМЕНЕНИЕ ФАКТОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ В АНАЛИЗЕ ФОРВАРДНЫХ СТАВОК

Т. В. Самаль

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
solesytto@mail.com

При практическом использовании математических результатов инвесторами финансового рынка большую роль играют так называемые кривые доходности и форвардные кривые. Кривые доходности — это функции, значениями которых являются процентные ставки доходности до погашения так называемых безкупонных облигаций, а аргументами — сроки до погашения. Поскольку речь здесь идет об облигациях, выпускаемых национальными банками или государственными казначействами, их доходности являются отправными точками для формирования доходностей других ценных бумаг финансового рынка. Это и определяет важность этих функций. Форвардные кривые являются функциями, значениями которых являются ожидаемые величины так называемых краткосрочных процентных ставок в будущие моменты времени, например, в даты погашения безкупонных облигаций. Краткосрочные процентные ставки (спот ставки) являются основным инструментом для принятия финансовых решений в текущий момент времени. Совокупность кривых доходности и форвардных кривых определяют так называемую временную структуру процентных ставок. Важность этих функций для инвесторов является побудительным мотивом для разработки математических моделей кривых доходностей. Среди различных моделей наиболее популярной является так называемая аффинная временная структура доходностей, в рамках которой можно получать результаты в аналитическом виде. Простота ее определяется также тем, что доходность в рамках этой структуры линейно связана с краткосрочной процентной ставкой. Для получения аффинной временной структуры доходностей предполагается, что динамика краткосрочной процентной ставки $r(t)$ задается стохастическими дифференциальными уравнениями [1]

$$dX(t) = \mu(X(t)) dX + \sigma(X(t)) dW(t),$$

где $X(t)$ — вектор переменных состояния финансового рынка, где первой компонентой является $r(t)$, а следующими компонентами — показатели рынка, которые выбираются в зависимости от того, какая модель конструируется. В двухмерной модели мы будем выбирать в качестве второй компоненты локальное по времени среднее краткосрочной процентной ставки $\theta(t)$, а в трехмерной модели третьей компонентой будет мгновенная дисперсия краткосрочной процентной ставки $\nu(t)$. Функция дрейфа $\mu(X(t))$ — аффинная относительно $X(t)$, а коэффициент диффузии $\sigma(X(t))^T \sigma(X(t))$ — также аффинная функция относительно $X(t)$. При этих условиях в текущий момент времени t доходность до погашения в момент времени T , $\tau = T - t$, для трехмерной модели выражается в виде $y(t, r, \theta, \nu) = (rB_1(\tau) + \theta B_2(\tau) + \nu B_3(\tau) - A(\tau))/\tau$, где функции временной структуры $B_1(\tau)$, $B_2(\tau)$, $B_3(\tau)$, $A(\tau)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая, например в модели Чена имеет вид:

$$A'(\tau) = -\alpha - B_1(\tau)(k_1\theta_1 - k_2\theta_2) - k_2\theta_2 B_2(\tau) - k_3\theta_3 B_3(\tau), \quad A(0) = 0,$$

$$B_1'(\tau) = 1 - k_1 B_1(\tau), \quad B_1(0) = 0,$$

$$B_2'(\tau) = 1 + k_1 B_1(\tau) - k_2 B_2(\tau) - \frac{\sigma_{22}^2(\tau) B_2^2(\tau)}{2}, \quad B_2(0) = 0,$$

$$B_3'(\tau) = 1 - k_3 B_3(\tau) - \frac{B_1^2(\tau)}{2} - \frac{\sigma_{33}^2(\tau) B_3^2(\tau)}{2}, \quad B_3(0) = 0.$$

Для двухмерной модели нужно положить равной нулю функцию $B_3(\tau)(t)$, а для наиболее простой и чаще других встречающейся однофакторной модели нулю полагаются функции $B_2(\tau)$ и $B_1(\tau)$. Форвардная кривая в этом случае выражается в виде $f(\tau, r, \theta, \nu) = [rB_1(\tau) + \theta B_2(\tau) + \nu B_3(\tau) - A(\tau)]'$, где штрих означает производную по τ . Предметом исследования является сравнительный анализ кривой доходности и форвардной кривой на всем множестве значений $\tau \in (0; \infty)$. Для этого вместо интервалов реального времени τ удобно использовать переменную $B \equiv B_1(\tau)$ — функцию временной структуры, связанную с краткосрочной процентной ставкой r (фактически эта функция отображает положительную полуось на конечный интервал $(0; B_1(\infty))$, являясь неотрицательной монотонно возрастающей). В отличие от ожидания специалистов, что увеличение размерности модели приводит к более совершенному моделированию истинной временной структуры, численные эксперименты показали, что увеличение размерности модели на форму кривой доходности и форвардной кривой влияет довольно слабо, однако приводит к существенному усложнению задачи.

Литература

1. Медведев Г. А. *Стохастические процессы финансовой математики*. Мн.: БГУ, 2005.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОЙФЛЕТ-ОЦЕНКИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

Н.В. Семенчук, А.Г. Дейцева

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Ожешко 22, 230012 Гродно, Беларусь
senata155@gmail.com

Рассмотрим койфлет-оценку спектральной плотности для стационарного случайного процесса

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{J}{2}}} \sum_{k=1}^{2^J} I_T^{(h)} \left(\frac{2\pi k}{2^J} \right) \tilde{\varphi}_{J,k}(\lambda), \quad (1)$$

где $I_T^{(h)}(\lambda)$ — расширенная периодограмма с некоторым фиксированным окном просмотра данных с ограниченной вариацией [1], $\tilde{\varphi}_{J,k}(\lambda)$ — 2π -периодическая масштабирующая функция, построенная путем периодизации масштабирующей функции Койфмана [2], $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $J = J(T)$ — уровень разложения, зависящий от числа наблюдений T за стационарным случайным процессом.

Теорема 1. *Если спектральная плотность $f(\lambda)$ ограничена на Π и удовлетворяет условию Дини [3] в точке λ , $\lambda \in \Pi$, тогда оценка $\hat{f}(\lambda)$, определяемая формулой (1), является асимптотически несмещенной оценкой $f(\lambda)$:*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M\hat{f}(\lambda) = f(\lambda).$$

Теорема 2. *Если спектральная плотность $f(\lambda)$ ограничена на Π и удовлетворяет условию Дини [3] в точках $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$, семинвариантная спектральная плотность четвертого порядка равномерно непрерывна и ограничена на Π^3 , то*

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}(\hat{f}(\lambda_1), \hat{f}(\lambda_2)) = 0,$$

при $2^J \leq KT^{1-\rho}$, где $0 < \rho < 1$, $0 < K < \infty$ — произвольные, но фиксированные константы.

Полученные в теоремах 1 и 2 результаты доказывают асимптотическую состоятельность в среднеквадратическом смысле оценки (1) при более слабом условии, накладываемом на характер спектральной плотности по сравнению с работами [4, 5].

Литература

1. Труш Н. Н. *Асимптотические методы статистического анализа временных рядов*. Мн.: БГУ, 1999.
2. Добеши И. *Десять лекций по вейвлетам*. Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
3. Колмогоров А. Н. *Элементы теории функций и функционального анализа*. М.: Физматлит, 2004.
4. Семенчук Н. В. *Асимптотические свойства вейвлетной оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса* // Вестн. ГрГУ им. Я. Купалы. Сер. 2. 2007. № 3. С. 30–39.
5. Neumann M. H. *Spectral density estimation via nonlinear wavelet methods for stationary non-Gaussian time series* // J. Time Ser. Anal. 1996. Vol. 17, № 6. P. 137–166.

СИСТЕМА МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СМЕШАННОЙ ДИСЦИПЛИНОЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ И АДАПТИВНЫМИ ОТДЫХАМИ

Ю.В. Синюгина¹, А.Н. Дудин²

¹ Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
Советская 104, 246019 Гомель, Беларусь
jvlie@mail.ru

² Белгосуниверситет, НИЛ прикладного вероятностного анализа
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
dudin@bsu.by

Системы массового обслуживания с отдыхами прибора (для ссылок см. [1]), моделируют, например, процесс обслуживания запросов пользователей систем с циклическим опросом (поллинговые системы), а такие системы распространены так математические модели систем обработки запросов от удаленных пользователей, например, станций сетей беспроводных сетей связи, пунктов концентрации запросов в распределенных базах данных, банковских системах и т. д. Изначально, при исследовании систем обслуживания с отдыхами

предполагалось, что прибор берет отдых, когда опустошается входной буфер. Однако, для анализа поллинговых систем актуальным оказалось изучение дисциплин, при которых время непрерывной работы прибора принудительно ограничивается (шлюзовые дисциплины, дисциплины с ограничением на время работы или число обслуженных подряд запросов). В данной работе изучается система со специфическим гибридным механизмом обслуживания, сочетающим достоинства исчерпывающего (exhaustive) механизма, предполагающего обслуживание запросов до тех пор, пока очередь не опустеет, и шлюзового (gated) механизма обслуживания запросов, при котором в данном цикле обслуживаются только те запросы, которые находились в очереди в момент окончания отдыха прибора.

Рассматривается однолинейная система с бесконечным буфером. На вход поступает стационарный пуассоновский поток заявок с параметром λ . Дисциплина обслуживания запросов следующая. В каждом цикле обслуживания (начинающемся в момент окончания отдыха) с вероятностью q выбирается шлюзовый механизм обслуживания запросов, а с вероятностью $(1 - q)$ выбирается исчерпывающий механизм. Время обслуживания запроса при исчерпывающем (шлюзовом) механизме имеет функцию распределения $B_g(t)$ ($B_e(t)$). При исчерпывающем обслуживании, как только очередь оказывается пустой, прибор уходит на отдых, длительность которого характеризуется функцией распределения $H_e(t)$. При шлюзовом обслуживании прибор, обслуживший все запросы, находившиеся в системе в момент начала цикла обслуживания, уходит на отдых, длительность которого характеризуется функцией распределения $H_g(t)$. По окончании отдыха прибор возвращается в систему и, если очередь не пуста, происходит очередной розыгрыш выбора дисциплины и начинается обслуживание запросов. В случае, если очередь оказывается пустой, прибор уходит на отдых специального типа, длительность которого характеризуется функцией распределения $\tilde{H}(t)$.

Рассматриваемая система массового обслуживания исследуется в несколько этапов. Сначала строится и анализируется цепь Маркова, вложенная по моментам окончания отдыхов прибора — доказываются условия эргодичности и приводится алгоритм для вычисления стационарного распределения вероятностей состояний цепи. Затем, с использованием техники renewal reward processes, описанной в [2], находится стационарное распределение вероятностей состояний системы в моменты окончания обслуживания запросов. Далее, используется теория процессов восстановления, см., например, [3], для нахождения стационарного распределения вероятностей состояний системы в произвольный момент времени.

Литература

1. Takagi H. *Queueing Analysis: A Foundation of Performance Evaluation*. North-Holland, 1991.
2. Heyman D. P., Sobel M. J. *Stochastic Models in Operations Research*. N.Y.: McGraw-Hill, 1982.
3. Cinlar E. *Introduction to stochastic process*. N.J.: Prentice-Hall, 1975.

О МОДЕЛЯХ СЕТЕВОГО ТРАФИКА, ОСНОВАННЫХ НА α -УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ

Т.В. Соболева, Н.Н. Труш

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
soboleva@bsu.by

В современных компьютерных сетях появилась возможность широкого использования IP-телефонии, потокового видео, видео по требованию, web-сервисов, интернет радио и т. д. Такое количество сервисов в одном физическом канале может приводить к перегрузке коммутирующих и маршрутизирующих устройств, а как следствие, возможному отказу в предоставлении услуг. Кроме того, ввиду отказов оборудования, неверных их конфигураций, сетевые атаки (например, атаки DDoS) могут приводить к аномалиям сетевого трафика. Аномалия сетевого трафика — это событие или условие в сети, характеризующее статистическим

отклонением от стандартной структуры трафика, полученной на основе ранее заданных профилей и контрольных характеристик. Любое отличие в структуре трафика, превышающее пороговое значение, свидетельствует о наличии аномалии. В связи с выше изложенным, актуальной становится задача разработок моделей трафика, которые отражали бы его характерные особенности, и способствовали в дальнейшем повышению качества обслуживания компьютерных сетей, обеспечению эффективного контроля и управления информационными потоками, безопасности компьютерных сетей от различных видов сетевых атак.

Исследование различных типов сетевого трафика показывает, что он обладает тремя важными особенностями:

- 1) имеет тяжелые хвосты распределений вероятностей;
- 2) является самоподобным;
- 3) обладает свойством долговременной зависимости.

Из этого следует, что используемые методы моделирования и расчета сетевых систем, основанные на использовании пуассоновской и гауссовской моделей, не дают полной и точной картины происходящего в сети. Это обстоятельство привело к росту исследований и работ по разработке новых подходов к моделированию сетевого трафика [1].

В последнее время появляется ряд работ, в которых в качестве модели сетевого трафика предлагается α -устойчивая модель. Устойчивые законы распределения [2], характеризующиеся четырьмя параметрами, выступают в качестве обобщения гауссовского и пуассоновского распределений. Параметр α характеризует свойства тяжелого хвоста, параметр β характеризует асимметрию, параметры σ и μ — параметры масштаба и положения. Параметр α принимает значения $(0, 2]$, параметр β — в пределах от $[-1, 1]$ (при $\beta = -1$ имеем крайнюю левую асимметрию, при $\beta = 1$ — крайнюю правую асимметрию). Параметр σ должен быть ненулевым положительным числом, параметр μ может иметь любые вещественные значения. Если $\alpha = 2$, то распределение является гауссовым. Кроме того, α -устойчивые распределения позволяют отойти от необходимости агрегирования трафика. В докладе рассматриваются устойчивые распределения, их свойства и применение к моделированию сетевого трафика.

Литература

1. Костомицкий А. И., Волотка В. С. *Подходы к моделированию самоподобного трафика* / Режим доступа: http://www.nbuu.gov.ua/portal/natural/vejpt/2010_4_7/EEJET_4_7_2010_46-49.pdf Дата доступа 25.06.2012.

2. Труш Н. Н., Соболева Т. В. *Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов*. Мн.: БГУ, 2008. 68 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦЕН ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ С ПОМОЩЬЮ УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Н.Н. Труш

Белорусский государственный университет
Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь
TroughNN@bsu.by

Построение вероятностно-статистических моделей, достаточно полно и адекватно описывающих динамику цен основных финансовых инструментов, таких как банковский счет, облигации, акции является одной из основных задач финансовой математики.

В последние годы были предложены особые виды устойчивых распределений [1], которые лучше соответствуют поведению цен финансовых активов по сравнению с нормальным распределением.

В докладе рассматриваются следующие три подкласса классических медленно растущих устойчивых (classical temperel stable, CTS) распределений.

1. Медленно растущее устойчивое распределение CGMY (соответственно фамилиям ученых предложивших это распределение Carr, Geman, Modan, Yor).

2. Модифицированное медленно растущее устойчивое распределение (modified tempered stable, MTS).

3. KR (по фамилиям Kim, Rachev) медленно растущее устойчивое распределение (KR tempered stable distribution).

Вычисляются моменты, семиинварианты, асимметрия, кurtosis введенных распределений и исследуется поведение их плотностей распределения в зависимости от изменения параметров. Приводятся другие вероятностные свойства рассматриваемых распределений, а также алгоритмы их моделирования. По смоделированным данным строятся оценки параметров изучаемых распределений и исследуются их свойства.

Соответственно рассматриваемым распределениям вводятся случайные процессы CGMY, MTS, KR, которые являются процессами Леви. Вычисляются триплеты характеристик для этих процессов и предлагаются алгоритмы их моделирования. Моделирование случайных процессов CGMY рассматривалось в работе [2].

Обсуждается применение рассматриваемых процессов к исследованию реальных финансовых временных рядов.

Литература

1. Kim Y. S., Rachev S. T. *Financial Market Models with Levy Processes and Time-Varying Volatility* // Journal of Banking and Finance. M. L. Bianchi, F. J. Fabozzi. 2008. Vol. 32, Iss. 7. P. 1363–1378.

2. Труш Н. Н., Кузьмина А. В. *Моделирование процесса CGMY* // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика, математика, информатика. 2012. № 2.

ПРЕДЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОЦЕНКИ СЕМИВАРИОГРАММЫ СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ

Т.В. Цеховая

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
Tsekhavaya@bsu.by

В настоящее время для исследования задач геологии, гидрологии, метеорологии, экологии и других областей знаний наряду с использованием классических методов теории случайных процессов, статистического анализа временных рядов, возникла необходимость разработки и применения новых методов. Вариограммный анализ представляет собой сравнительно новый раздел статистического анализа временных рядов, применяемый для исследования таких задач. Вариограмма является одной из основных характеристик случайных процессов и полей во временной области. За последние десятилетия значительно увеличился интерес к исследованию статистических свойств оценок вариограммы. Это можно объяснить тем, что оценки несут полезную и необходимую информацию о внутренней структуре процессов и полей.

Асимптотические распределения оценок вариограммы стационарных в широком смысле случайных процессов с дискретным и непрерывным временем находились, например, в [1, 2].

Статистические свойства оценки вариограммы внутренне стационарного гауссовского случайного процесса с непрерывным временем исследовались в статье [3]. Найдены выражения для первых двух моментов и семиинвариантов высших порядков исследуемой статистики.

При условии, что ряд из семивариограмм абсолютно сходится, исследовано асимптотическое поведение ковариации, дисперсии и семинвариантов высших порядков оценки вариограммы. Найдено предельное распределение изучаемой статистики.

В [4] построена оценка семивариограммы стационарного в узком смысле m -зависимого случайного процесса с дискретным временем. Получены выражения для математического ожидания и дисперсии исследуемой статистики. Найдено предельное распределение оценки семивариограммы.

В данной работе построена оценка семивариограммы стационарного в узком смысле m -зависимого двумерного случайного поля, обладающего конечным вторым моментом. Доказано, что изучаемая статистика является несмещенной и состоятельной в среднеквадратическом смысле оценкой для семивариограммы. При дополнительных ограничениях на бивариограмму рассматриваемого случайного поля найдено асимптотическое распределение построенной статистики. Показано, что оценка имеет предельное нормальное распределение.

Исследования выполнены в рамках Государственной программы научных исследований на 2011–2015 гг. «Междисциплинарные научные исследования, новые зарождающиеся технологии как основа устойчивого инновационного развития» (Конвергенция).

Литература

1. Цеховая Т. В. *Предельное распределение оценки вариограммы стационарного случайного процесса* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2002. № 1. С. 104–105.
2. Tsekhavaya T. V., Troush N. N. *Asymptotic distribution of the variogram estimator of stationary stochastic process with continuous time* // Transaction of XXIV International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models, Jurmala, Latvia, September 10–17, 2004 / Transport and Telecommunication Institute. Jurmala, 2004. P. 292–297.
3. Цеховая Т. В. *Асимптотическое распределение оценки вариограммы* // Вестн. Брестского гос. ун-та. им. А. С. Пушкина. Сер. естеств. наук. 2008. № 2(31). С. 32–37.
4. Цеховая Т. В., Труш Н. Н. *Предельное распределение оценки семивариограммы стационарного случайного процесса* // Вестн. ГрГУ. Сер. 2. 2010. № 3(102). С. 3–7.

ОЦЕНИВАНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОШИБОК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО КРИТЕРИЯ ОТНОШЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРИ НАЛИЧИИ ИСКАЖЕНИЙ В L_1 - И C -МЕТРИКАХ

С.Ю. Чернов, А.Ю. Харин

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
chernovsy@tut.by

Пусть на измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) наблюдается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}$. Пусть эти случайные величины имеют плотность распределения вероятностей $f(x, \theta)$ с параметром $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$, истинное значение которого неизвестно. Относительно параметра θ имеются две простые гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$, $H_1 : \theta = \theta_1$. Обозначим статистику логарифмического отношения правдоподобия: $\Lambda_n = \Lambda_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \lambda_k$, где $\lambda_k = \lambda(x_k) = \ln(f(x_k, \theta_1)/f(x_k, \theta_0))$ — логарифм статистики отношения правдоподобия, вычисленной по наблюдению x_k , $k \in \mathbb{N}$. Для проверки гипотез H_0 и H_1 по наблюдениям x_1, x_2, \dots выносится решение, основанное на последовательном критерии отношения вероятностей [1]: $N = \min\{n \in \mathbb{N} : \Lambda_n \notin (C_-, C_+)\}$, $d = 1_{[C_+, +\infty)}(\Lambda_N)$, где N — момент останова, после которого принимается

решение d . C_- и C_+ — пороги критерия, определенные в соответствии с [1]: $C_- = \ln(\beta_0/(1 - \alpha_0))$, $C_+ = \ln((1 - \beta_0)/\alpha_0)$, α_0, β_0 — заданные значения вероятностей ошибок первого и второго рода. Предположим, что функция $\lambda(x)$, $\lambda: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная выше, измерима относительно борелевской σ -алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Обозначим $\lambda^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{D} : \lambda(x) \in A\}$ — прообраз множества $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\lambda^{-1}(a) = \lambda^{-1}(\{a\})$, $a \in \mathbb{R}$. Пусть истинной гипотезой является H_0 , поэтому в работе рассматривается вероятность ошибки первого рода α , $f(x) = f(x, \theta_0)$.

С целью повышения устойчивости значений вероятностей ошибочных решений последовательного критерия к искажениям для произвольной плотности $s(x)$ построим «усеченную» плотность распределения вероятностей одного наблюдения x_k :

$$s^g(x) = 1_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)} s(x) + \varepsilon_- u_-(x) + \varepsilon_+ u_+(x),$$

где g_-, g_+ ($g_- < g_+$) — заданные параметры усечения статистик λ_n ; u_-, u_+ — плотности распределения вероятностей,

$$\text{supp } u_- \subseteq \lambda^{-1}(g_-), \quad \text{supp } u_+ \subseteq \lambda^{-1}(g_+), \quad \varepsilon_- = \int_{\lambda^{-1}(-\infty, g_-)} s(y) dy, \quad \varepsilon_+ = \int_{\lambda^{-1}(g_+, +\infty)} s(y) dy.$$

Искажения в L_1 -метрике. Пусть в нарушение гипотетической модели наблюдения x_n имеют плотность распределения вероятностей $s(x)$, которая может отличаться от $f(x)$, однако расстояние в L_1 -метрике между функциями $s(x)$ и $f(x)$ не превышает ε : $\int_{\mathbb{D}} |s(x) - f(x)| dx \leq \varepsilon$. Семейство указанных функций $s(x)$ при фиксированном ε , обозначим $L_1(f, \varepsilon)$. Для произвольной $s(\cdot) \in L_1(f, \varepsilon)$ вероятность ошибки первого рода описанного последовательного критерия обозначим $\alpha(s, \varepsilon)$. Показано, что если $s(\cdot) \in L_1(f, \varepsilon)$, то $s^g(\cdot) \in L_1(f^g, \varepsilon)$. В работе найдено «наихудшее» распределение вероятностей $\bar{f}^g(\cdot)$, которое максимизируют величину $\alpha(\cdot, \varepsilon)$ на множестве $L_1(f^g, \varepsilon)$.

Теорема 1. Если $s \in L_1(f, \varepsilon)$, то выполняется соотношение $\alpha(s^g, \varepsilon) \leq \alpha(\bar{f}^g, \varepsilon)$, где

$$\bar{f}^g(x) = 1_{\lambda^{-1}(g_-, g_+)} f(x) + \left(\varepsilon_- - \frac{\varepsilon}{2}\right) u_-(x) + \left(\varepsilon_+ + \frac{\varepsilon}{2}\right) u_+(x).$$

Искажения в C -метрике. Аналогично предыдущему пункту описывается модель, когда плотность распределения вероятностей наблюдений $s(x)$ отличается от теоретической $f(x)$ в C -метрике с весом $1/w(x)$ не более, чем на ε : $\sup_{x \in \mathbb{D}} \{|s(x) - f(x)|/w(x)\} \leq \varepsilon$. Семейство указанных функций $s(x)$ при фиксированном ε , обозначим $C_w(f, \varepsilon)$. Показано, что если $s(\cdot) \in C_w(f, \varepsilon)$, то $s^g(\cdot) \in C_{w^g}(f^g, \varepsilon)$. В работе найдено «наихудшее» распределение вероятностей $\bar{f}_C^g(\cdot)$, которое максимизируют величину $\alpha(\cdot, \varepsilon)$ на множестве $C_{w^g}(f^g, \varepsilon)$.

Теорема 2. Если $s^g \in C_{w^g}(f^g, \varepsilon)$, то выполняется соотношение $\alpha(s^g, \varepsilon) \leq \alpha(\bar{f}_C^g, \varepsilon)$, где

$$\bar{f}_C^g(x) = 1_{\lambda^{-1}(g_-, t)}(x) \cdot (f(x) - \varepsilon \cdot w(x)) + 1_{\lambda^{-1}(t, g_+)}(x) \cdot (f(x) + \varepsilon \cdot w(x)).$$

Исследования частично поддержаны ГПНИ «Конвергенция», проект 1.7.01.1.

Литература

1. Вальд А. *Последовательный анализ*. М.: Наука, 1960.
2. Woodal W., Reynolds M. *A Discrete Markov Chain Representation of the Sequential Probability Ratio Test* // Communications in statistics — Sequential Analysis. 1983. № 2(1). P. 27–44.
3. Харин А. Ю. *Об одном подходе к анализу последовательного критерия отношения правдоподобия для различения простых гипотез* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2002. № 1. С. 92–96.
4. Харин А. Ю., Чернов С. Ю. *Оценивание вероятностей ошибок последовательного критерия отношения вероятностей* // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2011. № 1. С. 96–100.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СТЬЮДЕНТИЗИРОВАННЫХ ОТКЛОНЕНИЙ ДЛЯ НОРМАЛЬНОЙ ВЫБОРКИ С ВЫБРОСОМ

Л.К. Ширяева

Самарский государственный экономический университет
Советской Армии 141, 443090 Самара, Россия
Shiryeva_LK@mail.ru

Пусть наблюдения $X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_{\text{out}}$ являются независимыми случайными величинами, причем X_1, \dots, X_{n-1} имеют нормальное $N(a, \sigma^2)$ распределение, а выброс X_{out} имеет $N(a + \lambda\sigma, \nu\sigma^2)$ распределение, где $\lambda \geq 0$ и $\nu > 0$. Обозначим через \tilde{T}_n и T_i студентизированные отклонения выброса и «обычных» наблюдений от среднего по выборке:

$$\tilde{T}_n = (X_{\text{out}} - \bar{X})/S, \quad T_i = (X_i - \bar{X})/S, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

где $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

В работе [1] был найден закон распределения случайной величины \tilde{T}_n . В настоящей работе получено представление плотности распределения вероятностей случайной величины \tilde{T}_n через специальную функцию Эрмита, а также закон распределения случайной величины T_i , ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Основными результатами работы являются следующие теоремы.

Теорема 1. Плотность вероятностей случайной величины \tilde{T}_n для $n \geq 3$ имеет вид:

$$f_{\tilde{T}_n}(t) = \begin{cases} B_n \frac{(n-1)^2}{[(n-1)^2 - nt^2]^{3/2}} f_{V_n(t)}(0), & |t| < (n-1)/\sqrt{n}, \\ 0, & |t| \geq (n-1)/\sqrt{n}, \end{cases}$$

где $f_{V_n(t)}(v)$ — плотность распределения случайной величины $V_n(t) = \beta_n(t)\sqrt{W} - Z$, случайные величины W и Z являются независимыми; W имеет $\chi^2(n-1)$ -распределение, Z имеет $N(\mu, 1)$ -распределение,

$$\mu = \lambda \sqrt{\frac{n-1}{1+\nu(n-1)}}, \quad \beta_n(t) = \sqrt{\frac{n}{\eta}} \frac{t}{\sqrt{(n-1)^2 - nt^2}} \quad \text{при } |t| < \frac{n-1}{\sqrt{n}},$$

$$B_n = \sqrt{\frac{2n}{\eta}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n-2}{2})}, \quad \eta = \frac{1+\nu(n-1)}{n}, \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi.$$

Теорема 2. Для $\forall t \in (-(n-1)/\sqrt{n}, (n-1)/\sqrt{n})$ плотность случайной величины $V_n(t)$ в точке $v = 0$ равна

$$f_{V_n(t)}(0) = A_n \left[\frac{(n-1)^2 - nt^2}{q(t)} \right]^{(n-1)/2} H_{-n+1} \left(-\frac{t\mu}{\sqrt{2q(t)}} \right),$$

где

$$A_n = \frac{\Gamma(n-1)}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\mu^2/2} \left(\frac{\eta}{n} \right)^{(n-1)/2}, \quad q(t) = \eta \frac{(n-1)^2}{n} + (1-\eta)t^2,$$

$H_k(z) = \Gamma^{-1}(-k) \int_0^\infty e^{-\xi^2 - 2z\xi} \xi^{-k-1} d\xi$ — функция Эрмита с целым значком k , $k < 0$.

Теорема 3. Для $n \geq 4$ плотность случайной величины T_i , $i = \bar{1}, n-1$, имеет вид:

$$f_{T_i}(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n-1)(n-2)}{n}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_{\tilde{T}_n} \left(\frac{n-1}{\sqrt{n}} \sin \varphi \right) f_{T_{n-1}^*}(r_n(t, \varphi)) d\varphi, & |t| < (n-1)/\sqrt{n}, \\ 0, & |t| \geq (n-1)/\sqrt{n}, \end{cases}$$

где

$$f_{T_{n-1}^*}(x) = \begin{cases} \frac{1}{n-2} \sqrt{\frac{n-1}{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n-2}{2})}{\Gamma(\frac{n-3}{2})} \cdot \left(1 - \frac{n-1}{(n-2)^2} x^2\right)^{(n-5)/2}, & |x| < \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}, \\ 0, & |x| \geq \frac{n-2}{\sqrt{n-1}}, \end{cases}$$

$$r_n(t, \varphi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{n-2}{n(n-1)}} \cdot \frac{\sqrt{nt} + \sin \varphi}{\cos \varphi}, & |\varphi| < \pi/2, \\ 0, & |\varphi| \geq \pi/2. \end{cases}$$

Литература

1. Ширяева Л. К. *Вычисление мер мощности критерия Граббса проверки на один выброс* // Сиб. журн. индустр. математики. 2010. Т. 13, № 4. С. 141–154.

МНОГОРЕЖИМНЫЕ СЕТИ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЗАЯВКАМИ И СИГНАЛАМИ

О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
Советская 104, 246015 Гомель, Беларусь
oksnavy@gmail.com, dudovskaya@gmail.com

Введение. В работе рассматривается открытая сеть с узлами, которые могут функционировать в нескольких режимах, отвечающих различной степени их работоспособности. В сети циркулируют положительные и отрицательные заявки нескольких типов и сигналы, изменяющие режимы узлов, в которые сигналы поступают.

Описание модели. В сеть, состоящую из N узлов, поступают четыре независимых простейших потока: положительных заявок интенсивности λ^+ , отрицательных заявок интенсивности λ^- , сигналов повышения и понижения режима обслуживания с параметрами ω^+ и ω^- соответственно. Положительные и отрицательные заявки могут быть M типов. Положительная заявка, поступившая в узел, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в узле на единицу и требует обслуживания. Отрицательная заявка, поступившая в узел, увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в узле на единицу и не требует обслуживания. Каждая отрицательная заявка типа u , находящаяся в i -м узле ($u = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N}$), остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau_{(i,u)}(m_{(i,u)}) = \tau_{(i,u)}/m_{(i,u)}$ для $m_{(i,u)} \geq 1$, где $m_{(i,u)}$ — количество отрицательных заявок типа u в i -м узле, $\tau_{(i,u)}$ — некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в узле отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди положительных заявок типа u в i -м узле на единицу, если в узле есть положительные заявки соответствующего типа и не производит никаких воздействий на узел, если в узле нет положительных заявок соответствующего типа. В каждом узле находится M экспоненциальных приборов, u -й прибор обслуживает положительные заявки типа u . Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания различных заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных заявок типа u в i -м узле имеют показательное распределение с параметром $\mu_{(i,u)}$ ($u = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, N}$). Предполагается, что i -й узел может находиться в одном из l_i режимов работы ($l_i = \overline{0, r_i}$, $i = \overline{1, N}$). Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$, где $x_i(t) = (n_{(i,1)}(t), \dots, n_{(i,M)}(t), m_{(i,1)}(t), \dots, m_{(i,M)}(t), l_i(t))$ описывает состояние i -го узла в момент времени t . Здесь $n_{(i,u)}(t)$ — число положительных

заявок типа u , $m_{(i,u)}(t)$ — число отрицательных заявок типа u , $l_i(t)$ — режим, в котором работает i -й узел в момент времени t . Процесс $x_i(t)$ имеет пространство состояний

$$X_i = \{x_i = (n_{(i,1)}, \dots, n_{(i,M)}, m_{(i,1)}, \dots, m_{(i,M)}, l_i), \quad n_{(i,u)}, m_{(i,u)} \geq 0, \quad u = \overline{1, M}, \quad l_i = \overline{0, r_i}\}.$$

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $x_i = (\bar{n}_i, \bar{m}_i, l_i)$, в режиме l_i ($l_i = \overline{0, r_i}$, $i = \overline{1, N}$) имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu_i = (\bar{n}_i, \bar{m}_i, l_i)$ i -й узел переходит в $(l_i + 1)$ -й режим ($l_i = \overline{0, r_i - 1}$), а с интенсивностью $\varphi_i = (\bar{n}_i, \bar{m}_i, l_i)$ — в $(l_i - 1)$ -й режим ($l_i = \overline{1, r_i}$). Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Устанавливаются условия мультипликативности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний исследуемой сети.

Литература

1. Gelenbe E. *Stability of product-form G-networks* // Probab. Eng. and Inf. Sci. 1992. Vol. 6. P. 271–276.

ROBUSTNESS IN SEQUENTIAL STATISTICAL TESTING OF HYPOTHESES: THEORY AND APPLICATIONS

A.Yu. Kharin

Belarusian State University, Minsk, Belarus
KharinAY@bsu.by

The sequential approach [1] is used for statistical testing of hypotheses in different applications, especially in medicine, quality control, finance and many others. This approach gives the possibility to minimize the expected number of observations to provide the requested accuracy of the decision making (given small values of error probabilities) [2].

Although the sequential statistical tests are used in many practical problems, the results often do not meet the expectations, for example, the error probabilities are greater than the values given by the theory. One of the reasons is that the real data do not follow the hypothetical model exactly, the model is distorted, so the problem of robustness analysis [3] is important for correct application of the theory.

In this paper we discuss the problem of the sequential tests characteristics calculation to provide the robustness analysis under the hypothetical model distortions (outliers) introduced by Tukey and Huber [3]. The cases of simple and composite hypotheses are analysed with the methodology developed in [4–8]. The asymptotic expansions for error probabilities and expected sample sizes are constructed. Using these expansions the robustness analysis of the traditional sequential tests is performed.

To decrease the negative influence of model distortions to the performance characteristics, a new parametric family of sequential tests is proposed. To analyse the performance of the tests from the proposed family the asymptotic expansions are constructed for their characteristics. Using the criterion of the minimization of the maximal possible risk, the new robust sequential tests are derived. The results are illustrated by numerical examples via statistical modeling.

The results are applied for the solution of two following practical problems:

- 1) epidemiological analysis of pediatric cancer based on spatio-temporal clustering of incidence and mortality for survival improvement within the long-term post-Chernobyl period;
- 2) sequential making of optimal statistical decisions in the processes of medical diagnostics for cardiology.

Acknowledgement. The work is partially supported by the National Research Program “Convergence”, Project No. 1.7.01.1, National Research Program “Informatics and Space”, Project No. 1.1.03, and by the Project No. B-1910 of the International Science and Technology Center.

References

1. Wald A. *Sequential Analysis*. New York: John Wiley and sons, 1947.
2. Mukhopadhyay N., de Silva B. *Sequential Methods and their Applications*. Boca Raton: Chapman & Hall / CRC, 2009.
3. Huber P.J. *Robust Statistics. Theory and Methods*. New York: John Wiley and Sons, 2004.
4. Galinskij V., and Kharin A. *On Minimax Robustness of Bayesian Statistical Prediction*, In: Probability Theory and Mathematical Statistics. VSP / TEV, 1999. P. 259–266.
5. Kharin A. *On Robustifying of the Sequential Probability Ratio Test for a Discrete Model under “Contaminations”* // Austrian Journal of Statistics. 2002. Vol. 31. P. 267–277.
6. Kharin A. Yu., Shlyk P. A. *Robust Multivariate Bayesian Forecasting under Functional Distortions in the Chi-Square Metric* // Journal of Statistical Planning and Inference. 2009. Vol. 139. P. 3842–3846.
7. Kharin A. *Robustness in Sequential Discrimination of Markov Chains under “Contamination”*, In: Theory and Applications of Recent Robust Methods. Birkhaueser Verlag, 2004. P. 165–171.
8. Kharin A. *Robustness Evaluation Analysis for Bayesian Sequential Testing of Composite Hypotheses under Simultaneous Distortions of Priors and Likelihoods* // Austrian Journal of Statistics. 2011. Vol. 40. P. 65–74.

PARAMETRIZATIONS EQUIVALENCE OF GENERALIZED HYPERBOLIC DISTRIBUTION

A.V. Kuzmina

Belarussian State University, Minsk, Belarus
KuzminaAV@bsu.by

Different parametrization types of generalized hyperbolic distribution are considered in the report.

Definition 1 (Parametrization A). The generalized hyperbolic distribution is given by [1]

$$f_{\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu}^{GH}(x) = a(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu)(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda-1/2)/2} K_{\lambda-1/2}(\alpha(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{1/2}) \exp(\beta(x - \mu)),$$

where

$$a(\lambda, \alpha, \beta, \delta, \mu) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\lambda/2}}{(2\pi)^{1/2} \alpha^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2})},$$

$K_\lambda(z) = 1/2 \int_0^\infty u^{\lambda-1} \exp(-1/2z(u + u^{-1})) du$ is the modified Bessel function, $z > 0$.

Definition 2 (Parametrization B). The generalized hyperbolic distribution is given by

$$f_{\lambda, \zeta, \rho, \delta, \mu}^{GH}(x) = a(\lambda, \zeta, \rho, \delta, \mu)(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda-1/2)/2} \times \\ \times K_{\lambda-1/2}(\zeta(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{1/2}/(\delta(1 - \rho^2)^{1/2})) \exp(\zeta\rho(x - \mu)/(\delta(1 - \rho^2)^{1/2})),$$

where

$$a(\lambda, \zeta, \rho, \delta, \mu) = \frac{\zeta^{1/2}(1 - \rho^2)^{(\lambda-1/2)/2}}{(2\pi)^{\lambda+1/2} K_\lambda(\zeta)}, \quad \zeta = \delta(\alpha^2 - \beta^2)^{1/2}, \quad \rho = \beta/\alpha.$$

Definition 3 (Parametrization C). The generalized hyperbolic distribution is given by

$$f_{\lambda, \xi, \chi, \delta, \mu}^{GH}(x) = a(\lambda, \xi, \chi, \delta, \mu)(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda-1/2)/2} \times \\ \times K_{\lambda-1/2}((1 - \xi^2)(\delta^2 + (x - \mu)^2)^{1/2}/(\delta\xi(\xi^2 - \chi^2)^{1/2})) \exp(\chi(1 - \xi^2)(x - \mu)/(\delta\xi^2(\xi^2 - \chi^2)^{1/2})),$$

where

$$a(\lambda, \xi, \chi, \delta, \mu) = \frac{(1 - \xi^2)^{1/2} (\xi^2 - \chi^2)^{(\lambda-1/2)/2}}{(2\pi)^{1/2} (\xi\delta)^{\lambda+1/2} K_\lambda((1 - \xi^2)/\xi^2)}, \quad \xi = (1 + \zeta^2)^{-1/2}, \quad \chi = \xi\rho.$$

Definition 4 (Parametrization D). The generalized hyperbolic distribution is given by

$$f_{\lambda, \alpha^*, \beta^*, \delta, \mu}^{GH}(x) = a(\lambda, \alpha^*, \beta^*, \delta, \mu) (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{(\lambda-1/2)/2} \times \\ \times K_{\lambda-1/2}(\alpha^*/\delta (\delta^2 + (x - \mu)^2)^{1/2}) \exp(\beta^*(x - \mu)/\delta),$$

where

$$a(\lambda, \alpha^*, \beta^*, \mu) = \frac{((\alpha^*)^2 - (\beta^*)^2)^{\lambda/2}}{(2\pi)^{1/2} (\alpha^*)^{\lambda-1/2} (\delta)^{\lambda+1/2} K_\lambda(((\alpha^*)^2 - (\beta^*)^2)^{1/2})}, \quad \alpha^* = \alpha\delta, \quad \beta^* = \beta\delta.$$

Theorem. The parametrizations A – D of generalized hyperbolic distribution are equivalent.

Generalized hyperbolic distribution and its special cases simulation, parameters estimators are also discussed [2].

References

1. Schoutens W., *Levy processes in finance*. Bognor Regis, John Wiley and Sons Ltd., 2003.
2. Kuzmina A. V. *Variance gamma and normal inverse Gaussian random variables simulation and their parameters estimation // Computer algebra systems in teaching and research mathematical modeling in physics, civil engineering economics and finance* wydawnictwo collegiums mazovia sidle. 2011. P. 123–127.

MALLIAVIN — STEIN METHOD FOR MULTIDIMENSIONAL U -STATISTICS OF POISSON POINT PROCESSES

Nguyen Tuan Minh

Belarusian State University, Minsk, Belarus
minhnguyen@yandex.ru

Our main result is to give an upper bound for a probabilistic distance between a Gaussian random vector a square-integrable random variable with finite Wiener — Itô chaos expansions by applying Malliavin — Stein inequality on the Poisson space. Consequentially, we apply this result to study the normal approximation for multidimensional U -statistics of Poisson point processes. Let $\Pi_{n,n}$ stands for the set of partitions of

$$Z_{n,m} = \{z_1^{(1)} \dots z_{n-1}^{(1)}, z_1^{(2)} \dots z_{n-1}^{(2)}, z_1^{(3)} \dots z_{m-1}^{(3)}, z_1^{(4)} \dots z_{m-1}^{(4)}\}$$

such that for each $\pi \in \Pi$, $z_l^{(i)}, z_h^{(i)} \in Z_{n,m}$, $l \neq h$, are always in different subsets of π and every subset of π has at least two elements. Denote $\bar{\Pi}_{n,m} \subset \Pi_{n,m}$ as the set of all partitions in $\Pi_{n,m}$ of such that for any $\pi \in \bar{\Pi}_{n,m}$ and any decomposition of $\{1, 2, 3, 4\}$ into two disjoint sets M_1, M_2 there are $i \in M_1, j \in M_2$ and two variables $z_l^{(i)}, z_h^{(j)}$ which are in the same subset of π . The following estimation is obtained

Theorem. Let us give a Gaussian random vector $X \sim \mathcal{N}_d(0, C)$ and a random vector $F = (F_1, \dots, F_d) \subset L^2(P_N)$ with non-singular covariance matrix Σ such that each i -th component $F_i = F_i(\phi_i)$ is an absolutely convergent U -statistic of order k_i with respect to the Poisson point process N , $i = 1, d$. Then

$$\Delta(\sqrt{C\Sigma^{-1}}(F - \mathbf{E}(F)), X) \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{8} d^2 k^{7/2} \|\sqrt{C\Sigma^{-1}}\|^3 \|C^{-1}\|^{3/2} \|C\| (\text{trace}(\Sigma))^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^d \sum_{n=1}^k M_{n,n}(i, i) \right)^{1/2} + k^2 \|C\Sigma^{-1}\|_F \|C^{-1}\| \|C\|^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^d \sum_{n,m=1}^k M_{n,m}(i, j) \right)^{1/2},$$

where $k = \max\{k_i, 1 \leq i \leq, d\}$ and $M_{n,m}(i, j)$ stands for the integral

$$\mathbf{1}_{n \leq k_i, m \leq k_j} \binom{k_i}{n}^2 \binom{k_j}{m}^2 \sum_{\pi \in \bar{\Pi}_{n,m} E^{|\pi|}} \int_{E^{2(k_i-m)}} \int_{E^{2(k_j-n)}} \int_{E^{2(k_i+k_j-n-m)}} \left(\prod_{l=1}^2 \phi_i(z_1^{(l)}, \dots, z_{n-1}^{(l)}, x_1^{(l)}, \dots, x_{k_i-n}^{(l)}) \prod_{l=3}^4 \phi_j(z_1^{(l)}, \dots, z_{m-1}^{(l)}, x_1^{(l)}, \dots, x_{k_j-m}^{(l)}) \right) (y_1, \dots, y_{|\pi|}) \mu^{|\pi|+2(k_i+k_j-n-m)}(dx_1^{(1)}, \dots, dx_{k_i-n}^{(2)}, dx_1^{(3)} \dots dx_{k_j-m}^{(4)}, dy_1, \dots, dy_{|\pi|}).$$

In the above formula, the operator R^π replaces all elements of $Z_{n,m}$ that belong to the same subset of π by a new variable y_j , $j = 1, \dots, |\pi|$.

References

1. Last G., Penrose M. *Poisson process fock space representation, chaos expansion and covariance inequalities* // Probab. Theory Related Fields. 2011. V. 150. P. 663–690.
2. Peccati G., Solé J. L., Taqqu M. S., Utzet F. *Stein's method and normal approximation of Poisson functionals* // Ann. Probab. 2010. V. 38, no. 2. P. 443–478.
3. Peccati G., Zheng C. *Multi-dimensional Gaussian fluctuations on the Poisson space* // Electron. J. Probab. 2010. V. 15, no. 48. P. 1487–1527.
4. Reitzner M., Schulte M. *Central Limit Theorems for U-Statistics of Poisson Point Processes* // ArXiv e-prints. 2011.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ЗАЩИТЫ ИНФОРМАЦИИ И АНАЛИЗ ДАННЫХ

ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИЯ ТРАЕКТОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

М.С. Абрамович, Д.А. Коновалов

Белгосуниверситет, НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь,
abramovichms@bsu.by

В системе обработки радиолокационной информации для выделения полезного сигнала необходимо провести фильтрацию сигнала радиолокатора от баллистического объекта. Один из современных подходов фильтрации сигналов основан на применении вейвлет-преобразования. Применение вейвлет-преобразования для фильтрации сигнала состоит в том, что вейвлет-коэффициенты меньшие некоторого значения (порога) приравниваются к нулю, а большие коэффициенты либо остаются неизменными («жесткая» фильтрация), либо уменьшаются на величину порога («мягкая» фильтрация).

При применении классических вейвлетов на границах интервалов, для которых проводится фильтрация траекторных параметров баллистических объектов, возникают большие вейвлет-коэффициенты, характерные для случаев, когда сигналы имеют разрывы или разрывные производные. Чтобы избежать появления вейвлет-коэффициентов с большими амплитудами на границах, необходимо применять интервальные вейвлеты, которые имеют столько же нулевых моментов, что и исходный вейвлет [1].

Вейвлет-фильтрация сигнала включает следующие этапы:

- 1) взятие прямого вейвлет-преобразования от зашумленных значений сигнала;
- 2) обработка (фильтрация) вейвлет-коэффициентов;
- 3) взятие обратного вейвлет-преобразования от коэффициентов.

При разработке алгоритма фильтрации предполагалось, что наблюдаемые координаты баллистического объекта $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ являются независимыми. В алгоритме фильтрации сигнала использовалось скользящее окно (интервал) длиной равной степени 2 для реализации быстрого алгоритма вейвлет-преобразования, которое сдвигалось по сигналу при поступлении от радиолокатора текущих координат объекта. В текущем скользящем окне проводилась фильтрация сигнала. В качестве вейвлетов при преобразовании сигнала использовались вейвлеты Добеши различных порядков.

Эффективность алгоритма фильтрации зависит от следующих параметров [2]:

- 1) типа фильтрации («мягкой» или «жесткой»);
- 2) порога фильтрации (универсального, FDR-порога);
- 3) порядка вейвлета Добеши.

Исследование алгоритма фильтрации проведено методом статистического моделирования для различных уровней шума. Вейвлет-фильтрация проводилась для каждой координаты $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ по отдельности. В качестве оптимального параметра выбирался такой, при котором достигался минимум среднеквадратической ошибки отфильтрованной координаты сигнала по сравнению с эталонной.

Результаты статистического моделирования показали, что лучшую фильтрацию сигнала для всех координат баллистического объекта и исследуемых уровней шума обеспечивает применение «жесткой» пороговой фильтрации с универсальным порогом, вычисленным для каждого уровня разложения сигнала по базису вейвлета Добеши 8-го порядка.

Литература

1. Малла С. *Вэйвлеты в обработке сигналов* М.: Мир, 2005. 671 с.
2. Воскобойников Ю.Е., Гочаков А.В., Колкер А.Б. *Фильтрация сигналов и изображений: фурье- и вейвлет-алгоритмы (с примерами в Mathcad)* Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. 188 с.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СМОЙСТВАХ ОМП РЕГРЕССИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРИ НАЛИЧИИ КЛАССИФИКАЦИИ НАБЛЮДЕНИЙ

Е.С. Агеева, Ю.С. Харин

НИИ Прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
helenageeva@yahoo.ca kharin@bsu.by

В математической статистике широко используется регрессионная модель. Ею описываются многие процессы в технике, экономике, медицине и других областях. Хорошо исследованы случаи, когда зависимые переменные наблюдаются с выбросами или с пропусками, а также ситуация, когда в выборке присутствуют цензурированные наблюдения; при этом построены робастные статистические выводы. В данной работе рассматривается ситуация, когда для нелинейной множественной регрессионной модели вместо истинных значений зависимой переменной наблюдаются номера классов (интервалов), в которые попадают эти значения. Предлагаемая в статье новая модель множественной регрессии с классифицированными наблюдениями является обобщением известной модели с «округленными данными» (rounded data) [1–3].

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ определена модель нелинейной множественной регрессии:

$$Y_t = F(X_t; \theta^0) + \xi_t, \quad t = 1, \dots, n, \dots,$$

где $X_t \in \mathbb{R}^N$ — известный вектор регрессоров, $\xi_t \in \mathbb{R}^1$ — случайная величина ошибок с нормальным распределением вероятностей $\mathcal{N}(0, (\sigma^0)^2)$, $\alpha^0 = (\theta^0, (\sigma^0)^2)' \in \mathbb{R}^{m+1}$ — неизвестный вектор параметров.

Пусть задана непересекающаяся последовательность K интервалов

$$A_k = (a_{k-1}, a_k], \quad k \in \mathbf{K} = \{1, \dots, K\}, \quad -\infty = a_0 < a_1 < \dots < a_K = \infty.$$

Это множество интервалов задает классификацию зависимой переменной Y_t : Y_t относится к классу ν_t , если $Y_t \in A_{\nu_t}$, $\nu_t \in \mathbf{K}$.

Вместо точных значений зависимой переменной Y_1, \dots, Y_n наблюдаются лишь соответствующие номера классов $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbf{K}$. Задача заключается в том, чтобы по классифицированным наблюдениям ν_1, \dots, ν_n и значениям регрессоров X_1, \dots, X_n построить статистические оценки для неизвестного вектора параметров α^0 .

Для оценивания вектора параметров α^0 используем метод максимального правдоподобия. Для построенных оценок получаем условия для состоятельности по вероятности и сильной состоятельности, а также условия для асимптотической нормальности и несмещенности [4, 5].

Литература

1. Bai, Z., Zheng, S., Zhang, B., Hu, Z. *Statistical Analysis for Rounded Data* // J. Statist. Plann. Inference, 2009. Vol. 139, no. 8. P. 2526–2542.
2. Dempster, A.P. and Rubin, D.B. *Rounding error in regression: the appropriateness of Sheppard corrections* J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 1983. Vol. 45. P. 51–59.

3. Sen Roy, S., Guriab, S. *Estimation of regression parameters in the presence of outliers in response Statistics*, 2009. Vol. 43, no. 6. P. 531–539.

4. Hoadley B. *Asymptotic properties of the maximum likelihood estimators for the independent not identically distributed case Ann. Math. Statist.*, 1971. Vol. 42, no. 4. P. 1977–1991.

5. Wald, A. *Note on the consistency of the maximum likelihood estimate Ann. Math. Statist.*, 1949. Vol. 20, no. 4. P. 595–601.

О СВЕДЕНИИ ЗАДАЧИ ДИСКРЕТНОГО ЛОГАРИФМИРОВАНИЯ К ЗАДАЧЕ ДИФФИ — ХЭЛЛМАНА

С.В. Агиевич

Белгосуниверситет, НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
agievich@bsu.by

Пусть g — образующий циклической группы G простого порядка q . Будем считать, что описание G имеет полиномиальную от $\log q$ длину, а групповая операция в G задается полиномиальным от $\log q$ алгоритмом.

Задачи дискретного логарифмирования (**DL**) и Диффи — Хэллмана (**CDH**, см. [1]) состоят в следующем:

DL	CDH
$(g, g^a) \mapsto x$	$(g, g^a, g^b) \mapsto g^{ab}$

Здесь a, b — элементы простого поля $\mathbb{F}_q = \{0, 1, \dots, q-1\}$.

В теории сложности говорят, что имеется *полиномиальная сводимость* задачи P_1 к задаче P_2 и пишут $P_1 \leq_P P_2$, если имеется вероятностный алгоритм, который решает P_1 со значимой (ее можно ограничить снизу функцией $1/p(n)$, где p — некоторый многочлен, n — размер задачи) вероятностью за полиномиальное время и за полиномиальное число обращений к алгоритму решения P_2 .

Понятно, что **CDH** \leq_P **DL**: логарифмируя g^a , определяем a , а затем $(g^b)^a = g^{ab}$. На сегодняшний день обратное сведение **DL** \leq_P **CDH** не доказано. Доказательство (или опровержение) этого сведения является одной из важных нерешенных проблем современной криптографии.

На сегодняшний день наибольшее продвижение в решении данной проблемы было достигнуто в статьях ден Боера [2], Маурера и Вольфа [3]. В последней работе была введена задача «Вспомогательная группа» (**AuxGroup**) и доказано, что

$$\mathbf{DL} \leq_P \mathbf{AuxGroup} \wedge \mathbf{CDH}$$

(в правой части — составная задача).

В докладе вводится еще одна задача «Вспомогательное сжатие» (**AuxCompr**) и доказываются следующие результаты.

Теорема 1. $\mathbf{DL} \leq_P \mathbf{AuxCompr} \wedge \mathbf{CDH}$.

Теорема 2. $\mathbf{AuxCompr} \leq_P \mathbf{AuxGroup}$.

Полученные результаты означают, что для доказательства сведения $\mathbf{DL} \leq_P \mathbf{CDH}$ достаточно решить вспомогательную задачу **AuxCompr**, которая не сложнее ранее предложенной задачи **AuxGroup**.

Литература

1. Diffie W., Hellman M. *New directions in cryptography* // IEEE Transactions on Information Theory. 1976. V. 22. P. 644–654.
2. den Boer B. *Diffie-Hellman is as strong as discrete log for certain primes* // Advances in Cryptology — Crypto'88, LNCS 403. Springer-Verlag, 1988. P. 530–539.
3. Maurer U. M., Wolf S. *The Diffie-Hellman protocol* // Designs, Codes, and Cryptography. 2000. V. 19. P. 147–171.

СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСКАЖЕННЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

А. Н. Алексейчук

Институт специальной связи и защиты информации
Национального технического университета Украины «КПИ»
Московская 45/1, 01011, Киев, Украина
alex-crypto@mail.ru

Системы линейных булевых уравнений с искаженными правыми частями являются классическим объектом исследования в теории кодирования и криптологии [1]. Известно, что решение таких систем общего вида равносильно декодированию произвольных линейных кодов. Последняя задача является NP -полной и для нее не известно (и, по-видимому, не существует) полиномиальных алгоритмов.

Первый субэкспоненциальный алгоритм решения систем линейных булевых уравнений с искаженными правыми частями и случайными равновероятными матрицами коэффициентов предложен И. Н. Коваленко [2]. В последние годы появились новые субэкспоненциальные алгоритмы, наиболее эффективные из которых базируются на решении так называемой задачи об аддитивном представлении (r -sum problem) [3–7].

В докладе представлена общая схема построения указанных алгоритмов, приведены неасимптотические оценки их надежности (отсутствующие в цитируемых работах). Предлагается также метод, позволяющий существенно уменьшить их вычислительную сложность, аналогичный по сути «гибридному» методу решения систем нелинейных алгебраических уравнений на основе вычисления базисов Гребнера [8]. Этот метод заключается в совместном применении алгоритмов решения задачи об аддитивном представлении и опробования отдельных неизвестных системы, что при определенных условиях позволяет уменьшить как трудоемкость ее решения, так и объем необходимого материала.

Литература

1. Балакин Г. В. *Введение в теорию случайных систем уравнений* // Тр. по дискретной математике. М.: ТВП. 1997. Т. 1. С. 1–18.
2. Коваленко І. М. *Про алгоритм суб'експоненційної складності декодування сильно спотворених лінійних кодів* // Доп. АН УРСР. Сер. А. 1988. № 10. С. 16–17.
3. Blum A., Kalai A., Wasserman H. *Noise-tolerant learning, the parity problem, and the statistical query model* // J. ACM. 2003. Vol. 50. № 3. P. 506–519.
4. Lybashevsky V. *The parity problem in the presence of noise, decoding random linear codes, and the subset sum problem* // APPROX and RANDOM'05, Proceedings. Springer Verlag, 2005. P. 378–389.
5. Fossorier M. P. C., Mihaljević M. J., Imai H., Cui Y., Matsuura K. *A novel algorithm for solving the LPN problem and its application to security evaluation of the HB protocol for RFID authentication* // Cryptology ePrint Archive, Report 2006/197, <http://eprint.iacr.org/2006/097>.
6. Wagner D. A. *A generalized birthday problem* // Advances in Cryptology — CRYPTO'2002, Proceedings. Springer Verlag, 2002. P. 288–303.

7. Minder L., Sinclair A. *The extended k-tree algorithm* // The 19th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Proceedings. 2009. P. 586–595.

8. Bettale L., Faugere J.-C., Perret L. *Hybrid approach for solving multivariate systems over finite fields* // J. Math. Crypt. 2009. Vol. 3. P. 177–197.

ОБ ОЦЕНКАХ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ ДЖЕКОБСА — ЛЬЮИСА

И.Б. Бережной, Ю.С. Харин

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
berezhnoy@tut.by

Доклад посвящен оцениванию параметров модели дискретной авторегрессии Джекобса — Льюиса DAR(s) [1, 2]. Модель Джекобса — Льюиса для дискретного временного ряда x_t , $t \geq 1$ определяется стохастическим разностным уравнением порядка $s \geq 2$ со случайным запаздыванием:

$$x_t = \mu_t x_{t-\eta_t} + (1 - \mu_t)\zeta_t, \quad t > s,$$

где $\{x_1, \dots, x_s\}$, $\{\zeta_t, \eta_t, \mu_t : t > s\}$ — независимые в совокупности дискретные случайные величины на $\{\Omega, F, P\}$ со следующими распределениями вероятностей:

$$P\{\zeta_t = i\} = \pi_i, \quad i \in A, \quad \sum_{i \in A} \pi_i = 1;$$

$$P\{\eta_t = j\} = \lambda_j, \quad j \in \{1, \dots, s\}, \quad \sum_{j=1}^s \lambda_j = 1, \quad \lambda_s \neq 0;$$

$$P\{\mu_t = 1\} = 1 - P\{\mu_t = 0\} = \rho; \quad P\{x_k = i\} = \pi_i, \quad i \in A, \quad k \in \{1, \dots, s\}.$$

Теорема 1. Дискретный временной ряд, определяемый моделью Джекобса — Льюиса DAR(s), является однородной цепью Маркова порядка s с начальным распределением вероятностей $\pi_{i_1, \dots, i_{s+1}} = \pi_{i_1} \cdot \dots \cdot \pi_{i_s}$ и $(s+1)$ -мерной матрицей вероятностей одношаговых переходов $P(\pi, \lambda, \rho) = (p_{i_1, \dots, i_{s+1}})$:

$$p_{i_1, \dots, i_{s+1}} = (1 - \rho)\pi_{i_{s+1}} + \rho \sum_{j=1}^s \lambda_j \delta_{i_{s-j+1}, i_{s+1}}, \quad i_1, \dots, i_{s+1} \in A,$$

где δ_{jk} — символ Кронекера.

Данное представление для $(s+1)$ -мерной матрицы вероятностей одношаговых переходов для модели DAR(s) характеризуется числом параметров $D_{JL} = |A| + s - 1$.

Теорема 2. Если имеет место модель Джекобса — Льюиса и $\rho \neq 1$, то при увеличении длины наблюдаемого временного ряда $n \rightarrow \infty$ состоятельными оценками для параметров модели являются статистики $\tilde{\pi}, \tilde{\rho}, \tilde{\lambda}$:

$$\tilde{\pi}_i = \sum_{t=1}^n \delta_{x_t, i} / n, \quad i \in A;$$

$$\tilde{\rho} = \frac{\sum_{I: i_1 = \dots = i_{s+1}} (1 - \tilde{\pi}_{i_{s+1}})(\hat{p}_I - \tilde{\pi}_{i_{s+1}}) - \sum_{I: i_{s+1} \notin \{i_1, \dots, i_s\}} \tilde{\pi}_{i_{s+1}}(\hat{p}_I - \tilde{\pi}_{i_{s+1}})}{\sum_{I: i_1 = \dots = i_{s+1}} (1 - \tilde{\pi}_{i_{s+1}})^2 + \sum_{I: i_{s+1} \notin \{i_1, \dots, i_s\}} \tilde{\pi}_{i_{s+1}}^2};$$

$$\tilde{\lambda}_k = \frac{1}{N-1} \left(-1 + \frac{1}{\tilde{\rho} N^{s-1}} \sum_{I: i_{s-k+1} = i_{s+1}} (\hat{p}_I - (1 - \tilde{\rho})\tilde{\pi}_{i_{s+1}}) \right), \quad k \in \{1, \dots, s\},$$

где $N = |A|$, $I = \{i_1, \dots, i_{s+1}\}$, $\hat{P}(X_n) = (\hat{p}_{i_1, \dots, i_{s+1}})$ — эмпирическая матрица вероятностей одношаговых переходов, вычисленная по наблюдаемому вероятностному ряду X_n .

Данные оценки используются в качестве начального приближения при итерационном вычислении оценок максимального правдоподобия.

Литература

1. Харин Ю.С. *Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании*. Мн.: БГУ, 2008.
2. Харин Ю.С., Берник В.И., Матвеев Г.В., Агиевич С.В. *Математические и компьютерные основы криптологии*. Мн.: Новое знание, 2003.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ZDD ДИАГРАММ

Ю.А. Блинков, П.В. Фокин

ФГБОУ ВПО Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
 механико-математический факультет
 Астраханская 83, 410012 Саратов, Россия
 BlinkovUA@info.sgu.ru

Построению булевых базисов Гребнера дает решение целого ряда задач, таких как HFE (Hidden Field Equations) в криптографии, выполнимость булевых формул (SAT, Boolean satisfiability problem,) и моделирования квантовых вычислений. Алгоритмы построения базисов Гребнера имеют экспоненциальную сложность как по времени выполнения, так и по требуемой памяти. Для более компактного хранения булевых многочленов было предложено использовать ZDD (Zero-suppressed Decision Diagram) диаграммы [1].

Двоичные диаграммы решений (BDD, Binary Decision Diagram) [2] являются удобным инструментом представления и оперирования булевыми функциями и широко используются в различных областях. BDD диаграммы можно использовать для представления булевых полиномов. В случае когда порядок переменных для всех путей остается постоянным, то такая диаграмма называется упорядоченной (OBDD, Ordered BDD).

OBDD будет двоичной диаграммой с отбрасыванием незначащих нулей (Zero-suppressed Decision Diagram, ZDD) если она не содержит одинаковых поддиаграмм и из нее исключены те вершины, 1-ребра которых заканчиваются в терминальной вершине, соответствующей 0. Наиболее характерные различия представленных диаграмм, на примере булевого полинома $p = abc + ab + bc + b + c + 1$ и порядком переменных $a \succ b \succ c$, показаны на рис. 1–3.

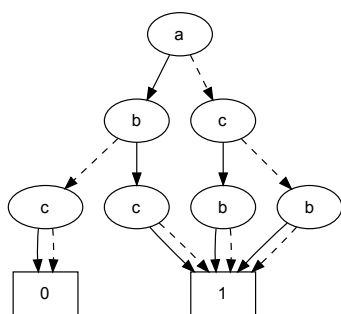


Рис. 1. Диаграмма BDD

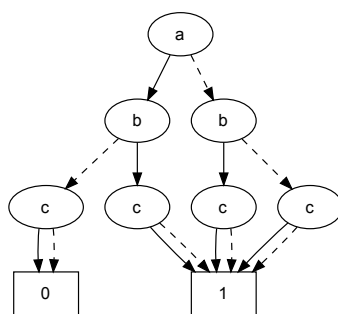


Рис. 2. Диаграмма OBDD

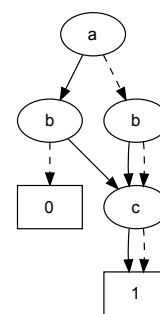


Рис. 3. Диаграмма ZDD

В докладе будут даны оценки по требуемой памяти для максимального авторедуцированного множества при списочном представлении многочленов и оценка используемой памяти для хранения этого же множества в виде ZDD диаграмм.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 01-10-01-00200 и 12-07-00294).

Литература

1. Brickenstein M., Dreyer A., Greuel G.-M., Wedler V., Wienand O. *New developments in the theory of Gröbner bases and applications to formal verification* // J. Pure Appl. Algebra. 2009. Vol. 213, No. 8. P. 1612–1635.
2. Lee. C. Y. *Representation of Switching Circuits by Binary-Decision Programs* Bell Systems Tech. J. 1959. Vol. 38. P. 985–999.
3. Minato S.. *Zero-suppressed bdds for set manipulation in combinatorial problems* // Proc. 30th Int. Design Automation Conf, DAC '93. New York, USA, ACM. 1993. P. 272–277.

К ОПТИМАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ФАДДЕЕВА — БЕРЛЕКЕМПА

В.А. Богрецов¹, В.А. Липницкий²

¹ Белорусский Государственный Университет, Минск, Беларусь
bogrecov@gmail.com

² Военная академия Республики Беларусь, Минск, Беларусь
valipnitski@yandex.ru

Решение алгебраических уравнений над полями Галуа, особенно характеристики два, имеет свою неизгладимую специфику. Многочисленные приложения данной задачи в инфокоммуникациях реализуются методом Фаддеева — Берлекемпа [1], предложенного в середине XX века названными авторами. Суть метода состоит в факторизации многочлена, задающего решаемое уравнение путем вычисления серии наибольших общих делителей этого многочлена со специально подбираемыми полиномами. Тем самым решение алгебраического уравнения тесно связано с нахождением его делителей вида $x - a$. Анализ алгоритма Фаддеева — Берлекемпа, в контексте нахождения только делителей первой степени, позволяет осуществить значительные упрощения в его реализации и тем самым уменьшить временные затраты на его выполнение.

В основе рассматриваемой модификации алгоритма Фаддеева — Берлекемпа лежит следующий факт. Если в поле $GF(q)$ зафиксировать некоторое подмножество элементов $M \subset GF(q)$, $|M| \stackrel{\text{def}}{=} k$, то вычисление наибольшего общего делителя $\gcd(f(x), h(x))$, где $h(x) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{a \in M} (x - a)$ будет требовать меньше вычислительных ресурсов, чем выполнение k делений многочлена $f(x)$ степени $n > n_0$ на многочлены $x - a$, $a \in M$. При этом значение n_0 зависит от конкретного поля. Поэтому, для нахождения делителей первой степени многочлена $f(x) \in GF(2^m)[x]$ можно поступать следующим образом. Пусть $GF(q) = \{a_0, \dots, a_q\}$, $q = 2^m$. Вычисляются последовательно

$$h_{i_1,1}(x) = (x - a_{i_1})(x - a_{i_1+1}), \quad i_1 = 2t, \quad 1 \leq i_1 \leq 2^m,$$

и далее

$$h_{i_j,j}(x) = h_{i_{j-1},j-1}(x)h_{i_{j-1}+1,j-1}(x), \quad i_{j-1} = 2t, \quad 1 \leq i_j \leq 2^{m+1-j}, \quad 1 < j \leq m.$$

Затем, данные произведения располагаются в бинарном дереве высоты m с корнем $x^q - x = \prod_{a \in GF(q)} (x - a)$ [2]. Построенное дерево зависит только от рассматриваемого поля и может применяться для нахождения корней $f(x)$ следующим образом. На первом шаге алгоритма, вычисляется $d_{1,m-1}(x) = \gcd(h_{1,m-1}(x), f(x))$. Если $\deg h_{i,m-1} = n$, то алгоритм продолжает работу с левым поддеревом с корнем $h_{1,m-1}(x)$ для многочлена $d_{1,m-1}(x)$. Если $\deg h_{i,m-1} = 0$, то алгоритм продолжает работу с правым поддеревом с корнем $h_{2,m-1}(x)$

для многочлена $f(x)$. Если же $0 < \deg d_{1,m-1} < n$, то выполняются оба шага. Таким образом, находясь в узле $h_{i,s}$, необходимо вычислить $d_{2i-1,s-1}(x) = \gcd(h_{2i-1,s-1}(x), g(x))$, где либо $g(x) = d_{i,s}(x)$, либо $g(x) = f(x)$. Если $0 < \deg d_{2i-1,s-1} < \deg g$, то необходимо также вычислить $d_{4i-1,s-2}(x) = \gcd(h_{4i-1,s-2}(x), g(x))$. Так как в среднем случае корни многочлена находятся на некотором удалении друг от друга, то случай $\deg d_{i,s} = 1$ (что означает, что найден корень многочлена) будет встречаться раньше, чем алгоритм дойдет до листовых узлов дерева.

Литература

1. Василенко О.Н. *Теоретико-числовые алгоритмы в криптографии*. М.: МЦМНО, 2003.
2. Лидл Р., Нидеррайтер Г. *Конечные поля*. Т. 1. М.: Мир, 1988. 67 с.

ОБ ОЦЕНИВАНИИ ПАРАМЕТРОВ ЦЕНЗУРИРОВАННОГО AR(p)-ВРЕМЕННОГО РЯДА ПО МЕТОДУ МОМЕНТОВ

И.А. Бодягин

Белорусский государственный университет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
bodiagin@bsu.by

Классических случай, когда все значения авторегрессионного временного ряда известны полностью, подробно изучен [1, 2]. Однако на практике наблюдаемые данные часто подвержены искажениям. В настоящей работе рассматривается такое искажение, как цензурирование справа [3].

Пусть $x_t \in \mathbb{R}$ — исходный нецензурированный временной ряд AR(p), задаваемый стохастическим разностным уравнением [1]:

$$x_t = \sum_{i=1}^p \theta_i x_{t-i} + u_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

где $\theta_1, \dots, \theta_p$ — коэффициенты авторегрессии; $\{u_t\}$ — независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, имеющие нормальный закон распределения вероятностей:

$$\mathcal{L}\{u_t\} = \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Полагается, что временной ряд x_t подвержен цензурированию справа с уровнем цензурирования $c \in \mathbb{R}$, т.е. в моменты времени, когда $x_t \geq c$, регистрируются лишь наступления случайных событий $A_t^* = \{x_t \geq c\}$.

Построим аналогично [3] вспомогательный временной ряд:

$$y_t = \begin{cases} x_t, & x_t < c, \\ c, & x_t \geq c. \end{cases} \quad (1)$$

Для вспомогательного временного ряда (1) в работе найдены математическое ожидание $m = E\{y_t\}$ и начальные смешанные моменты второго порядка $m_\tau = E\{y_t y_{t+\tau}\}$, $\tau = 1, \dots, p$. Приравняв m к выборочному среднему $T^{-1} \sum_{t=1}^T y_t$ и m_τ — к выборочным смешанным моментам $(T-\tau)^{-1} \sum_{t=1}^{T-\tau} y_t y_{t+\tau}$, $\tau = 1, \dots, p$, построим оценки модельных параметров по методу моментов. Доказана состоятельность построенных оценок.

Литература

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. *Анализ временных рядов. Прогноз и управление*. Т. 1. М.: Мир, 1974.
2. Андерсон Т. *Статистический анализ временных рядов*. М.: Мир, 1976.
3. Park J. W., Genton M. G., Ghosh S. K. *Censored time series analysis with autoregressive moving average models* // The Canadian Journal of Statistics. 2007. Vol. 35. № 1. P. 151–168.

АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ПРИНЯТИЮ РЕШЕНИЙ В ИМИТАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ МОДЕЛИРОВАНИЯ БОЕВЫХ ДЕЙСТВИЙ

В.М. Булойчик¹, В.И. Малюгин², Е.С. Макарова¹

¹ НИЦ Моделирования военных действий УО «Военная академия РБ», Славинского 4, 220103 Минск, Беларусь

² Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

Искусству ведения военных действий с давних пор уделялось большое внимание. На протяжении многих веков от знаний, опыта и действий военачальников зависела жизнь не только миллионов людей, но и целых цивилизаций. Опыт военачальников передавался из поколения в поколение, а совершенствовался в ходе реальных боевых действий, ценою человеческих жизней.

В настоящее время в целях обучения будущих командиров, а также анализа и прогнозирования исхода боевых действий различного масштаба широко применяется моделирование. Такой подход позволяет с меньшими затратами и потерями достичь поставленной цели, обосновать и принять эффективное решение.

При моделировании боевых действий наибольшее распространение получило имитационное моделирование, в виду сложности таких действий как таковых. Имитационные модели позволяют изучить интересующую ситуацию с необходимой степенью детализации, используя разные принципы формирования модельного времени. А многократное проигрывание конкретной боевой задачи позволяет восполнить недостающие данные.

В общем случае имитационная система моделирования боевых действий состоит из множества типовых взаимодействующих объектов. Основной частью каждого такого объекта является подмодель управления этим объектом, которая должна обеспечить не только принятие решений о поведении объекта в зависимости от определенных параметров, но и «объяснить», почему в данной ситуации было выбрано именно такое решение, показать, что оно является наиболее подходящим из всех возможных.

В каждый момент модельного времени имитационная система моделирования боевых действий описывается некоторым множеством состояний $S = (S_1, S_2, \dots, S_N)$, где S_i — состояние i -го объекта системы, $i \in (1, N)$, N — количество объектов. Основной задачей принятия решений является определение для каждого входящего в состав системы объекта нового состояния S'_i , в которое он должен перейти не ухудшая эффективность функционирования всей системы. Таким образом, приходим к многокритериальной многошаговой задаче принятия решений.

Выделяют детерминированные многошаговые задачи принятия решений, многошаговые задачи принятия решений в условиях неопределенности (в условиях риска, полной неопределенности, в условиях конфликта), многошаговые задачи принятия решений на основе марковской модели [1].

До настоящего времени большинство систем имитационного моделирования использовало марковскую модель принятия решений. Однако, как показывает опыт, такой подход

может приводить к неожиданным результатам в процессе моделирования. Учитывать все предыдущие состояния объекта важно и в целях последующего анализа принятых решений.

При принятии решений в многокритериальных задачах используются различные способы свертывания многокритериального показателя эффективности [2].

Литература

1. Черноруцкий И. Г. *Методы принятия решений*. СПб: БХВ-Петербург, 2005.
2. Марков Л. Н., Подкопаев П. А. *Основы исследования операций*. Минск: ВА РБ, 2000.
3. Вентцель Е. С. *Исследование операций. Задачи, принципы, методология*. М.: Наука, 1980.

ОБ ОДНОЙ q -БЛОЧНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВКРАПЛЕНИЙ В ДВОИЧНУЮ ЦЕПЬ МАРКОВА

Е. В. Вечерко

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
vecherko@bsu.by

Понятие вкрапление означает замену некоторых символов передаваемой по открытому каналу связи последовательности другими символами. Такая замена позволяет скрыть конфиденциальное сообщение. Главной задачей является обеспечение надежности такого процесса вкрапления. В литературе недостаточно внимания уделено теоретическим вопросам стеганографической защиты информации, в частности, актуальна проблема построения и анализа математических моделей вкраплений [1–3].

Введем обозначения: $V = \{0, 1\}$ — двоичный алфавит, V_T — пространство двоичных T -векторов, $\mathfrak{L}\{\xi\}$ — закон распределения вероятностей случайной величины ξ , $\mathfrak{B}(\theta)$ — закон распределения вероятностей Бернулли.

Будем предполагать, что контейнер для вкрапления сообщения есть двоичная последовательность $x = (x_1, x_2, \dots, x_T) \in V_T$, $x_t \in V$, $t = 1, \dots, T$, являющаяся однородной двоичной цепью Маркова 1-го порядка с матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{v_0, v_1})$, $v_0, v_1 \in V$:

$$P = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon & 1 - \varepsilon \\ 1 - \varepsilon & 1 + \varepsilon \end{pmatrix}, \quad p_{v_0, v_1} = \mathbf{P}\{x_{t+1} = v_1 | x_t = v_0\} = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{v_0 + v_1} \varepsilon), \quad |\varepsilon| < 1. \quad (1)$$

Здесь ε — параметр модели: случай $\varepsilon = 0$ соответствует схеме независимых испытаний и исследован в [2]; случай $\varepsilon > 0$ учитывает зависимость типа притяжения, $\varepsilon < 0$ — зависимость типа отталкивания. Отметим, что цепь Маркова (1) удовлетворяет условиям эргодичности [4] и имеет равномерное стационарное распределение вероятностей $\pi = (1/2, 1/2)$.

Обычно до вкрапления в контейнер сообщение подвергается криптографическому преобразованию, поэтому далее полагаем, что сообщение $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_M) \in V_M$, $M \leq T$, является последовательностью M независимых случайных величин Бернулли: $\mathfrak{L}\{\xi_t\} = \mathfrak{B}(\theta_1)$, $\mathbf{P}\{\xi_t = j\} = \theta_j$, $j \in V$, $\theta_1 = 1 - \theta_0$, $t = 1, \dots, M$. На практике, как правило, ξ_t имеет симметричное распределение вероятностей: $\theta_1 = \theta_0 = 1/2$.

Механизм вкрапления имеет вид: $Y_t = \gamma_t \xi_{\tau_t} + (1 - \gamma_t)x_t$, где $Y = (Y_1, \dots, Y_T) \in V_T$ — случайная стегопоследовательность, содержащая сообщение; $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_T) \in V_T$ — стегоключ, задающий точки вкрапления.

Стегоключ γ имеет блочную структуру. Вначале разобьем последовательность x на блоки длины $q > 1$ ($T = Kq$): $x_{(1)} = x_1^q, x_{(2)} = x_{q+1}^{2q}, \dots, x_{(K)} = x_{(K-1)q+1}^{Kq}$. Введем вспомогательные независимые случайные величины $\zeta_k \in V$, $\mathfrak{L}\{\zeta_k\} = \mathfrak{B}(\delta_q)$, $k = 1, \dots, K$, которые

отвечают за выбор блоков $\{x_{(k)}\}$ для вкрапления сообщения: если $\zeta_k = 1$, то в один из наудачу выбранных битов блока $x_{(k)}$ вкрапляется один бит сообщения, иначе вкрапление не производится. Сразу же отметим, что для такой модели стежоключа максимальная пропускная способность стegosистемы уменьшается до $K = T/q$ бит и мощность множества всевозможных стежоключей сжимается до $(1+q)^{T/q} < 2^T$.

Отметим, что если $\theta_1 = \theta_0 = 1/2$, то одномерное распределение вероятностей стегопоследовательности Y не несет никакой информации о параметрах модели ε, δ_q

Для q -блочной модели вкраплений в двоичную цепь Маркова представлен полиномиальный алгоритм для вычисления значения функции правдоподобия, на основе которого построены оценки максимального правдоподобия параметров модели ε, δ_q . В случае $q = 1$ построены статистические оценки параметров, основанные на частотных статистиках, и установлена их состоятельность.

Литература

1. Pevny T., Bas P., Fridrich J. *Steganalysis by subtractive pixel adjacency matrix* // Proceedings of the 11-th ACM Multimedia and Security Workshop. Princeton, 2009. P. 75–84.
2. Пономарев К.И. *Параметрическая модель вкрапления и ее статистический анализ* // Дискретная математика. 2009. Т. 21, №4. С. 148–157.
3. Харин Ю.С., Вечерко Е.В. *О некоторых задачах статистической проверки гипотез в стеганографии* // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. №4. С. 5–12.
4. Кемени Дж., Снелл Дж. *Конечные цепи Маркова*. М.: Наука, 1982.

РИСК ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОДЕЛИ БЛУМФИЛДА ПО ОБУЧАЮЩИМ ДАННЫМ

В.А. Волошко

НИИ Прикладных проблем математики и информатики БГУ
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

{valeravoloshko}@yandex.ru

Введение. Пусть $\{x_t : t \in \mathbb{Z}\}$ — центрированный гауссовский стационарный временной ряд с неизвестным спектром $S(\lambda) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} E\{x_0 x_j\} \cos(j\lambda) \geq 0$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$, $X = (x_t)_{t=1}^{T_f}$ — прогнозируемый фрагмент длины $T_f \in \mathbb{N}$ и $\tilde{X} = (\tilde{x}_t)_{t=1}^T$ — обучающий фрагмент длины $T \in \mathbb{N}$. Временные ряды $\{x_t\}$ и $\{\tilde{x}_t\}$ независимы и одинаково распределены. Рассматривается задача: по фрагментам X, \tilde{X} построить прогноз для x_0 и исследовать его асимптотические свойства. Вследствие гауссовости $\{x_t\}$, оптимальный в смысле риска $E\{(\hat{x}_0 - x_0)^2\}$ прогноз [1] $\hat{x}_0^* = E\{x_0 | X\}$ линеен по X : $\hat{x}_0^* = \sum_{t=1}^{T_f} a_{T_f, t}^*(S) x_t$. Поскольку спектр $S(\cdot)$ неизвестен, будем аппроксимировать оптимальный прогноз на основе оценки \hat{S} , построенной по \tilde{X} :

$$\hat{x}_0 = \sum_{t=1}^{T_f} a_{T_f, t}^*(\hat{S}) x_t, \quad \hat{S}(\lambda) = \exp\left(\sum_{j=-p}^p c_j \cos(j\lambda)\right), \quad 0 < p < T/2, \quad \lambda \in \Pi, \quad (1)$$

$$c_\tau = T^{-1} \sum_{t=1}^T \ln \left| y\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \right|^2 \cos\left(\frac{2\pi t \tau}{T}\right), \quad \tau \in \mathbb{Z}, \quad y(\lambda) = T^{-1/2} \sum_{t=1}^T \tilde{x}_t e^{it\lambda}, \quad \lambda \in \Pi. \quad (2)$$

Основной результат. Введем некоторые обозначения: $1\{m | n\} = 1$, если $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ делит $n \in \mathbb{Z}$, иначе $1\{m | n\} = 0$, $\kappa_n = 1\{2 | n\}$, $\varepsilon_n = 1 - \kappa_n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{P} = \{1, \dots, p\}$,

$$\Theta_n(\lambda) = \sum_{j \in \mathcal{P}^n, z = j_1 \pm \dots \pm j_n} 1\{T | z\} \prod_{r=1}^n \cos(j_r \lambda), \quad \Upsilon_n(\lambda) = \sum_{j \in \mathcal{P}^n} (1 + \kappa_T (-1)^{j_1 + \dots + j_n}) \prod_{r=1}^n \cos(j_r \lambda),$$

где $\lambda \in \Pi$. Для $K : \Pi^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$[K]_{j \in \mathbb{Z}^n} = (2\pi)^{-n} \int_{\Pi^n} K(z) \prod_{r=1}^n \cos(j_r z_r) dz, \quad \tilde{K}(\lambda) = \sum_{j \in \mathcal{P}^n} [K]_j \prod_{r=1}^n \cos(j_r \lambda),$$

$$V : \Pi \rightarrow \mathbb{R}, \quad \chi(V) = \overline{\lim}_{\tau \rightarrow +\infty} |[V]_\tau|^{1/\tau},$$

$$H(\lambda) = 2 \sum_{j>0} [S]_j \sin(j\lambda), \quad f(\lambda) = H'(\lambda)/S(\lambda), \quad g(\lambda) = H(\lambda)/S(\lambda) \sin \lambda, \quad h = f^2 + g^2/2,$$

$$\Psi(\nu, \mu) = (H(\nu) + H(\mu))/2 \sin \frac{\nu + \mu}{2}, \quad \Phi(\nu, \mu) = 2\Psi^2(\nu, \mu)/S(\nu)S(\mu), \quad \nu, \mu \in \Pi,$$

$$Q(\lambda) = 2 \sum_{j>p} [\ln S]_j \cos(j\lambda), \quad Q_0 \equiv 1, \quad Q_1 = \pi^2 \Theta_2/3 + 2(\tilde{f} + \Upsilon_1 \ln 2),$$

$$Q_2 = Q_1^2/2 + (\pi^2 \Upsilon_2 + 8A\Theta_3)/3 + 2\tilde{\Phi} + \tilde{h}, \quad A = \sum_{n>0} n^{-3}.$$

Для $q > 1$ введем пространство Cr_S^q функций $\theta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, таких что $\theta(T) < T/2$ и при $T \rightarrow +\infty$ равномерно по $\lambda \in \Pi$, $0 \leq p < \theta(T)$, $E\{\exp(q|\sum_{j=1}^p (c_j - Ec_j) \cos(j\lambda)|)\} = O(1)$, где c_j определены (2).

Теорема. Если $[\ln S]_0 > -\infty$, $\chi(\ln S) < 1$, $\theta \in \text{Cr}_S^4$ и $T_f = +\infty$, то для прогноза (1) $E\{(\hat{x}_0 - x_0)^2\} = e^{[\ln S]_0} (\sum_{j=0}^2 [Q_j e^{Q_j}]_0 + O(p^6/T^3))$ равномерно по $p < \theta(T)$ при $T \rightarrow +\infty$.

Следствие. Если $[\ln S]_0 > -\infty$, $\chi(\ln S) < \chi_+ < 1$, $\theta \in \text{Cr}_S^4$ и $T_f = +\infty$, то для прогноза (1) равномерно по $p < \min\{\theta(T), T/3\}$ при $T \rightarrow +\infty$:

$$E\{(\hat{x}_0 - x_0)^2\} = e^{[\ln S]_0} (1 + K_1 p/T + (K_2 p^2 + K_3 p + K_4)/T^2 + O(p^6/T^3 + \chi_+^p)),$$

$$K_1 = \pi^2/6, \quad K_2 = \pi^4/72 + A, \quad K_3 = (1 + \kappa_T) ((2 + \ln 2)\pi^2/12 + \ln^2 2) + \pi^4/144 - A,$$

$$K_4 = -\varepsilon_p (\kappa_T (\pi^2/12 + 2 \ln 2) + \pi^2/12) \ln 2 + [h]_0 - ([\Phi]_{0,0} + [f]_0^2)/2 + (\pi^2/24 + \ln 2)(f(0) - [f]_0) + (\pi^2/24 + \kappa_T \ln 2)(f(\pi) - [f]_0).$$

Литература

1. Колмогоров А. Н. Интерполяция и экстраполяция стационарных случайных последовательностей // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1941. Т. 5. № 1. С. 3–14.

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА КРИПТОАНАЛИЗА, ОСНОВАННОГО НА СООТНОШЕНИИ ВРЕМЯ — ПАМЯТЬ ДЛЯ ГЕНЕРАТОРОВ С САМОУПРАВЛЕНИЕМ.

А.Н. Гайдук

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
GaidukAN@bsu.by

Криптоанализ основанный на соотношении время-память состоит из двух стадий: подготовительной и активной. Во время подготовительной стадии криптоаналитик проводит предвычисления и создает большие объемы данных, которые используются во время активной стадии, когда необходимо за сравнительно короткое время определить ключ криптосистемы. Введем следующие обозначения: N — размер пространства поиска; T — вычислительная

сложность атаки; M — необходимый объем памяти; P — вычислительная сложность подготовительной стадии; D — количество данных доступных во время атаки.

В 1980 Хэлман [1] предложил подход для криптоанализа любого блочного шифра, размер ключевого пространства которого равен N . Необходимое время T и необходимый объем памяти M связаны следующим соотношением $TM^2 = N^2$ для $1 \leq T \leq N$. В работах [2,3] для поточных шифров была предложена атака в основе, которой лежит соотношение $TM = N$, для $1 \leq T \leq D$, где D количество бит выходной последовательности доступных криптоаналитику. В работе [4] для поточных шифров было получено соотношение $TM^2D^2 = N^2$ $D^2 \leq T \leq N$, а также введено понятие *sampling resistance* $R = 2^{-k}$, которое означает возможность построения состояний поточных шифров, начиная из которых поточный шифр выработает k первых нулей. В данной работе предлагается расширить это понятие.

Рассмотрим генератор с самоуправлением, основанный на линейных регистрах сдвига для которого выполнены следующие свойства:

1) уравнение для выходного бита генератора зависит от внутреннего состояния линейным образом;

2) для описания движения генератора возможно составить линейные уравнения относительно внутреннего состояния;

3) число различных вариантов управления движением генератора равно K .

Перебор векторов управления позволяет описать такой генератор $K^d 2^{d+1}$ системами линейных уравнений, где $d = (\log N - 1)/(\log K + 1)$. Предлагается на диске хранить не состояния, а последовательность управления и выходную последовательность. Данная модификация, например, для генератора A5/1 позволяет улучшить оценку R с 2^{-16} полученной в работе [4] до $R = 2^{-21}$.

Литература

1. Hellman M. E. *A cryptanalytic time-memory tradeoff* // IEEE Transactions on Information Theory. 1980. Vol. 26. P. 401–406.
2. Babbage S. *A Space/Time Tradeoff in Exhaustive Search Attacks on Stream Ciphers* // European Convention on Security and Detection, IEE Conference Publication No. 408, May 1995.
3. Golic J, D *Cryptanalysis of alleged A5 stream cipher* // LNCS. 1997. Vol. 1233. P. 239–255.
4. Biryukov A., Shamir A. *Cryptanalytic time/memory/data tradeoffs for stream ciphers* // LNCS. 2000. Vol. 1976. P. 1–13.

МОДУЛЯРНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ СЕКРЕТА И РАВНООСТАТОЧНЫЕ ИДЕАЛЫ

Т. Галибус, Г. Матвеев

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
tan2tan@gmail.com, matveev@bsu.by

В кольце многочленов от нескольких переменных над полем Галуа $F_q[x_1, x_2, \dots, x_n] = F_q[x]$ есть все необходимое для модулярного разделения секрета [1]. В качестве секрета выбирается полином $s(x) \in F_q[x]$, а в качестве модуля участника — нульмерный идеал. В этом случае корректно определен вычет $s(x) \pmod{I}$, при условии, что задано мономиальное упорядочение, а для восстановления секрета имеется CRT-алгоритм [3]. Разумеется, все эти вычисления основаны на теории базисов Гребнера. При этом мы ограничиваемся лишь случаем обратного lex-упорядочения мономов.

Для построения совершенной схемы, реализующей произвольную структуру доступа необходимы специально сконструированные для этой цели идеалы I_1, I_2, \dots, I_k , обладающие свойством, названным нами *равноостаточностью*.

Нульмерные идеалы I_1, I_2, \dots, I_l называются *равноостаточными*, если $RT(I_{i_1}I_{i_2}\dots I_{i_k}) = RT(I_{j_1}I_{j_2}\dots I_{j_k})$, где $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq l$, $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq l$, $k = 1, 2, \dots, n$, где $RT(I)$ — множество приведенных мономов.

Все рассматриваемые нами идеалы триангулируемы и автоматически нульмерны, а значит, приведенный базис Гребнера каждого такого идеала $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ имеет вид:

$$t_i = 1 \cdot x_i^{d_i} + a_{d_i-1}x_i^{d_i-1} + \dots + a_1x_i + a_0, a_{d_i-1}, \dots, a_1, a_0 \in F_q[x_1, x_2, \dots, x_{i-1}],$$

Положим $D(I) = (d_1, d_2, \dots, d_n)$.

Для равноостаточности существенным является еще и свойство эквивпроективности аффинного многообразия, определение которого можно найти в работе [2].

Два нульмерных идеала I_1 и I_2 называются *сильно разделенными*, если их нули удовлетворяют условию: $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in V(I_1), (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) \in V(I_2) \Rightarrow \alpha_i \neq \beta_j, 1 \leq i, j \leq n$.

Теорема 1. Пусть триангулируемые идеалы I_1, I_2, \dots, I_k попарно сильно разделены, выполнено условие $D(I_1) = D(I_2) = \dots = D(I_k)$, а многообразия $V(I_1), V(I_2), \dots, V(I_k)$ — эквивпроективны. Тогда идеалы I_1, I_2, \dots, I_k равноостаточны.

Нам удалось показать, что к числу равноостаточных идеалов относятся и идеалы симметрических отношений, введенные Обри и Валибузом [2].

Теорема 2. Идеалы I_1, I_2, \dots, I_k симметрических отношений, соответствующие попарно взаимно простым сепарабельным многочленам $g_1, g_2, \dots, g_k, \deg g_i = n, i = 1, 2, \dots, k$ являются равноостаточными.

Теорема 3. Используя равноостаточные идеалы симметрических отношений можно построить совершенную модулярную схему разделения секрета для произвольной структуры доступа и идеальную схему для пороговой структуры доступа в кольце полиномов от нескольких переменных над полем Галуа.

Случай многочленов от одной переменной рассмотрен в работах [4, 5].

Литература

1. Asmuth C.A., Bloom J., *A Modular Approach to Key Safeguarding* // IEEE Transactions on Information Theory. 1983. Vol. 29. P. 156–169.
2. Aubry P., Valibouze A., *Using Galois Ideals for Computing Relative Resolvents* // J. Symbolic Computation. 2000. Vol. 30. P. 635–651.
3. Becker T., Weispfenning V., *Gröbner Bases, A Computational Approach to Commutative Algebra*. Graduate Texts in Mathematics. Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag, 1993.
4. Galibus T., Matveev G., *Generalized Mignotte Sequences in Polynomial Rings* // Electronic Notes on Theoretical Computer Science. 2007. Vol. 186. P. 39–45.
5. Galibus T., Matveev G., Shenets N., *Some structural and security properties of the modular secret sharing* // SYNASC'08. V. Negru [et al.] eds. IEEE Comp. Soc. CPC, California, 2009. P. 197–200.

СРАВНЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ СЛОЖЕНИЯ ПО МОДУЛЮ 2^n И ПО МОДУЛЮ 2

В.А. Галинский

Белгосуниверситет, НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь

GalinskijVA@bsu.by

Пусть $X_i = (x_{i1}, \dots, x_{i1})^\top$, $i = \overline{1, m}$ — последовательность независимых случайных булевых векторов, координаты которых являются независимыми случайными величинами с распределениями вероятностей

$$P\{x_{ij} = 1\} = p_j, \quad P\{x_{ij} = 0\} = 1 - p_j, \quad 0 < p_j < 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

При сложении по модулю 2^n вектор X_i будем отождествлять с числом $x_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}2^{j-1}$. Пусть $z = (x_1 + \dots + x_m) \bmod 2^n$. Используя двоичное представление числа z , определим булев вектор $Z = (z_n, \dots, z_1)^\top$. Координаты вектора Z удовлетворяют следующим соотношениям:

$$z_1 = I_1 \bmod 2, \quad z_j = (I_j + \sigma_{j-1}) \bmod 2, \quad j = \overline{2, n}, \quad (1)$$

где $I_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}$, $j = \overline{1, n}$, $\sigma_1 = [I_1/2]$, $\sigma_j = [(I_j + \sigma_{j-1})/2]$, $j = \overline{2, n}$.

Обозначим $(y_n, \dots, y_1)^\top$ координаты вектора $Y = X_1 \oplus \dots \oplus X_m$. Требуется найти вероятности $\delta_j(m) = P\{z_j = y_j\}$, $j = \overline{1, n}$.

Учитывая, что координаты вектора Y удовлетворяют соотношениям $y_j = I_j \bmod 2$, $j = \overline{1, n}$, из (1) получим, что $\delta_1(m) = 1$, а

$$\delta_j(m) = P\{\sigma_{j-1} \bmod 2 = 0\}, \quad j = \overline{2, n}. \quad (2)$$

Для вычисления (2) необходимо найти распределения вероятностей случайных величин σ_{j-1} , $j = \overline{2, n}$, $q_{j-1,k} = P\{\sigma_{j-1} = k\}$, $k = \overline{0, m-1}$.

В [1] показано, что последовательность переносов $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ образует неоднородную цепь Маркова с матрицами вероятностей одношаговых переходов $P^{(j)} = (p_{ts}^{(j)} = P\{\sigma_j = s | \sigma_{j-1} = t\}, 0 \leq s, t \leq m-1)$, $j = \overline{2, n}$, и вектором начальных вероятностей $\pi = (\pi_i = P\{\sigma_1 = i\}, i = \overline{0, m-1})^\top$:

$$p_{ts}^{(j)} = P\{I_j = 2s - t\} + P\{I_j = 2s - t + 1\}, \quad \pi_i = P\{I_1 = 2i\} + P\{I_1 = 2i + 1\},$$

где $P\{I_j = u\} = \binom{m}{u} p_j^u (1 - p_j)^{m-u}$.

На основе результатов [1] получены следующие соотношения для вероятностей (2).

Теорема. Для $j = \overline{2, n}$:

$$\delta_j(m) = \begin{cases} q_{j-1,0} + q_{j-1,2} + \dots + q_{j-1,m-1}, & \text{если } m - \text{нечетно,} \\ q_{j-1,0} + q_{j-1,2} + \dots + q_{j-1,m-2}, & \text{если } m - \text{четно,} \end{cases}$$

$$\text{где } (q_{j-1,0}, \dots, q_{j-1,m-1})^\top = \begin{cases} \pi, & \text{если } j = 2, \\ \prod_{k=2}^{j-1} P^{(k)}\pi, & \text{если } j > 2. \end{cases}$$

Литература

1. Галинский В. А. *Вероятностные свойства переносов при сложении по модулю 2^n* // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10, вып. 1. С. 129–130.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ РЕЙТИНГОВЫХ СИСТЕМ ПРИ ОТСУТСТВИИ КЛАССИФИЦИРОВАННОЙ ОБУЧАЮЩЕЙ ВЫБОРКИ

Н.В. Гринь¹, В.И. Малюгин²

¹ Гродненский государственный университет им. Я. Купалы
Ожешко 22, 230023 Гродно, Беларусь
lebnat@tut.by

² Белорусский государственный университет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
malugin@bsu.by

Задача оценки кредитоспособности (платежеспособности) предприятий-заемщиков является одной из важнейших в рамках системы управления банковскими рисками. Решение данной задачи основано на использовании экспертных методик, а также статистических ал-

горитмов классификации потенциальных заемщиков по степени кредитного риска с присвоением им соответствующего кредитного рейтинга [1, 2]. С точки зрения статистической теории принятия решений данная задача формулируется следующим образом.

Пусть потенциальный заемщик банка характеризуется случайным вектором показателей (признаков) $x = (x_i) \in X \subseteq \mathfrak{R}^N$. Заемщик может принадлежать одному из $L \geq 2$ классов кредитоспособности $\{\Omega_l\}$ ($l \in S(L) = \{1, \dots, L\}$). В общем случае предполагается, что истинный номер класса $d^0 = d^0(x) \in S(L)$, к которому принадлежит заемщик, является дискретной случайной величиной с распределением вероятностей: $P\{d^0 = l\} = \pi_l > 0$, $\pi_0 + \dots + \pi_L = 1$, а случайный вектор признаков $x \in X$ для заемщиков из класса Ω_l описывается некоторой условной плотностью распределения $p_l(x)$. Вероятностные характеристики классов $\{\pi_l, p_l(x)\}$ не известны, но имеется обучающая выборка наблюдений $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ объема n . Целью оценки кредитоспособности (кредитного риска) заемщика является разработка решающего правила $d(x)$ отнесения заемщика, характеризуемого вектором признаков $x = (x_i) \in X \subseteq \mathfrak{R}^N$, к одному из $L \geq 2$ классов кредитоспособности $\{\Omega_l\}$.

В рамках данного исследования предполагается, что вектор классификации обучающей выборки $d = (d_i) \in S^n(L)$, а также число классов кредитоспособности L не известны. Обучающая выборка предприятий-заемщиков имеет пространственные факторы неоднородности, такие как отраслевая принадлежность, размер предприятия, а также включает подвыборки, соответствующие различным временным интервалам наблюдения (различным годам, кварталам). При отсутствии классифицированной обучающей выборки для построения решающего правила $d(x)$ используются только значения показателей состояния заемщиков $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, полученные на основании документов финансовой отчетности предприятий. Это существенно ограничивает класс возможных статистических алгоритмов классификации.

В докладе исследуются возможность применения для решения указанной задачи комбинации нескольких последовательно реализуемых статистических методов, включая: 1) формирование так называемого интегрального показателя (индикатора) с помощью метода главных компонент и выбор информативных признаков в виде главных компонент и соответствующих им исходных финансовых показателей; 2) кластерный анализ используемой выборки в сформированных признаковых пространствах; 3) дискриминантный анализ новых наблюдений с помощью алгоритмов, оцененных по классифицированной на предыдущем этапе выборке. Приводятся результаты апробации предлагаемого подхода на основе выборки промышленных предприятий.

Литература

1. Малюгин В. И., Гринь Н. В. *Об эффективности статистических алгоритмов кредитного скоринга* // Банковский вестник. 2010. № 4. С. 39–46.
2. *Credit Ratings: Methodologies, Rationale and Default Risk* / Ed. M. K. Ong. London Risk Books, 2002.

ПОВОЧНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ИЗ ОТВЕРСТИЯ В ЭКРАНЕ

В.Т. Ерофеенко

НИИ прикладных проблем математики и информатики Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь

bsu_erofeenko@tut.by

Обработка информации в компьютерных системах базируется на использовании электромагнитных процессов в сосредоточенных элементах техники. Электрические заряды и токи на электродах возбуждают высокочастотные побочные электромагнитные излучения (ПЭМИ), которые распространяются в окружающем пространстве. Электромагнитные поля

являются носителями информационных сигналов и используются как канал перехвата информации. Для ослабления ПЭМИ применяются защитные электромагнитные экраны. Как правило, экраны имеют отверстия, щели, швы, через которые просачиваются электромагнитные поля, используемые для съема информации. Для моделирования сосредоточенных источников поля используются электрические и магнитные диполи [1, с. 19]. В представленной работе аналитически вычислено поле диполей, проникшее через круговое отверстие в идеально проводящем плоском экране.

В пространстве \mathbb{R}^3 разместим идеально проводящий экран толщины Δ с круговым отверстием D радиуса R . Введем обозначения расчетных областей: $D_1(0 \leq \rho < \infty, z < 0)$, $D_2(0 \leq \rho < \infty, z > \Delta)$ — нижнее и верхнее полупространства; $D(0 \leq \rho < R, 0 \leq z \leq \Delta)$ — цилиндрическая область отверстия. Обозначим поверхности: $\Gamma_1(z = 0, R < \rho < \infty)$, $\Gamma_2(z = \Delta, R < \rho < \infty)$, $\Gamma(\rho = R, 0 < z < \Delta)$ — боковая поверхность цилиндра D . Обозначим электромагнитные поля: \vec{E}_0, \vec{H}_0 — электромагнитное поле электрического диполя [2] в области D_1 , являющееся носителем информации на частоте ω ; \vec{E}'_1, \vec{H}'_1 — отраженное поле в D_1 ; $\vec{E}_1 = \vec{E}_0 + \vec{E}'_1, \vec{H}_1 = \vec{H}_0 + \vec{H}'_1$ — суммарное поле в D_1 ; \vec{E}, \vec{H} — поле в D ; \vec{E}_2, \vec{H}_2 — поле, проникшее в полупространство D_2 .

Краевая задача. Уравнения поля:

$$\operatorname{rot} \vec{E}_j = i\omega\mu_0 \vec{H}_j, \quad \operatorname{rot} \vec{H}_j = -i\omega\varepsilon_0 \vec{E}_j \quad \text{в } D_j; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu \vec{H}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -i\omega\varepsilon \vec{E} \quad \text{в } D, \quad (2)$$

граничные условия идеальной проводимости:

$$E_{1\tau}|_{\Gamma_1} = 0, \quad E_{2\tau}|_{\Gamma_2} = 0, \quad E_\tau|_\Gamma = 0, \quad (3)$$

условия излучения на бесконечности.

Решение задачи (1)–(3) в областях D_j получено аналитически в интегральном виде. В области D поле представлено в виде суммы парциальных волн цилиндрического волновода.

Литература

1. Бузов Г.А., Калинин С.В., Кондратьев А.В. *Защита от утечки информации по техническим каналам*. М.; Горячая линия — Телеком, 2005.
2. Ерофеев В. Т., Козловская И. С. *Аналитическое моделирование в электродинамике*. Мн: БГУ, 2010.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К СТАТИСТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ

М.К. Журак, Ю.С. Харин

НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
kharin@bsu.by

Введем следующие обозначения: $s \in S = \{1, 2, \dots, n\}$ — индексная переменная, кодирующая координаты населенного пункта, n — число населенных пунктов; $t \in \mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$ — дискретное время, T — длительность временного промежутка наблюдений; $x(\omega, s, t)$ — случайное число больных в момент t в точке s в расчете на фиксированный размер группы риска, округленное до целого (уровень заболеваемости); $x(\omega, s, t) \in N_0 = N \cup \{0\}$, $\omega \in \Omega$ — случайное поле, определенное на вероятностном пространстве (Ω, \mathcal{F}, P) ; $\mathcal{F}_{\bar{s}, < t} = \sigma\{x(\sigma, u, \tau) : u \neq s, \tau < t\} \subset \mathcal{F}$ — σ -алгебра, порожденная указанными в $\{\cdot\}$ событиями;

$z_{s,t} \geq 0$ — наблюдаемый уровень фактора (например, уровень загрязнения), влияющий на уровень заболеваемости в точке s в момент t ; $\{\varphi_k(t) : 1 \leq k \leq K_s\}$ — заданный набор базисных функций, определяющих тренд ($\varphi_1(t) \equiv 1$); $\{\xi_{s,t}\}$ — независимые гауссовские случайные величины, $\mathcal{L}\{\xi\} = \mathcal{N}_1(0, \sigma_s^2)$.

Аналогично [1] построим Пуассоновскую условно авторегрессионную модель пространственно-временного случайного поля $x(\omega, s, t) = x_{s,t}$:

$$\mathcal{L}\{x(\omega, s, t) | \mathcal{F}_{\bar{s}, < t}\} = \Pi(\lambda_{s,t}), \quad \lambda_{s,t} = \Lambda_{s,t} e^{\xi_{s,t}},$$

где

$$\Lambda_{s,t} = \exp \left\{ \sum_{i=1}^{p_s} \alpha_{si} x_{s,t-i} + \sum_{j=1}^{q_s} \beta_{sj} z_{s,t-j-1} + \sum_{k=1}^{K_s} \gamma_{sk} \varphi_k(t) \right\}.$$

Параметры модели: σ_s^2 , $\{\alpha_{si}\} : i = 1, \dots, p_s$, $\{\beta_{sj}\} : j = 1, \dots, q_s$, $\{\gamma_{sk}\} : k = 1, \dots, K_s$. Составной вектор параметров для s -го населенного пункта обозначим θ_s , $s = 1, \dots, n$. Задача состоит в статистическом оценивании указанных выше параметров модели по наблюдениям $\{x_{s,t}\}$ на множестве $S \times \mathcal{T}$ и исследовании свойств построенных оценок.

Теорема 1. *Логарифмическая функция правдоподобия для s -го населенного пункта имеет вид:*

$$l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^T (x_{s,t} \ln \Lambda_{s,t} - \ln x_{s,t}! - \ln(f(x_{s,t}, \Lambda_{s,t}, \sigma_s^2))),$$

где $f(a, b, \sigma^2) = \mathbf{E}\{e^{a\sigma\xi - e^{\sigma\xi}}\}$, $\mathcal{L}\{\xi\} = \mathcal{N}(0, 1)$.

Определим числовую последовательность $\{A_i^k\}$ с помощью рекуррентных соотношений:

$$A_i^k = (a + i)A_i^{k-1} - A_{i-1}^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k - 1, \tag{1}$$

$$A_0^k = aA_0^{k-1} = a^k, \tag{2}$$

$$A_k^k = -A_{k-1}^{k-1} = (-1)^k, \quad A_0^0 = 1, \quad k = 0, 1, \dots \tag{3}$$

Теорема 2. *Если $\mathcal{L}\{\xi\} = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, то для любых $a, b \in \mathbf{R}$ справедливо равенство*

$$\mathbf{E}\{e^{a\xi - be^{\xi}}\} = e^{-b} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{2l} \sigma^{2l} b^i \frac{A_i^{2l}}{(2l)!!} \right),$$

где $\{A_i^{2l}\}$ вычисляются по формулам (1)–(3).

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\theta}_s$ определяется при решении экстремальной задачи $l_s(\theta_s) \rightarrow \max_{\theta_s}$. Для численного решения этой задачи используется итерационный алгоритм.

С целью получения начального приближения $\tilde{\theta}_s$ итерационного алгоритма предлагается использовать аппроксимационную регрессионную модель случайного поля:

$$\ln x_{s,t} = \sum_{i=1}^{p_s} \alpha_{si} x_{s,t-i} + \sum_{j=1}^{q_s} \beta_{sj} z_{s,t-j-1} + \sum_{k=1}^{K_s} \gamma_{sk} \varphi_k(t) + \xi_{s,t}$$

и для вычисления $\tilde{\theta}_s$ использовать метод наименьших квадратов.

Данное исследование частично поддержано ISTC проектом № В-1910.

Литература

1. Mariella L., Tarantino M. *Spatial temporal conditional Auto-Regressive Model: A New Autoregressive Matrix* // Austrian journal of Statistics. 2010. № 3. P. 223–244.

ДВУХЭТАПНАЯ ПРОЦЕДУРА ОБНАРУЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ СО ВСТРОЕННОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

А.М. Капуста

НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
kapusta@bsu.by

Пусть регистрируется поток контейнеров (пустых и модифицированных изображений в формате JPEG) и число регистрируемых контейнеров N является достаточно большим. Классическое применение статистических критериев с уровнем значимости α имеет следующее ограничение: среднее число ошибок первого рода будет равно $N\alpha$, и при больших N это значение будет неприемлемо большим. Уменьшение уровня значимости α также является неприемлемым, так как с уменьшением α будет уменьшаться и вероятность обнаружения стегоконтейнеров со скрытой информацией.

Гипотеза \mathcal{H}_0 состоит в том, что регистрируемый контейнер является пустым изображением, а гипотеза \mathcal{H}_1 — в том, что регистрируемый контейнер является изображением со встроенной информацией.

Пусть для обнаружения контейнеров со встроенной информацией предложено два статистических критерия $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$. Адаптируем предложенную в [1] процедуру множественной проверки гипотез для статистического контроля потока контейнеров, который даже при большом числе регистрируемых стегоконтейнеров обеспечивал бы приемлемое число ошибок первого рода.

Предложим процедуру проверки гипотезы \mathcal{H}_0 , состоящую из двух этапов:

- 1) проверка \mathcal{H}_0 с помощью критерия $C^{(1)}$ на уровне значимости α_1 ;
- 2) уточнение принятого решения с целью отсева ложных тревог критерия $C^{(1)}$ с помощью проверки критерием $C^{(2)}$ на уровне значимости α_2 .

Вероятность ошибки первого рода предлагаемой двухэтапной процедуры имеет порядок $\alpha_1\alpha_2$ [1]. С одной стороны, это позволяет выбирать сравнительно большие уровни значимости α_1 , α_2 для отдельных критериев и тем самым обеспечивать высокую вероятность обнаружения. С другой стороны, порядок ошибки первого рода $\alpha_1\alpha_2$ обеспечивает приемлемо малое число ложных тревог.

На первом этапе будем применять решающее правило Неймана — Пирсона для модели дискриминантного анализа на основе статистик от коэффициентов дискретного косинусного преобразования [2], а на втором этапе — решающее правило на основе марковских признаков [2]. Для исследования эффективности двухэтапной процедуры были построены два набора контейнеров: 4000 пустых изображений в формате JPEG и 4000 изображений со встроенной с помощью алгоритма F5 [3] информацией. Исследование эффективности показало, что двухэтапная процедура приводит к значительному уменьшению числа ложных тревог. При фиксированной вероятности ошибки первого рода равной 1% число ложных тревог составило 0.13% при точности обнаружения встроенной информации 97.87%, а при фиксированной вероятности ошибки первого рода 0.5% число ложных тревог составило 0.10% при точности обнаружения встроенной информации 96.34%.

Литература

1. Костевич А. Л., Милованова И. С. *Построение одноэтапной процедуры множественной проверки гипотез со свидетелем*. Брест: УО БГТУ, 2005.
2. Pevny T., Fridrich J. *Merging Markov and DCT features for multi-class JPEG Steganalysis*. Proceedings SPIE Electronic Imaging, Security, Steganography, and Watermarking of Multimedia Contents, 2007.
3. Westfeld A. *High capacity despite better steganalysis (F5 — a steganographic algorithm)*. Lecture Notes in Computer Science, 2002.

СТРУКТУРА ТОЧНЫХ D - и A -ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ДЛЯ ЛИНИИ РЕГРЕССИИ С НЕРАВНОТОЧНЫМИ НАБЛЮДЕНИЯМИ

В.П. Кирлица

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
Kirlitsa@bsu.by

В докладе обсуждается проблема построения и структура точных D - и A -оптимальных планов экспериментов [1] для линии регрессии с неравноточными наблюдениями:

$$y_i = \Theta_0 + \Theta_1 x_i + \varepsilon(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где y_i — наблюдаемые значения; Θ_0, Θ_1 — неизвестные параметры; x_i — контролируемые переменные из интервала $[-1, 1]$; $\varepsilon(x_i)$ — не коррелированные ошибки наблюдений с нулевым средним и дисперсией

$$D(\varepsilon(x_i)) = a_2(x_i)^2 + a_1 x_i + a_0 > 0, \quad x_i \in [-1, 1].$$

Константы a_2, a_1, a_0 должны быть такими, при которых дисперсия ошибки наблюдения будет положительна на интервале $[-1, 1]$.

Доказана следующая

Теорема. Структура точных D -оптимальных планов экспериментов для рассматриваемой модели наблюдений не зависит от констант a_2, a_1, a_0 и такова. Наблюдения надо проводить только в точках -1 или 1 , причем в точке -1 надо проводить s наблюдений для четного $n = 2s$, и s либо $s + 1$ наблюдений для нечетного $n = 2s + 1$.

Структура точных A -оптимальных планов экспериментов существенно зависит от значения констант a_2, a_1, a_0 . Точки спектра таких планов должны располагаться на концах интервала $[-1, 1]$. Для $a_2 = 0$ в [2] установлено, что количество наблюдений в точках спектра зависит от отношения k констант a_1, a_0 , $k = a_1/a_0$.

Литература

1. Федоров В. В. *Теория оптимального эксперимента.* М.: Наука, 1968.
2. Кирлица В. П. Точные D - и A -оптимальные линейные планы и их устойчивость при неравноточных наблюдениях. // Вестн. Белорус. ун-та. 1995. Сер. 1. № 1. С. 42–44.

ПОСТРОЕНИЕ ВЕРХНИХ ОЦЕНОК СРЕДНИХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ РАУНДОВЫХ ФУНКЦИЙ БЛОЧНЫХ ШИФРОВ

Л.В. Ковальчук, Н.В. Кучинская, Л.В. Скрыпник

Институт специальной связи и защиты информации НТУУ «КПИ», Киев, Украина
lv_kov_crypto@mail.ru, n.kuchinska@gmail.com, profslv@ua.fm

Для построения оценок стойкости блочного алгоритма шифрования к разностному криптоанализу и различным его модификациям [1–3], как правило, необходимо оценить сверху среднюю вероятность раундового дифференциала. Раундовые функции большинства современных блочных алгоритмов шифрования содержат композицию ключевого сумматора, блока подстановки и оператора перестановки, линейного над полем F_2 или его некоторым расширением. Поэтому задача оценивания стойкости блочных шифров или сводится к задаче

построения верхних оценок средних вероятностей таких композиций, или содержит ее как подзадачу. На данный момент вопрос о построении верхних оценок средних вероятностей целочисленных дифференциалов остается открытым в случае нетривиального блока подстановки и произвольного оператора перестановки. В данной работе решается задача построения верхних оценок средних вероятностей целочисленных дифференциалов для композиции сумматора, блока подстановки и оператора перестановки, который является оператором циклического сдвига. Получено обобщение для случаев, когда величина сдвига взаимно проста с длиной входа s -блока [3], и когда величина сдвига пропорциональна длине входа s -блока [4]. Определены параметры, от которых зависят данные оценки и условия, которые обеспечивают как можно меньшее значение оценок, получены статистические распределения указанных параметров. Получены нижние оценки количества t -битовых узлов замены и блоков подстановки для отображения, которые удовлетворяют полученным условиям.

Литература

1. Biham E., Shamir A. *Differential Cryptanalysis of Data Encryption Standard*. Springer-Verlag, 1993.
2. Berson T. A. *Differential cryptanalysis mod 2^{32} with applications to MD5* // *Advanced in Cryptology*. CRYPTO'98 (LNCS 372), 1999. P. 95–103.
3. Ковальчук Л. В. *Построение верхних оценок средних вероятностей целочисленных дифференциалов композиции ключевого сумматора, блока подстановки и оператора сдвига* // *Кибернетика и системный анализ*. 2010. № 6. С. 89–96.
4. Ковальчук Л. В., Кучинская Н. В., Скрышник Л. В. *Построение верхних оценок средних вероятностей целочисленных дифференциалов для раундовых функций определенной структуры* // *Международный конгресс по информатике: информационные системы и технологии: материалы международного конгресса*. Минск, 2011. С. 91–95.

ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РЯДОВ ХЭММИНГА

В.А. Липницкий

Военная академия республики Беларусь, Минск, Беларусь
valipnitski@yandex.ru

Реальное воплощение помехоустойчивых кодов для борьбы с помехами и шумами в каналах связи происходит в условиях преодоления противоречивых требований: необходимость увеличения скорости передачи информации реализуется увеличением длин применяемых кодов, отсюда вытекает необходимость декодирования все более сложных ошибок все большей кратности, что наталкивается на необходимость преодоления возникающей при этом «проблемы селектора», связанной с перебором экспоненциально растущего объема возможных ошибочных комбинаций. Весь этот клубок противоречий выливается в сложные и громоздкие алгоритмы декодирования.

Теория находит выход в создании новых и новых наукоемких кодов, типа алгебро-геометрических кодов и их всевозможных обобщений. Практика ушла в применение турбо-кодов, с их огромными длинами и простыми, но вероятностными алгоритмами декодирования. Исторически первые коды Хемминга, совершенные, но исправляющие лишь одну ошибку на передаваемый блок, давно забыты и украшают лишь страницы учебников по проблемам передачи информации.

Однако же более пристальный взгляд на коды Хемминга позволил выяснить что не примитивные коды Хемминга, хотя и ведут себя довольно спорадически, тем не менее достаточно часто имеют минимальное расстояние $d > 3$, существенно большее, чем их прародители — примитивные коды Хемминга, и, следовательно, способные исправлять многократные ошибки. Более того, имеет место следующее утверждение.

Теорема. Пусть поле Галуа $GF(2^m)$ определяет примитивный код Хемминга, причём его длина $n = 2^m - 1 = l \cdot s$ раскладывается в произведение взаимно простых сомножителей $l > 1, s > 1$, таких, что матрицы $H_z^s = (1, \alpha^l, \alpha^{2l}, \dots, \alpha^{(s-1)l})$ и $H_z^l = (1, \alpha^s, \alpha^{2s}, \dots, \alpha^{(l-1)s})$ определяют не примитивные коды Хемминга C_z^s и C_z^l длиной s и l соответственно. Тогда прямоугольная $l \times s$ -матрица

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \alpha^s & \alpha^{2s} & \dots & \alpha^{(l-1)s} \\ \alpha^l & \alpha^{s+l} & \alpha^{l+2s} & \dots & \alpha^{l+(l-1)s} \\ \alpha^{2l} & \alpha^{2l+s} & \alpha^{2l+2s} & \dots & \alpha^{2l+(l-1)s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha^{(s-1)l} & \alpha^{(s-1)l+s} & \alpha^{(s-1)l+2s} & \dots & \alpha^{(s-1)l+(l-1)s} \end{pmatrix}$$

задает код, являющийся тензорным произведением кодов C_z^l и C_z^s .

Как известно, длина, размерность и минимальное расстояние кода-произведения равны произведениям соответствующих параметров кодов-сомножителей. Это позволяет строить коды-произведения с высокими корректирующими возможностями. Если s или l раскладываются в произведения взаимно простых сомножителей, допускающих существование не примитивных кодов Хемминга меньших длин, то тем самым можно построить многомерные коды-произведения с еще более высокими корректирующими возможностями. Так, к примеру, пятимерный код-произведение длиной $n = 2^{28} - 1 = 268435455 = 15 \cdot 29 \cdot 43 \cdot 113 \cdot 127$ имеет минимальное расстояние $d = 12528$ и способен исправлять все ошибки весом $t \leq 6163$.

РОБАСТНОЕ ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ ФИЛЬТРАЦИИ КАЛМАНА

В.И. Лобач

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
lobach@bsu.by

Моделирование и прогнозирование экономических показателей в основном базируется на применении временных рядов. Еще двадцать лет тому назад моделирование макроэкономических и финансовых временных рядов сосредоточивалось на условных первых моментах, а любые временные зависимости в моментах более высокого порядка рассматривались как помеха. Усиление роли риска и соображений неопределенности в современной экономической теории требовало, однако, развития новых эконометрических методов для временных рядов, которые учитывали бы при моделировании изменение дисперсии и ковариации во времени. Важный вклад в изучение временных рядов такого типа внес класс моделей с условной авторегрессионной гетероскедастичностью (ARCH-модели), введенный Энглом.

В работе [1] был предложен способ моделирования нестационарных временных рядов, которые характеризовались периодами «стойкого» и «возмущенного» состояния рынка.

Пусть $\sigma_t^2 = V\{u_t | u_{t-1}, \dots, U_{t-p}\} = E\{u_t^2 | u_{t-1}, \dots, u_{t-p}\}$ – условная дисперсия ошибок u_t , $E\{u_t | u_{t-1}, \dots, U_{t-p}\} = 0$. Эффект кластеризации описывается следующей моделью зависимости условной дисперсии ошибок u_t от предыстории

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2.$$

Определенный таким образом случайный процесс u_t получил название авторегрессионной условно гетероскедастичной модели порядка p (ARCH(p)). В работе [2] была предложена более общая спецификация модели для уравнения условной дисперсии ошибок

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p u_{t-p}^2 + \gamma_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \gamma_q \sigma_{t-q}^2.$$

Такая модель называется обобщенной авторегрессионной условно гетероскедастичной моделью порядка p, q (GARCH(p, q)).

В данной работе рассматривается иной подход к анализу нестационарных временных рядов, основанный на представлении нестационарных временных рядов в форме моделей в пространстве состояний и использовании алгоритмов калмановской фильтрации [3]. При определенных предположениях возможно представление ARCH и GARCH-моделей временного ряда в форме модели в пространстве состояний и использование алгоритмов калмановской фильтрации. Оптимальный фильтр Калмана является рекуррентным алгоритмом, требующим для своей реализации полной информации о параметрах и статистических характеристиках случайных процессов, входящих в описание модели. На практике такая информация известна не полностью, поэтому возникает проблема построения робастных алгоритмов фильтрации, устойчивых по отношению к отклонениям модельных предположений.

Предложен алгоритм оценивания значений σ_t^2 . Оценки этих значений позволяют выделить кластеры наблюдений с большими и малыми отклонениями от средних значений.

Литература

1. Engle R.F. *Autoregressive conditional heteroscedacity with estimates of the variance of United Kindom inflation* // *Econometrica*. 1982. Vol. 50. no. 4.
2. Bollerslev T. *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* // *Journal of Econometrics*. 1986. Vol. 31. P. 307–327.
3. Браммер К., Зиферлинг Г. *Фильтр Калмана – Бьюси*. М.: Наука, 1982.

ОБ ОДНОЙ «МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ» МАРКОВСКОЙ МОДЕЛИ

М.В. Мальцев

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь maltsew@mail.ru

Введение. Для анализа надежности систем криптографической защиты информации применяются вероятностно-статистические методы. В частности, марковские модели широко используются для обнаружения закономерностей в выходных последовательностях криптографических генераторов [1, 2], для моделирования элементов систем защиты информации [3]. Поскольку число параметров для полносвязной цепи Маркова порядка s [4] увеличивается экспоненциально с ростом s , актуальна задача построения и исследования так называемых «малопараметрических» моделей, лишенных этого недостатка. В статье рассматривается цепь Маркова условного порядка [5], относящаяся к данному классу моделей.

Математическая модель. Примем обозначения: \mathbf{N} — множество натуральных чисел, $2 \leq N < \infty$; $A = \{0, 1, \dots, N-1\}$ — пространство состояний мощности N ; $J_m^n = (j_m, \dots, j_n) \in A^{n-m+1}$, $n \geq m$, — мультииндекс; $\{x_t \in A : t \in \mathbf{N}\}$ — конечная однородная цепь Маркова порядка s ($2 \leq s < \infty$), заданная на вероятностном пространстве (Ω, F, P) ; $P = (p_{J_1^{s+1}})$ — $(s+1)$ -мерная матрица вероятностей одношаговых переходов, $p_{J_1^{s+1}} = P\{x_{t+s} = j_{s+1} | x_{t+s-1} = j_s, \dots, x_t = j_1\}$, $t \in \mathbf{N}$; $L \in \{1, 2, \dots, s-1\}$, $K = N^L - 1$ — натуральные числа; $Q^{(1)}, \dots, Q^{(M)}$ — семейство M ($1 \leq M \leq K+1$) различных стохастических матриц порядка N : $Q^{(m)} = (q_{i,j}^{(m)})$, $0 \leq q_{i,j}^{(m)} \leq 1$, $\sum_{j \in A} q_{i,j}^{(m)} \equiv 1$, $i, j \in A$, $1 \leq m \leq M$; $\langle J_m^n \rangle = \sum_{k=m}^n N^{k-m} j_k \in \{0, 1, \dots, N^{n-m+1}\}$, $1 \leq m \leq n$, — числовое представление мультииндекса J_m^n ; $I\{C\}$ — индикатор события C .

Цепь Маркова s -го порядка $\{x_t \in A : t \in \mathbf{N}\}$ с пространством состояний A называется цепью Маркова условного порядка [5], если вероятности переходов имеют следующее малопараметрическое представление:

$$p_{J_1^{s+1}} = \sum_{k=0}^K I\{\langle J_{s-L+1}^s \rangle = k\} q_{j_{b_k}, j_{s+1}}^{(m_k)}, \quad (1)$$

где $1 \leq m_k \leq M$, $1 \leq b_k \leq s - L$, $0 \leq k \leq K$, $\min_{0 \leq k \leq K} b_k = 1$, при этом в последовательности m_0, \dots, m_K встречаются все элементы множества $1, 2, \dots, M$. Последовательность элементов J_{s-L+1}^s , которая определяет условие в формуле (1), называется базовым фрагментом памяти (БФП) случайной последовательности. Таким образом, состояние процесса x_t в момент времени t зависит не от всех s предыдущих состояний J_1^s , а от $L + 1$ состояний (j_{b_k}, J_{s-L+1}^s) ; при этом БФП J_{s-L+1}^s определяет не только состояние j_{b_k} , но и условный порядок цепи Маркова $s_k = s - b_k + 1 \in \{L + 1, L + 2, \dots, s\}$, и матрицу вероятностей переходов $Q^{(m_k)}$.

Для цепи Маркова условного порядка построены статистические оценки параметров, доказана их состоятельность. Исследованы асимптотические свойства оценок, найдены условия, при которых стационарное распределение вероятностей цепи Маркова условного порядка является равномерным. Построен статистический критерий проверки гипотез о значениях матриц вероятностей переходов, который может быть использован для тестирования криптографических генераторов.

Литература

1. Kharin Yu. S., Yarmola A. N. *Testing of pseudo-random generators by MTD-models* // Proceedings of the international security and counteracting terrorism conference. Moscow, 2006. P. 192–198.
2. Piatlitski A. I. *The method based on binary MC(s, r) under additive distortions for estimating the model parameters of Geffe's generator* // 9th International Conference computer data analysis and modeling: complex stochastic data and systems. Vol. 2. Minsk, 2010. P. 51–54.
3. Максимов, Ю. И. *О цепях Маркова, связанных с двоичными регистрами сдвига со случайными элементами* // Тр. по дискретной математике. 1997. Т. 1. С. 203–220.
4. Кемени Дж., Снелл Дж. *Конечные цепи Маркова* М.: Наука, 1970.
5. Харин Ю. С., Мальцев М. В. *Алгоритмы статистического анализа цепей Маркова с условной глубиной памяти* // Информатика. 2011. № 1. С. 34–43.

МЕТОДЫ ДИСКРИМИНАНТНОГО АНАЛИЗА МОДЕЛЕЙ VARX

В.И. Малюгин

Белорусский государственный университет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
malugin@bsu.by

Пусть для сложной системы возможны L ($L \geq 2$) классов состояний $\{\Omega_\alpha\} (\alpha \in S(L) = \{0, \dots, L - 1\})$. Номер класса состояния в момент времени t описывается случайной величиной $d_t \in S(L)$. Модель системы имеет неоднородную по параметрам структуру зависимости между эндогенными $x = (x_1, \dots, x_N)' \in X \subseteq \mathbb{R}^N$ и заданными экзогенными переменными $z = (z_1, \dots, z_M)' \in Z \subseteq \mathbb{R}^M$, и в условиях параметрической неоднородности допускает представления в виде *векторной авторегрессионной модели с экзогенными переменными порядка p* (обозначается VARX (p)) [1]:

$$x_t = \sum_{l=1}^p A_{d(t),l} x_{t-l} + B_{d(t)} z_t + \eta_{d(t),t}, \quad t = 1, \dots, T, \quad \eta_{\alpha,t} \sim \mathbf{NI}(0_N, \Sigma_\alpha), \quad (1)$$

где $x_{1-p}, \dots, x_0 \in \mathbb{R}^N$ — заданные начальные значения, $z_t \in Z \subseteq \mathbb{R}^M$ — стационарный векторный временной ряд, матрицы $\{A_{\alpha,l}\} (l = 1, \dots, p)$ удовлетворяют условию стационарности для всех $\alpha \in S(L)$. Вектор состояний $d_t \in S(L)$, а также матрицы $\{A_{d(t)}, B_{d(t)}, \Sigma_{d(t)}\}$ не известны. Имеются обучающие реализации временных рядов $(\tilde{X}_\alpha, \tilde{Z}_\alpha)$, где $\tilde{X}_\alpha \in X^{T_\alpha}$, $\tilde{Z}_\alpha \in Z^{T_\alpha}$, $\alpha \in S(L)$.

Рассматриваются задачи групповой и поточечной классификации наблюдений, описываемых моделью VARX вида (1). В задаче групповой классификации предполагается, что система в течение всего периода наблюдения T ($T > p$), может находиться в одном из L ($L \geq 2$) классов состояний $\{\Omega_\alpha\}$, причем $P\{d = \alpha\} = \pi_\alpha > 0$ ($\pi_0 + \dots + \pi_{L-1} = 1$). Задача заключается в оценивании $d \in S(L)$ по наблюдениям (\bar{X}, \bar{Z}) , $\bar{X}' = (x'_1, \dots, x'_T) \in \mathbf{X}^T$, $\bar{Z} = (z'_1, \dots, z'_T) \in \mathbf{Z}^T$. В задаче поточечной классификации состояние системы может меняться в течение периода наблюдения при этом $P\{d_t = \alpha\} = \pi_\alpha > 0$ ($\alpha \in S(L)$). Задача заключается в оценивании $d_t \in S(L)$ по наблюдениям (x_t, z_t) при заданных значениях x_{t-p}, \dots, x_{t-1} . Для рассматриваемых задач предлагаются и исследуются решающие правила дискриминантного анализа моделей VARX, а также основанные на них алгоритмы обнаружения одиночных и множественных структурных изменений.

Теорема. Если $\{\hat{A}_{\alpha,l}\}$, $\{\hat{B}_\alpha\}$, $\{\hat{\pi}_\alpha\}$ ($l = 1, \dots, p$) – ММП-оценки параметров модели (1) по обучающим реализациям временных рядов $(\tilde{X}_\alpha, \tilde{Z}_\alpha)$, где $\tilde{X}_\alpha \in \mathbf{X}^{T_\alpha}$, $\tilde{Z}_\alpha \in \mathbf{Z}^{T_\alpha}$ ($\alpha \in S(L)$), то подстановочное БРП групповой классификации состояний сложной системы по наблюдениям (\bar{x}, \bar{z}) имеет вид:

$$\hat{d}(\bar{x}; \bar{z}) = \arg \min_{\alpha \in S(L)} \left\{ \text{tr}(\hat{\Sigma}_\alpha^{-1} S_\alpha) + \ln |\hat{\Sigma}_\alpha| - \frac{2 \ln \hat{\pi}_\alpha}{T} \right\}, \quad \bar{x} \in \mathbf{X}^T, \quad \bar{z} \in \mathbf{Z}^T,$$

$$S_\alpha = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{\eta}_{\alpha,t} \hat{\eta}'_{\alpha,t}, \quad \hat{\eta}_{\alpha,t} = x_t - \sum_{l=1}^p \hat{A}_{\alpha,l} x_{t-l} - \hat{B}_\alpha z_t, \quad t = 1, \dots, T,$$

где для класса состояний $\alpha \in S(L)$: $\hat{\eta}_{\alpha,t} \in \mathfrak{R}^N$ – случайный вектор отклонений в момент времени t ($t = 1, \dots, T$) значений эндогенных переменных от модельных значений; S_α – нормированная матричная сумма квадратов отклонений в рассматриваемом случае.

Литература

1. Lütkepohl H. *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2005.

РОБАСТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ МНОГОМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

Ю.М. Михаленок

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
mihalenok.yuri@gmail.com

При построении оценок ковариационных матриц с помощью многомерной модели условной гетероскедастичности с динамическими корреляциями (DCC-модели) стандартный подход к оцениванию параметров модели состоит в использовании двухшаговой процедуры на основе метода квази-максимального правдоподобия.

Пусть для наблюдаемого N -мерного временного ряда $r_t \in \mathfrak{R}^N$ предполагается, что закон распределения данного вектора является условно-гауссовым. Тогда предложенная в [1] процедура оценки вектора параметров DCC-модели $\theta = \{\phi, \varphi\} \in \mathfrak{R}^M$, заключается в последовательном нахождении по реализации случайного вектора $\{r_t\}$ ($t = 1, \dots, T$) оценок векторов параметров ϕ_{QML} из уравнения $\phi_{QML} = \arg \min_{\phi} Ql_1(\phi | \{r_t\})$ и φ_{QML} из $\varphi_{QML} = \arg \min_{\varphi} Ql_2(\varphi | \phi_{QML}, \{r_t\})$, на первом и втором шаге соответственно. При этом $Ql_1(\phi | \{r_t\})$,

$Ql_2(\varphi | \phi_{QML}, \{r_t\})$ — условные логарифмические функции квази-правдоподобия (более подробно см. [1]).

Для увеличения точности оценивания DCC-модели в случаях наличия аномальных наблюдений в наблюдаемых временных рядах приводится модификация алгоритма робастного оценивания предложенного в [3].

Теорема 2. Пусть $l(\theta|\{r_t\})$ — логарифмическая функция правдоподобия, $\lambda(\cdot)$ — строго возрастающая скалярная функция вида [2]

$$\lambda(t) = \begin{cases} t - t^2/(2c), & t \leq c, \\ c/2, & t > c, \end{cases}$$

где c — положительное число.

Тогда алгоритм робастного оценивания вектора параметров DCC-модели $\theta = \{\phi, \varphi\} \in \mathbb{R}^M$ можно представить в виде процедуры состоящих из последовательных шагов:

- 1) построение оценки вектора параметров $\theta_{QML} = \{\phi_{QML}, \varphi_{QML}\} \in \mathbb{R}^M$;
- 2) нахождение оценки $\hat{\phi}$ из уравнения

$$\hat{\phi} = \arg \min_{\phi} \sum_{t=1}^T \lambda[-(Ql_1(\phi|\{r_t\}) + Ql_2(\varphi_{QML}|\phi_{QML}, \{r_t\}) - l(\theta_{QML}|\{r_t\}))];$$

- 3) нахождение оценки $\hat{\varphi}$ из уравнения

$$\hat{\varphi} = \arg \min_{\varphi} \sum_{t=1}^T \lambda[-(Ql_1(\hat{\phi}|\{r_t\}) + Ql_2(\varphi|\hat{\phi}, \{r_t\}) - l(\theta_{QML}|\{r_t\}))].$$

В докладе представлены результаты сравнительного анализа точности алгоритма робастного оценивания параметров DCC-модели на модельных данных.

Литература

1. Engel R.F. *Theoretical and empirical properties of dynamic conditional correlation multivariate GARCH* // National Bureau of Economic Research. 2001. No. 8554.
2. Bianco A., Yohai V. *Robust Statistics, Data Analysis, and Computer Intensive Methods*. New York: Springer, 1996. P. 17–34.
3. Muler N., Yohai V. *Robust estimates for garch models* // Journal of Statistical Planning and Inference. 2008. V. 138. P. 2918–2940.

ОБНАРУЖЕНИЕ РАЗЛАДОВ ТРАЕКТОРНЫХ ПАРАМЕТРОВ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ВЕЙВЛЕТ-ФИЛЬТРАЦИИ

М.Н. Мицкевич

Белгосуниверситет, НИИ прикладных проблем математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
mitskevich_m@mail.ru

Модель сигнала радиолокатора от баллистического объекта можно записать следующим образом: $s(t) = f(t) + \sigma e(t)$, где $f(t)$ — полезный сигнал, $e(t)$ — шум, σ — уровень шума, $s(t)$ — исследуемый сигнал.

Для выделения полезного сигнала в системах обработки радиолокационной информации проводится вейвлет-фильтрация. Как известно, траектория движения баллистических объектов состоит из активного ($f_1(t)$), пассивного ($f_2(t)$) и завершающего ($f_3(t)$) участков,

поэтому необходимо исследовать проблему соответствия каждому участку определенного фильтра. В связи с этим возникает задача обнаружения моментов переходов τ_1, τ_2 между участками, т.е. моментов разладки траектории баллистического объекта:

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t), & t \leq \tau_1, \\ f_2(t), & \tau_1 < t \leq \tau_2, \\ f_3(t), & t > \tau_2. \end{cases}$$

Обнаружение моментов разладки аналогично вейвлет-фильтрации опирается на тот факт, что основная энергия сигнала сосредоточена в небольшом числе коэффициентов, которые имеют большое по модулю значение. При вейвлет-фильтрации вейвлет-коэффициенты, меньшие некоторого значения (порога), приравниваются к нулю, а большие коэффициенты либо остаются неизменными при жесткой фильтрации, либо уменьшаются на некоторое фиксированное значение при мягкой. В отличие от вейвлет-фильтрации для обнаружения разладок строятся статистики от вейвлет-коэффициентов, превышающих порог (пороги для вейвлет-фильтрации и обнаружения разладок в общем случае различные), и проверяется гипотеза о наличии разладки.

Определение моментов разладки движения баллистического объекта проводилось по временным рядам, представляющим собой координаты траектории баллистического объекта и их первые разности.

Для обнаружения моментов разладки применялся ряд критериев обнаружения неоднородностей временных рядов, основанных на: максимуме сумм вейвлет-коэффициентов по уровням разрешения, максимуме вейвлет-периодограммы [1], множественной проверке гипотез о значимости вейвлет-коэффициентов [2], универсальном пороговом значении [3].

Для построения статистик критериев нужно определить уровень шума σ . Для его измерения используется самый высокочастотный уровень разложения, так как на этом уровне энергия полезного сигнала, сосредоточенная в вейвлет-коэффициентах, минимальна.

Методом статистического моделирования для различных уровней шума проведено исследование эффективности обнаружения моментов разладки с использованием указанных критериев.

Литература

1. Абрамович М.С., Мицкевич М.Н. *Обнаружение скачкообразных изменений среднего с использованием вейвлет-преобразования Хаара* // Информатика. 2008. № 4. С. 59–66.
2. Абрамович М.С., Мицкевич М.Н. *Об одном алгоритме обнаружения разладок бинарных последовательностей с использованием вейвлетов* // Информационные системы и технологии (IST 2009): материалы V Международной конференции-форума (Минск, 16–17 ноября 2009 г. В 2 ч. Ч. 1. Мн.: А.Н. Вараксин, 2009. С. 104–105.
3. Donoho D.L., Johnstone I.M. *Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage* // Biometrika. 1994. V. 81, № 3. P. 425–455.

О ТОЧНОСТИ ЛИНЕЙНОГО СТАТИСТИЧЕСКОГО ПРОГНОЗА ТЕМПЕРАТУРЫ АТМОСФЕРНОГО ВОЗДУХА

В.С. Муха, А.Ф. Трофимович

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники
Бровка 6, 220013 Минск, Беларусь
mukha@bsuir.by alex_tr@tut.by

В проблеме прогнозирования погоды исторически доминировал и продолжает доминировать детерминированный подход [1]. Он базируется на классической механике и термодинамике. Для получения будущего состояния атмосферы выполняется интегрирование системы

дифференциальных уравнений, описывающих состояние атмосферы, при известном начальном состоянии атмосферы. Поскольку интегрирование выполняется численными методами, то этот подход получил название численного прогноза погоды. Численный прогноз погоды является достаточно успешным, в связи с чем современные службы погоды полностью доверяются его моделям.

Тем не менее, в течение последних лет профессиональные специалисты в области прогнозирования погоды приходят к заключению, что, возможно, детерминированный подход достиг своих пределов предсказуемости, и мы видим тенденцию к более широкому использованию статистических методов [1].

Одно из направлений использования статистических методов связано с обслуживанием моделей численного прогноза погоды. Сюда относятся статистическая постобработка выхода модели, усвоение метеорологических данных, ансамблевое прогнозирование [1, 2].

Имеются примеры «независимого» применения статистических методов в прогнозировании погоды [3, 4]. Однако они трудно воспроизводимы для сравнения в силу того, что отличаются постановками задач, прогнозируемыми переменными, методами решения, рассматриваемыми регионами, недостаточно детальным описанием используемых алгоритмов и их параметров и т.д. Имеющиеся чисто теоретические разработки в статистической литературе не доводятся до практического применения и сравнения (до алгоритмов прогнозирования и оценки их параметров, выполнения расчетов применительно к метеорологии, сравнительного анализа результатов расчетов). В данном докладе рассматривается такое «независимое» применение, а именно, приводятся и анализируются эмпирические данные о точности алгоритма линейного статистического прогнозирования температуры атмосферного воздуха [5] на метеостанции 26850 (г. Минск) в сравнении с климатическим прогнозом и прогнозом Гисметео. Полученные результаты указывают на положительные возможности практического применения предложенного алгоритма, например, на автоматических метеокомплексах, в силу его неприхотливости к требуемым ресурсам.

Литература

1. Gustafsson N. *Statistical issues in weather forecasting* // Scandinavian Journal of Statistics. 2002. V. 29. № 2. P. 219–239.
2. Вильфанд Р.М., Тищенко В.А., Хан В.М. *Статистический прогноз хода температуры воздуха внутри месяца с использованием выходных данных гидродинамических моделей* // Метеорология и гидрология. 2007. № 3. С. 5–13.
3. Malone T.F. *Application of statistical methods in weather prediction* // Proceedings of the National Academy of Sciences USA. 1955. V. 41. P. 806–815.
4. Campbell S.D. *Weather Forecasting for Weather Derivatives* // Journal of the American Statistical Association. 2005. V. 100. № 469. P. 6–16.
5. Муха В. С. *Статистическое векторное прогнозирование количественных характеристик погоды* // Информационные системы и технологии (IST'2004). Материалы Международной конференции (Минск, 8–10 ноября 2004 г.). Ч. 2. Мн.: Академия управления при президенте Республики Беларусь, 2004. С. 195–200.

О ВЕРОЯТНОСТНЫХ СВОЙСТВАХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ С ЦЕНЗУРИРОВАНИЕМ

Е.Н. Орлова

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
orlovaen@bsu.by

Пусть двумерная решетка $T = T_1 \times T_2$ с N узлами ($T_1 = \{1, 2, \dots, N_1\}$, $T_2 = \{1, 2, \dots, N_2\}$, $N = N_1 \cdot N_2$, $N_1, N_2 > 1$) является областью определения двумерного случайного поля $x_t = x(t, \omega) \in \mathbb{R}$, которое задано на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и описыва-

ется гауссовской условно-регрессионной моделью (CAR) [1]:

$$\mathcal{L}\{x_t | \mathbf{X}_{U_t}\} = \mathcal{N}_1\left(\mu_t + \rho \sum_{\tau \in U_t} \beta_{t,\tau}(x_\tau - \mu_\tau), \sigma_t^2\right),$$

где $\omega \in \Omega$, $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$, $\mu_t \in \mathbb{R}^N$, $\rho \in [-1, 1]$, $\beta_{t,\tau} = \beta_{\tau,t}$, $\beta_{t,t} = 0$, $\sigma_t^2 > 1$, а $U_t = \{\tau \in \mathbb{T} : \text{пиксель } \tau \neq t \text{ является соседом пикселя } t\} \subset \mathbb{T}$. CAR-модель может быть представлена в терминах совместного N -мерного распределения составного случайного вектора $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N$:

$$\mathcal{L}\{\mathbf{X}\} = \mathcal{N}_N(\mu, \mathbf{B}^{-1}\Sigma_D),$$

где $\mathbf{X} = (x_{t_1}, \dots, x_{t_{N_2}}, x_{t_{N_2+1}}, \dots, x_{t_N})^T \in \mathbb{R}^N$, $\mu = (\mu_{t_1}, \dots, \mu_{t_{N_2}}, \mu_{t_{N_2+1}}, \dots, \mu_{t_N})^T \in \mathbb{R}^N$, $\Sigma_D = \text{diag}\{\sigma_{t_1}, \dots, \sigma_{t_N}\} \in \mathbb{R}^N$, $\mathbf{B} = (b_{t,\tau})$ — $(N \times N)$ -матрица с элементами:

$$b_{t,\tau} = \begin{cases} 1 & \text{при } t = \tau, \\ -\rho\beta_{t,\tau} & \text{при } \tau \in U_t, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $t_1 = (1, 1)$, \dots , $t_{N_2} = (1, N_2)$, $t_{N_2+1} = (2, 1)$, \dots , $t_N = (N_1, N_2)$.

Пусть наблюдается цензурированное случайное поле y_t ($t \in \mathbb{T}$), где $y_t = \min\{x_t, c_t\}$, а функция c_t задана на решетке \mathbb{T} и опеределает границу цензурирования случайного поля x_t .

Теорема. Условная функция распределения случайной величины y_{t_n} имеет вид:

$$F_{y_{t_n} | \mathbf{X}_{U_t}}(y) = \begin{cases} \Phi\left(\frac{y - a_{t_n}}{\sigma_{t_n}}\right), & \text{если } y < c_{t_n}, \\ 1, & \text{если } y \geq c_{t_n}, \end{cases}$$

а условные математическое ожидание и дисперсия случайной величины y_{t_n} определяются равенствами:

$$\begin{aligned} E\{y_{t_n} | \mathbf{X}_{U_t}\} &= a_{t_n} \Phi\left(\frac{c_{t_n} - a_{t_n}}{\sigma_{t_n}}\right) - \frac{\sigma_{t_n}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(c_{t_n} - a_{t_n})^2}{2\sigma_{t_n}^2}\right\} + c_{t_n} \left(1 - \Phi\left(\frac{c_{t_n} - a_{t_n}}{\sigma_{t_n}}\right)\right), \\ D\{y_{t_n} | \mathbf{X}_{U_t}\} &= \sigma_{t_n}^2 \left[1 + \left(\frac{c_{t_n} - a_{t_n}}{\sigma_{t_n}}\right)^2\right] \Phi\left(\frac{c_{t_n} - a_{t_n}}{\sigma_{t_n}}\right) + \frac{\sigma_{t_n}(c_{t_n} - a_{t_n})}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(c_{t_n} - a_{t_n})^2}{2\sigma_{t_n}^2}\right\} - \\ &\quad - \sigma_{t_n}^2 \left[\frac{(c_{t_n} - a_{t_n})}{\sigma_{t_n}} \Phi\left(\frac{c_{t_n} - a_{t_n}}{\sigma_{t_n}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(c_{t_n} - a_{t_n})^2}{2\sigma_{t_n}^2}\right\}\right]^2, \end{aligned}$$

где $\Phi(\cdot)$ — функция распределения стандартного нормального закона.

Литература

1. Held L., Rue H. *Conditional and Intrinsic Autoregressions* // Handbook of Spatial Statistics. 2010. P. 201–215.
2. Харин Ю. С., Жук Е. Е. *Математическая и прикладная статистика*. Мн.: БГУ, 2005. 279 с.

ОБ ИНФОРМАТИВНЫХ ПРИЗНАКАХ РАСПОЗНАВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ И ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В.Ю. Палуха, Ю.С. Харин

Белгосуниверситет, НИИ ПМИ, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
{fpm.paluha,kharin}@bsu.by

Современная криптография не может обойтись без случайных и псевдослучайных последовательностей [1]. Одной из важнейших задач является задача распознавания случайных и псевдослучайных последовательностей. Для решения этой задачи необходимо построение пространства признаков, которые несут информацию о математической модели последовательности.

Доклад посвящен задаче построения информативных признаков, описания их вероятностных свойств для различных типов последовательностей и применения этих признаков для распознавания типов последовательностей.

Рассмотрены информативные признаки на основе дискретного преобразования Фурье и на основе рангов матриц. Более подробно признаки на основе дискретного преобразования Фурье исследованы в [2]. Исследуем признаки на основе рангов матриц.

Наблюдается дискретный временной ряд $x_1, x_2, \dots \in A = \{0, 1\}$. Выбираем длительность наблюдения $T = l^2 \cdot n$, где l и n — заданные натуральные числа.

Разбиваем наблюдаемый ряд x_1, x_2, \dots, x_T на n фрагментов $X_1, X_2, \dots, X_n \in A^{l^2}$. Далее по i -му фрагменту X_i строим матрицу

$$Y_i^{(l)} = \begin{pmatrix} x_{(i-1)l^2+1} & x_{(i-1)l^2+2} & \dots & x_{(i-1)l^2+l} \\ x_{(i-1)l^2+l+1} & x_{(i-1)l^2+l+2} & \dots & x_{(i-1)l^2+2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{(i-1)l^2+l(l-1)+1} & x_{(i-1)l^2+l(l-1)+2} & \dots & x_{il^2} \end{pmatrix}.$$

По $Y_i^{(l)}$ строим статистику $t_l = t(Y_i^{(l)}) = \text{rank}(Y_i^{(l)}) \in \{0, 1, \dots, l\}$. В качестве признака берем величину

$$v(l) = \frac{1}{nl} \sum_{i=1}^n t(Y_i^{(l)}).$$

Сама статистика t_l , т.е. значение ранга, также будет использована нами в исследовании прореживающего генератора [1, 3].

При верной гипотезе $H_0 = \{x_t \text{ есть равномерно распределенная случайная последовательность}\}$ статистика t_l имеет распределение вероятностей [1]:

$$q_{lj} = P_{H_0}\{t_l = j\} = 2^{j(2l-j)-l^2} \prod_{i=0}^{j-1} \frac{(1 - 2^{i-l})^2}{1 - 2^{i-j}}, \quad j \in \{0, 1, \dots, l\}.$$

Поэтому при каждом фиксированном l можно вычислить математическое ожидание признака $v(l)$.

Применение признаков на основе дискретного преобразования Фурье описано в [2]. Признаки $v(l)$ применены к различным типам генераторов последовательностей. Отклонения признаков от теоретического значения при верной гипотезе H_0 для случайной последовательности позволяют распознавать модели генераторов. Значения рангов матриц $\{t_l\}$ применены также для оценивания степеней порождающих многочленов порождающего и управляющего регистров сдвига в прореживающем генераторе. Опираясь на теоретические результаты, изложенные в [3], разработан алгоритм оценивания этих степеней.

Литература

1. Харин Ю. С., Берник В. И., Матвеев Г. В., Агиевич С. В. *Математические и компьютерные основы криптологии*. Мн.: Новое Знание, 2003.
2. Мальцев М. В., Палуха В. Ю., Харин Ю. С. *О некоторых подходах к моделированию выходных последовательностей криптографических генераторов* // Веб-программирование и интернет-технологии Web-Conf2012. Материалы 2-й Международной научно-практической конференции. 5–7 июня 2012 г., Минск. С. 133–134.
3. Caballero-Gil P., Fuster-Sabater A., Pazo-Robles M.E. *New Attack Strategy for the Shrinking Generator* // Journal of Research and Practice in Information Technology, Vol. 41, No. 2, May 2009.

MARKOV DEPENDENCE OF HIGH ORDER: SMALL-PARAMETRIC MODELS, PROPERTIES, STATISTICAL ANALYSIS

Yu.S. Kharin

Research Institute for Appl. Probl. of Math. and Inform., Belarusian State University, Minsk, Belarus
kharin@bsu.by

An universal model for real-world processes (in genetics, computer networks, meteorology and other fields) with discrete time t , finite state space $A = \{0, 1, \dots, N-1\}$, and a sufficiently large memory depth s is the order s homogeneous Markov chain (MC(s)) x_t on a probability space (Ω, F, P) determined by the Markov property ($t > s$):

$$P\{x_t = i_t \mid x_{t-1} = i_{t-1}, \dots, x_1 = i_1\} = P\{x_t = i_t \mid x_{t-1} = i_{t-1}, \dots, x_{t-s} = i_{t-s}\} = p_{i_{t-s}, \dots, i_t},$$

where $P = (p_{j_1, \dots, j_{s+1}})$, $j_1, \dots, j_{s+1} \in A$, is an $(s+1)$ -dimensional matrix of one-step transition probabilities.

Unfortunately, the number of independent parameters for the MC(s) model increases exponentially w.r.t. the memory depth:

$$D_{\text{MC}(s)} = N^{s+1}(N-1),$$

and to identify this model we need to observe realizations of huge size of the order $O(N^{s+1})$.

To avoid this “curse of dimensionality” we propose to use parsimonious (or “small-parametric” [1]) models for high-order Markov chains that are determined by small number of parameters $d \ll D_{\text{MC}(s)}$.

To small-parametric models belong the Jacobs – Lewis model [2] with $d_{\text{JL}} = N + s - 1$ parameters, the MTD model proposed by A. Raftery [3] with $d_{\text{MTD}} = N^2 + s - 1$ parameters, and also the variable length Markov chain model proposed by P. Buhlmann [4].

Here we consider a new model MC(s, r) – Markov chain of order s with r ($1 \leq r \leq s$) partial connections proposed by Kharin [5] and determined by the following parameters: s, r ,

$$p_{j_1, \dots, j_{s+1}} = p_{J_1^{s+1}} = q_{j_{m_1}, \dots, j_{m_r}, j_{s+1}},$$

where $J_1^{s+1} = (j_1, \dots, j_{s+1}) \in A^{s+1}$ is the multiindex, r is the number of connections ($1 \leq r \leq s$); $M_1^r = (m_1, \dots, m_r)$ is a vector with r ordered integer components that is called the template of connections ($1 = m_1 < m_2 < \dots < m_r \leq s$); $Q = (q_{J_1^{r+1}})$ is a stochastic $(r+1)$ -dimensional matrix. If $r = s$, then the model MC(s, s) is equivalent to the MC(s).

In this talk we present following results:

- 1) ergodicity criterions for considered models;
- 2) ML estimator for the Jacobs – Lewis model and its properties;

3) s -dimensional stationary probability distributions for MTD models and new statistical estimators of parameters based on these distributions;

4) statistical estimators for parameters Q , M_1^T , r , s of the MC(s, r) model and statistical tests on values of these parameters.

Performance of constructed estimators and tests is analyzed by asymptotic expansions and computer experiments on simulated and real data.

Acknowledgements. The work is partially supported by ISTC, project No. B-1910.

References

1. Kharin Yu. S. *Optimality and Robustness in Statistical Forecasting*. Minsk: BSU, 2008 (Monograph in Russian).
2. Jacobs P. A., Lewis P. A. *Discrete time series generated by mixtures* // J. Royal Stat. Soc. Ser. B. 1978. Vol. 40, no. 1. P. 94–105.
3. Raftery A. *A model for high-order Markov chains* // J. Royal Stat. Soc. Ser. B. 1985. Vol. 47, no. 3. P. 528–539.
4. Buhlmann P., Wyner P. J. *Variable length Markov chain* // Annals of Statistics. 1999. Vol. 27, no. 2. P. 480–513.
5. Kharin Yu. S., Petlitskiy A. *Markov chain of order s with r partial connections* // Discr. Math. and Appl. 2007. Vol. 17, no. 3. P. 295–317.

ON THE LIMITING DISTRIBUTIONS OF SUMS OF STOCHASTIC GRADIENT FLOWS

K. Matetski

University of Warwick, Mathematics Institute
Coventry CV4 7AL, United Kingdom
k.matetski@gmail.com

Introduction. Particle systems models are used for describing various phenomena in physics [1], population growth [2], spread of infection [3] and so on. Many difficulties of particle systems occur when the number of particles increases, since, in this case, it becomes extremely complicated to consider each separate particle. Consequently, one is interested in finding some limiting properties of the system, which can be used to describe the latter when the number of particles is large.

In our report we present the limiting distributions of the “central limit”-type sums of particles evolving as stochastic gradient flows.

The model and results. We will consider a system of independent d -dimensional stochastic gradient flows X^i satisfying the following equations:

$$dX_t^i = -\nabla u(X_t^i) dt + dB_t^i, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

defined on some filtered probability space $(\Omega, \mathcal{F}, (F_t), \mathbb{P})$, where $d \geq 1$, B^i are independent d -dimensional Brownian motions and $u : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ is a function satisfying the following properties:

- 1) $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$;
- 2) u is such that the unique solutions of equations (1) exist;
- 3) u is even;
- 4) $\int_{\mathbb{R}^d} \|x\|^2 e^{-2u(x)} dx < \infty$.

Further, we will deal with the case when the diffusions X^i are in their equilibria, i.e. X_t^i is distributed according to its invariant measure $\mu(dx) = e^{-2u(x)} dx / Z$, $x \in \mathbb{R}^d$, where $Z = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2u(x)} dx$.

Theorem 1. *The distributions of the normalized sums*

$$Y_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_t^i, \quad n \in \mathbb{N},$$

converge to the distribution of the Ornstein – Uhlenbeck process with parameters $(-\frac{1}{2}\mathbf{B}^{-1}, Id)$, as n goes to infinity, where $\mathbf{B} = \text{Var}(X_0^1)$.

Theorem 2. *The distributions of the measure-valued processes*

$$\nu_t^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_t^i \delta_{i/n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

as $n \rightarrow \infty$, converge to the distribution of the generalized Ornstein – Uhlenbeck process [4] with parameters $(-\frac{1}{2}\mathbf{B}^{-1}, Id)$, where $\mathbf{B} = \text{Var}(X_0^1)$ and δ is the Dirac mass.

Further research. Similar results are expected in the case of the interacting processes:

$$dX_t^i = -\nabla u(X_t^i) dt + \sum_{j=1}^n g(X_t^j - X_t^i) dt + dB_t^i, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i \leq n,$$

for a function $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ satisfying some growth properties.

Acknowledgement. This is a joint work with Prof. Anton Bovier from the University of Bonn, Germany.

References

1. Fischer K., Hertz J. *Spin glasses*. Vol. 1. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.
2. Greven A., den Hollander F. *Population growth in random media* // J. Statist. Phys. 1991. Vol. 65, no. 5–6. P. 1123–1154.
3. Kesten H., Sidoravicius V. *The spread of a rumor or infection in a moving population* // Ann. Probab. 2005. Vol. 33, no. 6. P. 2402–2462.
4. Holley R., Stroock D. *Generalized Ornstein – Uhlenbeck processes and infinite particle branching Brownian motions* // Publ. RIMS, Kyoto Univ., 1987. Vol. 14, no. 3. P. 741–788.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

ОБ ОРГРАФАХ, ИМЕЮЩИХ МВ-1Р С МАЛЫМ КОЛИЧЕСТВОМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ДУГ

М.Б. Абросимов, О.В. Моденова

Саратовский государственный университет
Астраханская 83, 410012 Саратов, Россия
{mic,oginiel}@rambler.ru

Граф $G^* = (V^*, \alpha^*)$ называется *минимальным вершинным k -расширением* (МВ- k Р) n -вершинного графа $G = (V, \alpha)$, если выполняются следующие условия:

- 1) граф G^* является вершинным k -расширением графа G , то есть граф G допускает вложение в каждый подграф графа G^* , получающийся удалением любых его k вершин;
- 2) граф G^* содержит $n + k$ вершин, то есть $|V^*| = |V| + k$;
- 3) α^* имеет минимальную мощность при выполнении условий 1) и 2).

Понятие минимального вершинного k -расширения введено на основе понятия оптимальной k -отказоустойчивой реализации, которое было предложено Хейзом в работе [1]. В работе [2] исследовалась задача описания неориентированных графов с заданным числом дополнительных ребер минимальных вершинных 1-расширений. В данной работе рассматривается аналогичная задача для орграфов. В статье рассматриваются только орграфы без петель.

В настоящей работе получены следующие результаты.

Теорема 1. *Орграфы, полученные объединением n двухвершинных цепей с t изолированными вершинами, где $t > 0$, и только они имеют минимальные вершинные 1-расширения с одной дополнительной дугой. Причем эти орграфы имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение.*

Теорема 2. *Среди связных орграфов гамильтоновы цепи P_n и только они имеют 2 дополнительные дуги в минимальном вершинном 1-расширении. Причем эти цепи имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение при $n > 2$. При $n = 2$ цепь имеет два неизоморфных минимальных вершинных 1-расширения: циклическую и транзитивную тройки.*

Теорема 3. *Среди несвязных орграфов без изолированных вершин только орграфы вида $P_n \cup C_{n+1} \cup \dots \cup C_{n+1}$ при $n > 2$, где графы C_{n+1} являются контурами, а граф P_n — гамильтоновой цепью, имеют единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на две дополнительные дуги. При $n = 2$ возможен еще один случай: вместо контура C_3 можно взять транзитивную тройку T_3 . Граф $P_2 \cup T_3 \cup \dots \cup T_3$ также имеет единственное с точностью до изоморфизма минимальное вершинное 1-расширение, отличающееся на две дополнительные дуги.*

Литература

1. Hayes J.P. *A graph model for fault-tolerant computing system* // IEEE Trans. Comput. 1976. Vol. C. 25, №9. P. 875–884.
2. Абросимов М.Б. *Характеризация графов с заданным числом дополнительных ребер минимального вершинного 1-расширения* // Прикладная дискретная математика. 2012. № 1. С. 111–120.

МИНИМИЗАЦИЯ МАКСИМАЛЬНОГО ВЕСА ПОДМНОЖЕСТВА В ПАРОСОЧЕТАНИИ В ДВУДОЛЬНОМ ГРАФЕ

М.С. Баркетов¹, Э. Пеш², Я.М. Шафранский¹

¹ Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси

Сурганова 6, 220012 Минск, Беларусь

barketau@mail.ru, shafr-04@yandex.ru

² Siegen University, Germany, erwin.pesch@uni-siegen.de

Рассматривается следующая задача. Дан полный двудольный граф $G = G(U, V, E)$, где U и V — множества вершин, а E — множество ребер графа. Для каждого ребра $(u, v) \in E$, $u \in U$, $v \in V$, задан его рациональный вес $w(u, v) \geq 0$. Множество U разбито на m подмножеств U_1, U_2, \dots, U_m , называемых компонентами. Для произвольного максимального паросочетания Π определим вес компонента U_i как сумму весов ребер с вершиной, принадлежащей этому компоненту: $w(U_i, \Pi) = \sum_{\{(u,v) \in \Pi | u \in U_i\}} w(u, v)$. Максимальным весом $w(\Pi)$ паросочетания Π будем называть максимальный из весов компонентов: $w(\Pi) = \max_{1 \leq i \leq m} w(U_i, \Pi)$. Задача заключается в том, чтобы найти максимальное паросочетание с минимальным максимальным весом. Обозначим эту задачу через Min-Max Weighted Matching. Специальный случай рассматриваемой задачи, когда $m = 1$, представляет собой известную задачу о максимальном паросочетании минимального веса, решение которой сводится к решению задачи о назначениях. Задача с $m > 1$ в литературе ранее не рассматривалась.

Мотивация задачи происходит из оптимизации операций погрузки-разгрузки контейнеров на железнодорожном терминале. Такой терминал состоит из нескольких параллельных путей, на которые прибывают железнодорожные составы с контейнерами. Кроме того, на железнодорожном терминале имеется автомобильная дорога, на которой паркуются грузовики. Вся площадь терминала разбита на непересекающиеся зоны по количеству подъемных кранов. Каждый кран работает только с теми составами, которые находятся в его зоне. Составы загоняются на терминал партиями. Каждый из выгружаемых с составов контейнеров должен попасть на «свой» грузовик. Каждый грузовик может быть размещен на любом из парковочных мест. Для каждого контейнера известно время, необходимое для его перемещения на каждое из парковочных мест. После выполнения всех операций по перемещению контейнеров, партия составов покидает терминал (все составы партии покидают терминал одновременно). Требуется минимизировать время обработки партии составов, что эквивалентно минимизации времени работы наиболее загруженного крана (крана, который завершает работу последним).

Эта задача может быть сформулирована в терминах задачи Min-Max Weighted Matching следующим образом. Множество U — это множество контейнеров, которые должны быть перемещены, V — это множество парковочных мест для грузовиков. Подмножество U_i — это подмножество контейнеров, находящихся в зоне i -го подъемного крана. Время перемещения контейнера на парковочное место задается как вес соответствующего ребра двудольного графа. В итоге, задача состоит в том, чтобы назначить каждый из контейнеров на конкретное парковочное место таким образом, чтобы минимизировать максимальную из сумм времен транспортировки контейнеров, находящихся в одной зоне.

Доказывается, что отыскание приближенного решения задачи Min-Max Weighted Matching с отношением значения целевой функции к минимальному значению менее 2 является NP -трудной в сильном смысле задачей. Отсюда следует, в частности, что рассматриваемая задача NP -трудна в сильном смысле. Предлагается приближенный алгоритм, который находит решения с относительной погрешностью, не превосходящей одного процента в среднем. Алгоритм включает решение серии специальным образом построенных задач о максимальном паросочетании минимального веса, а также локальный поиск.

ГЕТЕРОХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ГИПЕРГРАФА, АССОЦИИРОВАННОГО С ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ГРАФОМ

В.И. Бенедиктович

Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
vbened@im.bas-net.by

Гиперграфом $H = (V, E)$ называется упорядоченная пара, где V является множеством вершин, а E является семейством непустых подмножеств V , называемых *гиперребрами*.

Для натурального числа k и гиперграфа H , у которого множество вершин V мощности не менее k , k -*раскраской* H называется произвольный эпиморфизм $c: V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$.

Для заданной раскраски c гиперграфа H его гиперребро e называется *гетерохроматическим*, если все его различные вершины имеют различные цвета. *Гетерохроматическим* числом $h_c(H)$ непустого гиперграфа H называется наименьшее натуральное число k , такое, что H содержит гетерохроматическое ребро для произвольной своей k -раскраски c . Это понятие было введено в 1992 г. в [1] и тесно связано с числом анти-Рамсея и верхним хроматическим числом смешанного гиперграфа [2].

Двойной трансверсалью гиперграфа H без петель называется подмножество T вершин H , такое, что каждое гиперребро H содержит, по крайней мере, две вершины из множества T . Число вершин и мощность наименьшей двойной трансверсали гиперграфа H обозначим через $\nu(H)$ и $\tau(H)$ соответственно.

Геометрическим графом называется граф $G = (V, E)$, вершинами которого являются точки на плоскости в общем положении, а ребрами — отрезки, соединяющие пары этих вершин. Два ребра геометрического графа *пересекаются*, если они имеют общую внутреннюю (для обоих) точку пересечения. *Плоским* геометрическим подграфом графа $G = (V, E)$ называется подграф G без самопересечений своих ребер. Множество точек V на плоскости находится в *выпуклом положении*, если все они лежат на границе своей выпуклой оболочки.

Пусть на плоскости заданы $2n$ точек в выпуклом положении и $G = K_{2n}$ полный геометрический граф на них. С данным полным геометрическим графом может быть ассоциирован $(2n - 1)$ -униформный гиперграф $H(G) = (V(H), E(H))$, вершинами которого являются все ребра геометрического графа $G: V(H) = E(G)$, а гиперребрами — все плоские остовные деревья графа G . В этом случае ([3]) гетерохроматическое число равно $h_c(H) = \nu(H) - \tau(H) + 2$.

Мы с данным полным геометрическим графом $G = K_{2n}$ ассоциируем n -униформный гиперграф $H(G) = (V(H), E(H))$, вершинами которого также являются все ребра геометрического графа G , а гиперребрами являются всевозможные плоские совершенные паросочетания графа G . Наш основной результат следующий:

Теорема. Для $n \geq 3$ справедливы следующие оценки: $\nu(H) - 2n + 3 \leq h_c(H) \leq \nu(H) - n$.
Для $n = 2$ $h_c(H) = 5$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Института математики НАН Беларуси в рамках ГПФИ «Математические модели» и БРФФИ № Ф12РА-006.

Литература

1. Arocha J., Bracho J., Neumann-Lara V. *On the minimum size of tight hypergraphs* // J. Graph Theory. 1992. V. 16, no. 4. P. 319–326.
2. Voloshin V. *On the upper chromatic number of a hypergraph* // Australas J. Combin. 1995. V. 11. P. 25–45.
3. Montellano-Ballesteros J. J., Rivera-Campo E. *On the heterochromatic number of hypergraphs associated to geometric graphs and to matroids* // Graphs and Combinatorics. 2012. <http://128.84.158.119/abs/1011.4888>.

ГРАФЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФАСЕТЫ МНОГОГРАННИКА ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

Г.Г. Болоташвили^{1,2}, В.М. Демиденко³, Н.Н. Писарук¹

¹ Белгосуниверситет, экономический факультет
К. Маркса 31, 220050 Минск, Беларусь
pisaruk@yandex.ru

² Объединений институт проблем информатики НАН Беларуси
Сурганова 6, 220072 Минск, Беларусь
bolotashvili@yahoo.com

³ Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
demidenko@im.bas-net.by

Для описания многогранников NP -трудных задач в виде систем линейных неравенств необходимо построения отдельных классов фасет (граней максимальной размерности). Проблема описание многогранника задачи линейных порядков с помощью систем линейных неравенств, как и для любого многогранника NP -трудной задачи, до настоящего времени не решена. Для описания фасет многогранника задачи линейных порядков последнее время используются графы. В частности для конкретного графа $G(V, E)$ соответствующая графическая неравенства выписывается следующим образом [1, 2]:

$$\sum_{v \in V} \mu(v)x_{v, f(v)} - \sum_{v, w \in E} (x_{v, f(w)} + x_{w, f(v)}) \leq \alpha(G, \mu),$$

где $V, W \subset N_n$, $f: V \rightarrow W$ есть биекция.

Рассмотрим граф $G_k = (V_k, E_k)$, определенный на множестве вершин $V = 1, \dots, 3k - 1$ и на множестве ребер $E_k = E_k^1 \cup E_k^2 \cup E_k^3 \cup E_k^4$, где $k \geq 7$, k — нечетное, t — четное, $4 \leq t \leq k - 1$,

$$\begin{aligned} E_k^1 &= \{(v, w) : w - v \leq k - 1, 1 \leq v < w \leq k + 1\}, \\ E_k^2 &= \{(v, w) : w - v \leq k - 2, k + 2 \leq v < w \leq 3k - 1\} - \\ &- \{(v, w) : w - v \leq k - 2, 2k - 1 - (k - 3)/2 - (t - 4)/2 \leq v \leq 2k - 1 - (k - 3)/2, \\ &2k + 1 \leq w \leq 2k - 1 - (k - 3)/2 + k - 2\} - \{(v, w) : w - v \leq k - 2, \\ &2k + 2 + (k - 3)/2 \leq w \leq 2k + 2 + (k - 3)/2 + (t - 4)/2; 2k + 2 + (k - 3)/2 - (k - 2) \leq v \leq 2k\}, \\ E_k^3 &= \{(v, w) : 3 \leq v < (k + 1)/2 - (t - 4)/2; (k + 1)/2 + (t - 4)/2 + 1 < v \leq k + 1, \\ &k + 2 \leq w \leq v + k - 1\} - \{(v, w) : v = (k + 1)/2 + (t - 4)/2 + 1, \\ &(k + 1)/2 + (t - 4)/2 + 1 + k - 1 - (t - 4)/2 \leq w \leq (k + 1)/2 + (t - 4)/2 + 1 + k - 1\} \\ E_k^4 &= \{(v, w) : 1 \leq v < (k + 1)/2 - (t - 4)/2; (k + 1)/2 + (t - 4)/2 + 1 < v \leq k - 1, \\ &2k + v \leq w \leq 3k - 1\} - \{(v, w) : v = (k + 1)/2 - (t - 4)/2 - 1; 2k + v \leq w \leq 3k - 1\}. \end{aligned}$$

Пусть $\mu_k: V \rightarrow Z$ определяется следующим образом: $\mu_k(v) = t$, если $v = 1, \dots, k + 1$ и $\mu_k(v) = 1$, если $v = k + 2, \dots, 3k - 1$.

Теорема. *Граф (G_k, μ_k) определяет фасету многогранника задачи линейных порядков, где $\alpha(G_k, \mu_k) = t(t + 1)/2 + 1$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф11-194).

Литература

1. Doignon J. P., Fiorini S., Goret G. *Facets of the linear ordering politope: A unification for the fence family through weighted graphs* // Journal of Mathematical Psychology. 2006. P. 251–262.
2. Fishburn P. C. *Binary probabilities induced by rankings* // SIAM J. Discrete Math. 1990. P. 478–488.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕБОВАНИЙ

С.П. Бондаренко¹, А.М. Акинфина²

¹ Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
BondarenkoSP@bsu.by

² Белорусский экономический университет, факультет финансов и банковского дела
Партизанский 26, 220070 Минск, Беларусь
Akinfina@rambler.ru

Эффективное управление современным предприятием обеспечивается несколькими уровнями управления. Один из них — система оперативного управления производством, опирающаяся на методы моделирования и анализа данных. В основе системы лежит согласование данных, хранящихся в базе данных системы, и данных, соответствующих реальному состоянию производственных параметров. Система оперативного управления осуществляет построение и корректировку календарных план-графиков выполнения работ в связи с изменением производственной ситуации. Подобный подход позволяет обеспечить высокий уровень адаптации к постоянно меняющимся условиям производственного процесса. В задаче оперативного управления выделяется несколько этапов. На первом этапе формируется производственная программа функционирования технологического объекта на планируемый период. На последующих этапах список партий деталей сформированной производственной программы разбивается на группы в зависимости от используемого оборудования. На последнем этапе осуществляется формирование расписания работы оборудования. При этом с учетом имеющихся фондов рабочего времени на данный интервал планирования, комплектов используемых приспособлений и инструментов обеспечиваются минимальное время простоя оборудования и минимальное число переустановок комплектов инструментов и приспособлений.

В настоящей работе рассматриваются модели и методы решения задачи оптимального распределения требований, возникающей в системе оперативного управления производством.

В одностадийную обслуживающую систему, состоящую из M параллельных приборов, в момент времени $T > 0$ поступает множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ требований. Каждый прибор может обслуживать любое из требований данного множества, но не более одного одновременно. Не допускается и одновременное обслуживание любого требования несколькими приборами. Прерывания в обслуживании запрещены. Длительности $t_{iL} > 0$ обслуживания каждого требования $i \in N$ каждым прибором L , предполагаются заданными. Считаем, что $t_{iL} = a_L t_i$, т. е. каждый прибор L характеризуется производительностью, равной $1/a_L$. При обслуживании каждого требования $i \in N$ используется комплекс оснастки r_i длительности $p_{iL} > 0$ установки которого на любом приборе L предполагаются известными. Известен и временной ресурс $s_L > 0$ каждого прибора L . Величины a_L , s_L , p_{iL} назовем параметрами задачи.

Известно, что в одностадийной обслуживающей системе, содержащей M параллельных приборов, расписание, допустимое относительно указанных ограничений, полностью определяется распределений требований по приборам и указанием для каждого требования $i \in N$ момента $t_i^0 > 0$ начала его обслуживания.

В зависимости от ограничений, накладываемых на параметры задачи, рассматриваются различные математические модели задачи распределения требований. Для каждой модели определены критерии оптимальности, предложены точные или приближенные методы решений.

Литература

1. Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М. *Теория расписаний. Одностадийные системы*. М.: Наука, 1984.
2. Бондаренко С. П., Акинфина М. А. *Реализация системы динамического управления производственным объектом // Информационные технологии, электронные приборы и системы: Материалы международной научной конференции*. Минск: БГУ, 2010. Ч. 3. С. 17–21.

ОПИСАНИЕ 0,1-НАПРАВЛЯЮЩИХ КРАЙНИХ ЛУЧЕЙ КОНУСА ПОЛУМЕТРИК КОНЕЧНОГО МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В.М. Демиденко¹, Г.Г. Болоташвили^{2,3}, Н.Н. Писарук²

¹ Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
demidenko@im.bas-net.by

² Белгосуниверситет, экономический факультет
К. Маркса 31, 220050 Минск, Беларусь
pisaruk@yandex.ru

³ Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
Сурганова 6, 220072 Минск, Беларусь
bolotashvili@yahoo.com

В исследованиях, связанных с разработкой точных методов решения задачи многопродуктового потока в сети, важное место отводится описанию образующих конуса полуметрик конечного метрического пространства размерности n , который определяется системой

$$\text{sli}_1 = \{x_{i,i} = 0, \quad x_{i,j} - x_{j,i} = 0, \quad -x_{i,j} \leq 0, \quad x_{i,k} - x_{i,j} - x_{j,k} \leq 0 \mid 1 \leq i \neq j \neq k \leq n\}.$$

Решениями sli_1 являются матрицы, принадлежащие пространству симметрических матриц $R_s^{n \times n}$, и порождающие конус K_n . Рассмотрим бинарные матрицы e_{ij} с единственным ненулевым элементом, стоящим на пересечении i -й строки и j -го столбца, $1 \leq i < j \leq n$, и для любой упорядоченной тройки $1 \leq i < j < k \leq n$ положим

$$f_{ijk} = e_{ij} - e_{jk} - e_{ik}, \quad g_{ijk} = -e_{ij} + e_{jk} - e_{ik}, \quad h_{ijk} = -e_{ij} - e_{jk} + e_{ik}.$$

Указанные матрицы определяют систему неравенств

$$\text{sli}_2 = \{(f_{ijk}, x) \leq 0, \quad (g_{ijk}, x) \leq 0, \quad (h_{ijk}, x) \leq 0 \mid 1 \leq i < j < k \leq n\},$$

решениями которой являются матрицы из пространства строго треугольных матриц $R_t^{n \times n}$.

Теорема 1. Систем sli_2 определяет K_n с точностью до изоморфизма $\varphi : R_s^{n \times n} \rightarrow R_t^{n \times n}$.

На основе теоремы 1 разработан алгоритм построения множества 0,1-направляющих крайних лучей конуса K_n , которое обозначается $\text{dir}K_n$. При описании алгоритма используются операции дополнения и дублирования последнего столбца $x_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{k-1k}, x_{kk})^\top$ любой бинарной матрицы $x = (x_{ij})$ из $R_t^{k \times k}$, $2 \leq k \leq n-1$, где \top — знак транспонирования. Дополнением x'_k бинарного столбца x_k является столбец $x'_k = (x'_{1k}, x'_{2k}, \dots, x'_{k-1k}, x'_{kk})^\top$, где $x'_{ik} = 1$, если $x_{ik} = 0$, и $x'_{ik} = 0$, если $x_{ik} = 1$.

Алгоритм построения $\text{direc } K_n$. Начальный шаг. Полагаем

$$\text{direc } K_2 = \left\{ x_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Рекурсивный шаг. Для каждого $k = 3, 4, \dots, n$ просматриваем последовательно матрицы $x_i^{(k-1)} \in \text{direc } K_{k-1} \cup x_{2^{k-1}}^{(k-1)}$, где $x_{2^{k-1}}^{(k-1)}$ — нулевая $(k-1) \times (k-1)$ -матрица, и на основе каждой $x_i^{(k-1)}$ строим две $k \times k$ -матрицы $x_{2i-1}^{(k)}$, $x_{2i}^{(k)}$, полагая элементы k -й строки матриц $x_{2i-1}^{(k)}$, $x_{2i}^{(k)}$ равными нулю, и записывая далее в последний столбец матрицы $x_{2i-1}^{(k)}$ соответствующие элементы дополнения последнего столбца матрицы $x_i^{(k-1)}$, а в последний столбец матрицы $x_{2i}^{(k)}$ — соответствующие элементы последнего столбца матрицы $x_i^{(k-1)}$ для всех $i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$. В результате получаем $\text{direc } K_k \cup x_{2^k}^{(k)}$, где $x_{2^k}^{(k)}$ — нулевая $(k \times k)$ -матрица. На $n - 2$ -м шаге алгоритма строится множество $\text{direc } K_n \cup x_{2^n}^{(k)}$.

Теорема 2. Множество матриц $\text{direc } K_k$ с точностью до изоморфизма $\varphi : R_s^{n \times n} \rightarrow R_t^{n \times n}$ совпадает с множеством всех $0, 1$ -направляющих крайних лучей конуса полуметрик K_n , число которых равно $2^{n-1} - 1$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф11-194).

СЕРИЯ ПРИБЛИЖЕННЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ ТИПА $PS//C_{\max}$

Г.П. Волчкова, В.М. Котов

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
volchkovagr@mail.ru

Имеется n программ, m одинаковых процессоров и один сервер. Каждая программа i характеризуется временем s_i скачивания ее данных с сервера и временем p_i выполнения ее на процессоре. Каждая программа выполняется только на одном процессоре. Во время скачивания данных программы заняты сервер и соответствующий процессор. После завершения скачивания данных программа выполняется на процессоре. Необходимо так организовать порядок выполнения программ на процессорах, при котором время завершения последней программы минимально. Назовем программы работами, процессоры — приборами. Такая задача в теории расписаний классифицируется как $PS//C_{\max}$. Для этой задачи в [2] был предложен алгоритм с оценкой $2 - 1/m$.

В докладе предлагается серия алгоритмов, лучший из которых имеет гарантированную оценку $2 - \alpha$, где α — константа. Алгоритм, который назначает очередную работу в указанном порядке на первый освободившийся процессор назовем алгоритмом A . Значение расписания, полученного с помощью алгоритма A на i процессорах будем обозначать через $S^A(n, i)$. Справедливы следующие нижние оценки оптимального решения:

$$HO_1 \geq \sum_{i=1}^k s_i + p_k \quad \forall k, k = 1, \dots, n, \quad HO_2 \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n p_i, \quad HO = \max HO_1, HO_2.$$

Моменты времени, когда сервер не работает, хотя не все программы выполнили скачивание своих данных будем называть простоями сервера. Естественным образом можно определить интервалы простоя. Очевидно, что сервер может простаивать только в моменты времени,

когда загружены все процессоры. Под суммарным временем простоя будем понимать суммарную длину интервалов простоя. Обозначим через I_k суммарное время простоя до момента назначения работы k , $k = 1, \dots, n$, алгоритмом A . Сервер простаивает, когда идет выполнение на всех процессорах, а это не больше $(1/m) \sum_{i=1}^n p_i$. Пусть число приборов не больше числа работ. Тогда справедлива оценка:

$$C_{\max}(S^A) \leq \max_{k=1, \dots, n} \left\{ \sum_{i=1}^k s_i + p_k + I_k \right\}.$$

В качестве первого решения возьмем расписание $S^A(n, i)$. На основании этого решения строятся решения специальной структуры, позволяющее либо уточнить оценку оптимального решения, либо уменьшить время завершения выполнения последней работы. Из этих решений выбирается лучшее. Приводятся оценки разработанных алгоритмов.

Литература

1. Glass Y. M., Shafransky V. A., Strusevich V. A. *Scheduling for Parallel Dedicated Machines with a Single Server* // Naval Research Logistics. 2000. V. 47. P. 304–328.
2. Hall N. G., Potts C. N., Sriskandarajan C. *Parallel machine scheduling with a common server* // Working paper series WP 94-21, MaxM. Fisher College of business, The Ohio State University, Columbus, OH, 1994.

НОВЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВ РАЗБИЕНИЙ ЧИСЕЛ

А.С. Врублевский¹, В.А. Шлык²

¹ ИООО Управляющая компания «Атлант-М»
Шаранговича 22, 220022 Минск, Беларусь
alvrub@yandex.by

² Белорусский национальный технический университет
Независимости 65, 220013 Минск, Беларусь
v.shlyk@gmail.com

В построении теории разбиений участвовали многие крупные математики, начиная с Эйлера [1]. В последние десятилетия возрос интерес к разбиениям со стороны физиков, хотя асимптотическую формулу Харди — Рамануджана для числа разбиений впервые применили в физике Бор и Калкар [2]. Точная формула для их числа неизвестна до сих пор. Большинство исследований были направлены на вычисление чисел разбиений различных видов и вывод алгебраических и комбинаторных соотношений между классами разбиений [1].

В [3] предложен новый подход к изучению разбиений чисел, при котором каждое разбиение числа n отождествляется с точкой $x \in \mathbb{R}^n$, а множество всех разбиений n рассматривается как политоп P_n . Полиэдральный подход позволяет исследовать комбинаторно-геометрическую структуру множества разбиений и впервые предоставляет возможность выделить среди всех разбиений n подмножества разбиений, из которых можно построить все остальные. Первое такое подмножество составляют вершины P_n , поскольку все остальные разбиения являются их выпуклыми комбинациями. В [4] доказано, что все вершины можно построить из подмножества опорных вершин с помощью двух новых операций слияния частей. Другими словами, вершинный базис множества разбиений можно уменьшить, ограничившись опорными вершинами политопа.

Построены все вершины и опорные вершины политопов P_n для $n \leq 100$. Вычисления используют рекуррентное соотношение между множествами вершин политопов, позволяющее избежать построения разбиений, заведомо не являющихся вершинами [3]. Для

распознавания вершин среди оставшихся разбиений применяются достаточные и, отдельно, необходимые условия [3–5]. В отдельных случаях применяется универсальная (но медленная) программа Polymake [6] с подключением к ней разработанных функций для загрузки/выгрузки данных и обработки результатов. Вычисления показали, что число опорных вершин существенно меньше числа всех вершин, которое, в свою очередь, намного меньше числа разбиений. Полученные последовательности чисел вершин и опорных вершин включены в Онлайн-энциклопедию Слоана «Целочисленные последовательности» (номера A203898 и A203899). Попутно продолжена последовательность чисел рюкзачных разбиений A108917.

Результаты теоретических исследований и данные вычислений приводят к новым вопросам о комбинаторных и теоретико-числовых свойствах вершин, опорных вершин и их чисел.

Литература

1. Эндрюс Г. *Теория разбиений*. М.: Наука, 1982.
2. Bohr N., Kalckar F. *On the transmutation of atomic nuclei by impact of material particles: I. General theoretical remarks* // Kgl. Danske Vid. Selsk. Skr. 1937. Vol. 14. P. 1–40.
3. Shlyk V. A. *Polytopes of Partitions of Numbers* // European J. Combin. 2005. Vol. 26, № 8. P. 1139–1153.
4. Шлык В. А. *О вершинах политопов разбиений чисел* // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 3. С. 5–10.
5. Шлык В. А. *Комбинаторные операции порождения вершин политопов разбиений чисел* // Доклады НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 6. С. 27–32.
6. Gawrilow E., Joswig E. M. *Polymake: a framework for analyzing convex polytopes* // Polytopes – combinatorics and computation, G. Kalai and G. M. Ziegler eds. Basel: Birkhauser, 2000. P. 43–73.

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Д.А. Городецкий¹, В.П. Супрун²

¹ Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
Сурганова 6, 220012, Минск, Беларусь
danila.gorodecky@gmail.com

² Белорусский государственный университет
Независимости 4, 220030, Минск, Беларусь
suprun@bsu.by

Рассматривается задача полиномиального разложения булевых функций (БФ) $F = F(X)$, где $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Универсальные методы построения полинома Жегалкина $P(F)$ имеют сложность $O(2^n)$. Применительно к симметрическим БФ (СБФ) сложность методов составляет $O(n^2)$.

В докладе предлагается метод полиномиального разложения фундаментальных (элементарных) СБФ $F = F_n^i(X)$, где n — число переменных, i — рабочее число и $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Произвольная СБФ n переменных $F = F(X)$ представима в виде

$$F(X) = \bigvee_{i=0}^n \pi_i F_n^i(X) = \bigoplus_{i=0}^n \pi_i F_n^i(X) \quad \text{и} \quad F(X) = \bigoplus_{i=0}^n \gamma_i E_n^i(X),$$

где $\pi(F) = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n)$ — локальный код СБФ F , $\gamma(F) = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ — вектор коэффициентов полинома $P(F)$ и $E_n^i = E_n^i(X)$ — СБФ, полином Жегалкина который содержит ровно C_n^i слагаемых ранга i (такие СБФ называются полиномиально-однородными).

Предлагаемый метод полиномиального разложения функций $F = F_n^i(X)$ основан на построении двоичной $(n+1) * (n+1)$ -матрицы $H_n = [h_i]$, i -я строка которой h_i является вектором коэффициентов полинома Жегалкина $P(F_n^i)$, т. е. $h_i = \gamma(E_n^i)$.

Матрица H_n состоит из элементов двоичной $2^m * 2^m$ -матрицы D_m , находящихся на пересечении первых $n + 1$ строк и первых $n + 1$ столбцов, где $2^{m-1} < n + 1 \leq 2^m$. В свою очередь, матрица D_m формируется рекурсивным образом: $D_0 = 1$ и

$$D_j = \begin{bmatrix} D_{j-1} & D_{j-1} \\ 0 & D_{j-1} \end{bmatrix},$$

где $j = 1, 2, \dots, m$.

Поскольку $\gamma(F_n^i) = \pi(E_n^i)$ и $h_i = \gamma(E_n^i)$, то $h_i = \pi(E_n^i)$, т.е. i -я строка h_i матрицы $H_n = [h_i]$ представляет собой также локальный код функции $F = E_n^i(X)$. Следовательно, матрицу H_n можно использовать для вычисления множества рабочих чисел полиномиально-однородных СВФ $F = E_n^i(X)$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Сложность метода полиномиального разложения фундаментальных СВФ $F = F_n^i(X)$ составляет $O(n)$.

ИНВЕСТИЦИОННАЯ БУЛЕВА ЗАДАЧА В УСЛОВИЯХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОСТИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В.А. Емеличев, В.В. Коротков

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
emelichev@bsu.by, wladko@tut.by

Рассматривается s -критериальный дискретный (булевый) вариант известной задачи портфельной оптимизации Марковица [1] с максиминными критериями эффективности Вальда [2]

$$f_k(x, E_k) = \min_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} e_{ijk} x_j \rightarrow \max_{x \in X}, \quad k \in N_s,$$

состоящий в поиске множества Парето $P^s(E)$. Здесь $N_n = \{1, 2, \dots, n\}$ — альтернативные инвестиционные проекты (активы); N_m — возможные состояния рынка (сценарии развития); N_s — виды (показатели) эффективности инвестиционного проекта; $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — инвестиционный портфель, где $x_j = 1$, если инвестиционный проект $j \in N_n$ реализуется, и $x_j = 0$ в противном случае; e_{ijk} — ожидаемая эффективность вида $k \in N_s$ инвестиционного проекта $j \in N_n$ в случае, когда рынок находится в состоянии $i \in N_m$; $X \subseteq \mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$ — заданное множество портфелей; $E_k \in \mathbf{R}^{m \times n}$ — k -е сечение матрицы $E = [e_{ijk}] \in \mathbf{R}^{m \times n \times s}$.

Фактор неопределенности и некорректности исходной информации (элементов матрицы E) учитывается путем указания пределов надежности принимаемых инвестором решений, т.е. с помощью оценок радиуса устойчивости инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(E)$, под которым понимаем (см., например, [3]) число $\rho_p^s(x^0, E) = \sup \Xi_p$, если $\Xi_p \neq \emptyset$, и $\rho_p^s(x^0, E) = 0$, если $\Xi_p = \emptyset$, где $\Xi_p = \{\varepsilon > 0 : \forall E' \in \Omega_p(\varepsilon) (x^0 \in P^s(E + E'))\}$, $\Omega_p(\varepsilon) = \{E' \in \mathbf{R}^{m \times n \times s} : \|E'\|_p < \varepsilon\}$, $E' = [e'_{ijk}]$, $\|E'\|_p = (\|E'_1\|, \|E'_2\|, \dots, \|E'_s\|)_p$ — норма Гельдера l_p , $1 \leq p \leq \infty$, $\|E'_k\| = \sum_{i \in N_m} \sum_{j \in N_n} |e'_{ijk}|$, $k \in N_s$.

Теорема. При любых $m, s \in \mathbf{N}$ и $1 \leq p \leq \infty$ для радиуса устойчивости $\rho_p^s(x^0, E)$ инвестиционного портфеля $x^0 \in P^s(E)$ справедливы следующие достижимые оценки:

$$\varphi \leq \rho_p^s(x^0, E) \leq 2\varphi.$$

Здесь $\varphi = \min\{\| [g(x^0, x, E)]^+ \|_p : x \in X \setminus \{x^0\}\}$, $g(x^0, x, E) = (g_1(x^0, x, E_1), g_2(x^0, x, E_2), \dots, g_s(x^0, x, E_s))$, $g_k(x^0, x, E_k) = f_k(x^0, E_k) - f_k(x, E_k)$, $k \in N_s$, знак “+” означает положительную срезку вектора.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф11К-095).

Литература

1. Markowitz H. M. *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Oxford: Blackwell, 1991.
2. Вальд А. *Статистические решающие функции*. В сборн. *Позиционные игры* / под ред. Н. Н. Воробьева и Н. Н. Врублевской. М.: Наука, 1967.
3. Емеличев В. А., Коротков В. В. *Об устойчивости эффективного решения векторной инвестиционной булевой задачи с минимаксными критериями Сэвиджа* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2010. Т. 18, № 2. С. 3–10.

ПОСТОПТИМАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ
О МАКСИМАЛЬНОМ РАЗРЕЗЕ ГРАФ

В.А. Емеличев, К.Г. Кузьмин

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
emelichev@bsu.by, kuzminkg@mail.ru

Рассмотрим простой связный ориентированный граф $G = (V, E)$ [1] с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$ и множеством дуг $E \subseteq \{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n\}$, $|E| = m$. Пусть все вершины графа G разбиты на два непересекающихся подмножества S и \bar{S} . Множество всех дуг графа, концевые вершины которых находятся в разных подмножествах, называется разрезом графа и обозначается (S, \bar{S}) . Очевидно, что любой разрез (S, \bar{S}) графа G порождает булев вектор $x \in \mathbf{E}^n = \{0, 1\}^n$ с компонентами $x_i = 1$, если $i \in S$, и $x_i = 0$, если $i \in \bar{S}$. Тем самым, множеству всех разрезов графа порядка n ставится в соответствие множество булевых векторов $X \subseteq \mathbf{E}^n \setminus \{0_{(n)}, 1_{(n)}\}$, где $0_{(n)} = (0, 0, \dots, 0)$ и $1_{(n)} = (1, 1, \dots, 1)$. Каждой дуге $(i, j) \in E$ сопоставим вектор-столбец $(w_{ij}^1, w_{ij}^2, \dots, w_{ij}^s)^T$, где $w_{ij}^k \in \mathbf{R}$ — вес дуги (i, j) , соответствующий критерию $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Из этих m столбцов, упорядоченных, например, лексикографическим способом, образуем матрицу $W = [w_{ij}^k] \in \mathbf{R}^{s \times m}$. В этих обозначениях очевидно, что квадратичная функция $f_k(x, W) = \sum_{(i,j) \in E} w_{ij}^k (x_i - x_j)^2$, представляет собой вес разреза (S, \bar{S}) по критерию k , где $S = \{i \in V : x_i = 1\}$ и $\bar{S} = \{i \in V : x_i = 0\}$.

В результате возникает s -критериальный вариант задачи о максимальном разрезе графа

$$Z^s(W) : f(x, W) = (f_1(x, W), f_2(x, W), \dots, f_s(x, W)) \rightarrow \max_{x \in X}$$

состоящей в поиске множества $P^s(W)$ Парето-оптимальных разрезов.

Радиусом устойчивости разреза $x^0 \in P^s(W)$, $s \in \mathbf{N}$, в метрике Гельдера l_p , $p \geq 1$, называется [2] число $\rho_p^s(x^0, W) = \sup \Xi$, если $\Xi \neq \emptyset$, и $\rho_p^s(x^0, W) = 0$, если $\Xi = \emptyset$, где $\Xi = \{\varepsilon > 0 : \forall U \in \Omega(\varepsilon) (x^0 \in P^s(W + U))\}$, $\Omega(\varepsilon) = \{U \in \mathbf{R}^{s \times m} : \|U\|_p < \varepsilon\}$, $U = [u_{ij}^k] \in \mathbf{R}^{s \times m}$, $\|U\|_p$ — норма l_p вектора, составленного из всех элементов матрицы U .

Теорема. При любых $s \in \mathbf{N}$ и $x^0 \in P^s(W)$, справедлива формула

$$\rho_p^s(x^0, W) = \begin{cases} \min_{x \in X \setminus \{x^0, \bar{x}^0\}} \sum_{k=1}^s [f_k(x^0, W) - f_k(x, W)]^+, & \text{если } p = 1, \\ \min_{x \in X \setminus \{x^0, \bar{x}^0\}} \|[f(x^0, W) - f(x, W)]^+\|_p \left(\sum_{(i,j) \in E} \|x_i^0 - x_j^0\| - |x_i - x_j| \right)^{-1/q}, & \text{если } 1 < p \leq \infty. \end{cases}$$

Здесь $\bar{x}^0 = 1_{(n)} - x^0$; $[z]^+$ — положительная срезка вектора $z \in \mathbf{R}^s$; величины p и q связаны равенством $1/p + 1/q = 1$, при этом, как обычно, считаем, что $q = 1$, если $p = \infty$.

Работа поддержана грантом БРФФИ, проект № Ф11К-095.

Литература

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов*. М.: Либроком, 2009. 392 с.
2. Емеличев В. А., Кузьмин К. Г. *О радиусе устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования в метрике Гельдера* // Кибернетика и системный анализ. 2006. № 4. С. 175–181.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БЛОКА КОДИРОВАНИЯ ДАННЫХ
МИКРОСХЕМЫ РАДИОЧАСТОТНОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

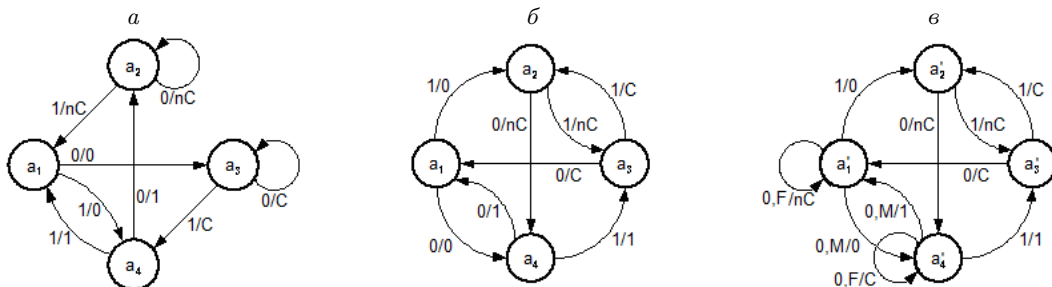
В.С. Зайцев, В.Я. Степанец

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
zaicevvs@tut.by, stepanets@bsu.by

Одной из основных функций цифровой части получивших в последнее время широкое распространение систем радиочастотной идентификации (РЧИД) является кодирование информации, пересылаемой между ее передатчиком и приемником. Выбор типа кодирования во многом определяет надежность и помехозащищенность передачи данных. РЧИД системы, работающие в соответствии с международным стандартом ISO 18000-6С, должны поддерживать два типа кодирования: код Миллера и код FM0. Поэтому, архитектура РЧИД микросхем, обычно, включает два независимо работающих блока кодирования и мультиплексор выбора используемого в данный момент типа кодировки [1]. Такое решение обеспечивает высокую скорость обработки, но приводит к значительным потерям площади кристалла. Выполненные исследования позволили построить математическую модель, использование которой при проектировании РЧИД микросхем позволило без потери производительности практически вдвое сократить число элементов блока кодирования.

На начальном этапе разработки было установлено, что наилучшие результаты синтеза при использовании в процессе проектирования микросхемы программы Leonardo Spectrum фирмы Mentor Graphics обеспечиваются в случае представления блока кодирования в виде конечного автомата.

На рисунке приведены графы переходов-выходов исходных автоматов генерации кодов Миллера, FM0 и разработанного объединенного автомата, полученного из исходных путем замены переменных и введения дополнительного условия перехода.



Графы поведения автоматов кодировки Миллера (а), FM0 (б) и совмещенного автомата (в); $a_1 - a_4$, $a'_1 - a'_4$ — состояния автомата до и после замены; 0, 1 — уровни сигнала; M, F — признаки типа кодирования; C, nC — прямое и инверсное значения тактового сигнала

Полученная математическая модель блока кодирования была описана на языке VHDL и использована для выполнения автоматического синтеза совмещенного блока кодирования [2]. Его площадь составила $1595 \mu\text{м}^2$, в то время как общая площадь блоков отдельной

реализации кодировок составляла 2657 мкм^2 (1330 мкм^2 для получения кода Миллера и 1327 мкм^2 для кода FM0). Математическая модель была использована при проектировании нескольких РЧИД микросхем, в настоящее время выпускаемых ОАО «Интеграл».

Литература

1. ATA5577C Read/Write LF RFID IDIC 100 to 150kHz // Atmel [Electronic resource]. 2012. Mode of access: <http://www.atmel.com/Images/doc9187.pdf> Date of access: 27.05.2012.
2. Zaitsau V., Stepanets V. *The Expeirence of Use of VHDL Synthesis in Designing Radio Frequency Identification System* // CADSM'2011, 23–25 Febrary, 2011, Polyana-Svalyava (Zakarpattiya), Ukraine. P. 136–141.

ПЕРИМЕТР МАТРОИДА И ЗАДАЧА КОММИВОЯЖЕРА НА МАТРОИДЕ

А.Н. Исаченко¹, Я.А. Исаченко²

¹ Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
isachen@bsu.by

² Микротест, 1-й Дербеневский пер. 5, стр. 2, 115114 Москва, Россия
yarais@mail.ru

Аксиоматизация матроида может проводится на основе различных понятий: независимого множества, базиса, цикла, функции ранга, остовного множество, оператора замыкания, плоскости, гиперплоскости, функции периметра, циклического множества, функции окружения. Учитывая двойственные соотношения, матроид можно определить также в терминах конезависимых множеств, кобазисов, коциклов и т. д. [1, 2].

Введем два новых понятия для матроида. H — периметром (L — периметром) матроида (S, F) назовем функцию $\gamma_H : 2^S \rightarrow N$ ($\gamma_L : 2^S \rightarrow N$) со значениями $\gamma_H(A) = \max\{|C| : C \subseteq A, C \text{ — цикл}\}$ ($\gamma_L(A) = \min\{|C| : C \subseteq A, C \text{ — цикл}\}$), если A зависимое множество, и $\gamma(A) = 0$, если $A \in F$.

Теорема (аксиомы H -периметра (L -периметра)). *Функция γ_H (γ_L) является функцией H -периметра (L -периметра) некоторого матроида (S, F) тогда и только тогда, когда для нее выполняются условия:*

- 1) если $\gamma_H(X) > 0$ ($\gamma_L(X) > 0$), то существует множество $Y \subseteq X$, для которого $\gamma_H(X) = \gamma_H(Y) = |Y|$ ($\gamma_L(X) = \gamma_L(Y) = |Y|$);
- 2) если $X \supseteq Y$, то $\gamma_H(X) \geq \gamma_H(Y)$ ($\gamma_L(X) \leq \gamma_L(Y)$);
- 3) если $\gamma_H(X) = |X|$ ($\gamma_L(X) = |X|$), то $\gamma_H(X \setminus x) = 0$ ($\gamma_L(X \setminus x) = 0$) для любого $x \in X$;
- 4) если $\gamma_H(X) = |X|$ ($\gamma_L(X) = |X|$), $\gamma_H(Y) = |Y|$ ($\gamma_L(Y) = |Y|$), $X \neq Y$, $x \in X \cap Y$, то $\gamma_H((X \cup Y) \setminus x) > 0$ ($\gamma_L((X \cup Y) \setminus x) > 0$).

Можно сформулировать двойственные понятия: H -окружение и L -окружение матроида. H -окружением (L -окружением) матроида назовем функцию $\varphi : 2^S \rightarrow N \cup \{\infty\}$, задаваемую равенствами $\varphi(A) = \max\{|H| : A \subseteq H, H \text{ — гиперплоскость}\}$ ($\varphi(A) = \min\{|H| : A \subseteq H, H \text{ — гиперплоскость}\}$), если ранг A меньше ранга S , и $\varphi(A) = \infty$, в противном случае. С учетом двойственности формулируются аксиомы H -окружения и L -окружения.

Пусть ранг $\rho(S, F) = k$. Цикл матроида C назовем гамильтоновым, если $|C| = k + 1$. Соответственно базу матроида назовем гамильтоновой, если существует содержащий ее гамильтонов цикл. Припишем каждому элементу $e \in S$ вес $w(e) \geq 0$. Сформулируем задачу коммивояжера на матроиде (S, F) , как задачу поиска гамильтонова цикла минимального веса. В сообщении приводятся результаты о сложности решения задачи в зависимости от оракула, используемого алгоритмом.

Литература

1. Исаченко А. Н. *Полиномиальная сводимость матроидных оракулов* // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1984. № 6. С. 33–36.
2. Исаченко А. Н., Ревякин А. М. *О сводимости матроидных оракулов* // Вестн. МГАДА. Сер. Философские, социальные и естественные науки. 2011. № 3. С. 117–127.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ СВОЙСТВ ДЛЯ БИНАРНЫХ МАТРОИДОВ

А. Н. Исаченко¹, А. М. Ревякин²

¹ Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
isachen@bsu.by

² Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
проезд 4806, д. 5, 124498 Зеленоград, Москва, Россия
arevyakin@mail.ru

Используются терминология и обозначения работ [1–5]. Матроид M на множестве S называется базово упорядоченным, если для любых двух баз B_1, B_2 матроида M существует такая биекция $\pi : B_1 \rightarrow B_2$, что для любого $x \in B_1$ как $(B_1 \setminus \{x\}) \cup \{\pi(x)\}$, так и $(B_2 \setminus \{\pi(x)\}) \cup \{x\}$ являются базами матроида M . Скажем, что матроид M является строго базово упорядоченным, если для любых двух баз B_1, B_2 матроида M существует такая биекция $\pi : B_1 \rightarrow B_2$, что для всех подмножеств $A \subseteq B_1$ множество $(B_1 \setminus A) \cup \pi(A)$ является базой матроида M . Легко показать, что для любого такого π множество $(B_2 \setminus \pi(A)) \cup A$ также является базой матроида M . Очевидно, что если M является строго базово упорядоченным, то он — базово упорядоченный. Но обратное утверждение неверно.

Классы базово упорядоченных и строго базово упорядоченных матроидов замкнуты относительно объединения, взятия миноров и перехода к двойственным матроидам.

Приведем примеры базово упорядоченных и строго базово упорядоченных матроидов.

Циклический матроид $M(K_4)$ полного графа K_4 является базово упорядоченным.

Трансверсальные матроиды и гаммоиды — строго базово упорядоченные матроиды.

Примером матроида, не являющегося базово упорядоченным, служит матроид Фано.

Последовательно-параллельным матроидом называется матроид, который может быть получен с помощью последовательных и параллельных расширений из одноэлементного матроида. Последовательно-параллельный матроид не более, чем циклический матроид некоторой последовательно-параллельной сети. Поэтому для графа, определяющего сеть, и циклического матроида этого графа используется одно и то же название последовательно-параллельной сеть.

Дается новое доказательство эквивалентности следующих свойств для бинарных матроидов.

Теорема. Пусть M — бинарный матроид. Тогда эквивалентны утверждения:

- 1) M — гаммоид;
- 2) M — базово упорядоченный матроид;
- 3) M — последовательно-параллельная сеть;
- 4) M не содержит в качестве минора циклический матроид $M(K_4)$ полного графа K_4 .

Более того, каждый бинарный базово упорядоченный матроид является строго базово упорядоченным.

Литература

1. Welsh D. J. A. *Matroid theory*. London: Acad. Press, 1976. 433 p.
2. Recski A. *Matroid theory and its applications in electric network theory and in statics*. Budapest: Akad. Kiado, 1989. 531 p.
3. Oxley J. G. *Matroid theory*. N.Y.: Oxford University Press, 2006. 532 p.
4. Revyakin A. M. *Matroids* // J. Math. Sci. 2002. V. 108, no. 1. P. 71–130.
5. Ревякин А. М. *Матроиды: крипоморфные системы аксиом и жесткость ферм* // Вестн. МГАДА. Сер. Философские, социальные и естественные науки. 2010. Вып. 5. С. 96–106.

О ЦИКЛИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРАФОВ ШЕСТИУГОЛЬНОЙ РЕШЕТКИ

П. А. Иржавский

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
 Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
 smylic@mail.ru

Обозначим через H^∞ бесконечный плоский граф, соответствующий регулярному замощению плоскости \mathbb{R}^2 конгруэнтными правильными шестиугольниками. Вершинами графа H^∞ являются точки плоскости с декартовыми координатами $(x + y/2, y\sqrt{3}/2)$, где x и y целые числа, $x \not\equiv y \pmod{3}$. Две вершины смежны в H^∞ тогда и только тогда, когда евклидово расстояние между соответствующими точками равно 1. Будем считать, что H^∞ геометрический граф, т. е. граф, уложенный на плоскости так, что каждое его ребро представляет собой замкнутый прямолинейный отрезок.

Произвольный конечный порожденный подграф графа H^∞ называется *графом шестиугольной решетки*. Будем рассматривать такой граф одновременно как граф и геометрическую фигуру, образованную всеми точками, принадлежащими границам граней этого графа, и внутренними точками граней, границы которых являются шестиугольниками.

Граф G шестиугольной решетки называется *линейно выпуклым*, если пересечение фигуры G с любой прямой l , содержащей ребро графа H^∞ , либо пусто, либо является точкой или отрезком прямой l . *Топологическим графом шестиугольной решетки* называется 3-регулярный граф без петель и кратных ребер, гомеоморфный графу шестиугольной решетки.

Граф называется *гамильтоновым*, если в нем имеется *гамильтонов цикл*, т. е. простой цикл, содержащий каждую вершину этого графа. Хорошо известно, что проблема распознавания гамильтоновости графа является *NP*-полной. В [5] показано, что она остается *NP*-полной для графов шестиугольной решетки.

Коэффициентом сжатости семейства \mathcal{G} графов называется число $\liminf_{G_n \in \mathcal{G}} h(G_n)/|G_n|$, где точная нижняя грань берется по всем последовательностям $\{G_n\}_{n=1}^\infty$ графов $G_n \in \mathcal{G}$, для которых $|G_n| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь $h(G_n)$ — длина наибольшего простого цикла в G_n .

В [1–5] представлена серия результатов, касающихся гамильтоновости графов треугольной и квадратной решеток. Графы шестиугольной решетки исследованы в меньшей степени. Автором установлены следующие результаты.

Теорема 1. *Всякий топологический граф связного линейно выпуклого графа шестиугольной решетки является гамильтоновым.*

Теорема 1 доказывается конструктивно, что дает линейный алгоритм построения гамильтонова цикла в графе из рассматриваемого класса.

Теорема 2. *Наименьший 2-связный негамильтонов топологический граф шестиугольной решетки имеет 16 вершин и является единственным с точностью до изоморфизма.*

Таким образом, в формулировке теоремы 1 условие линейной выпуклости графа шестиугольной решетки нельзя заменить на условие 2-связности топологического графа.

Найдена также серия топологических графов шестиугольной решетки, позволяющая установить, что коэффициент сжатости этого класса графов не превосходит $8/9$.

Литература

1. Itai A., Papadimitriou C. H., Szwarcfter J. L. *Hamiltonian paths in grid graphs* // SIAM J. Comput. 1982. V. 11. P. 676–686.
2. Reay J. R., Zamfirescu T. *Hamiltonian cycles in T -graphs* // Discrete Comput. Geom. 2000. V. 24. P. 497–502.
3. Zamfirescu C., Zamfirescu T. *Hamiltonicity of topological grid graphs* // J. UCS. 2007. V. 13. P. 1791–1800.
4. Gordon V. S., Orlovich Y. L., Werner F. *Hamiltonian properties of triangular grid graphs* // Discrete Math. 2008. V. 308. P. 6166–6188.
5. Arkin E. M. et al. *Not being (super)thin or solid is hard: A study of grid Hamiltonicity* // Comput. Geom. 2009. V. 42. P. 582–605.

ДОМИНАНТНО-ТРЕУГОЛЬНЫЕ ГРАФЫ: ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И СЛОЖНОСТНЫЕ АСПЕКТЫ

Ю.А. Картычник, Ю.Л. Орлович

Белгосуниверситет, факультет прикладной математики и информатики
Независимости 4, 220030 Минск, Беларусь
kartychnik@gmail.com, orlovich@bsu.by

Рассматриваются конечные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Все термины и обозначения, употребляемые здесь без определения, можно найти в [1, 2].

Граф $G = (V, E)$ называется *доминантно-треугольным*, если он удовлетворяет следующему условию: для любого минимального доминирующего множества $D \subseteq V$ и любого ребра uv подграфа $G - D$ существует вершина $w \in D$, такая что множество $\{u, v, w\}$ порождает треугольник (т. е. простой цикл длины 3) в графе G .

Заметим, что если в определении доминантно-треугольного графа термин «минимальное доминирующее множество» заменить на «максимальное независимое множество», то мы получим определение треугольного графа. Класс треугольных графов введен в [3] и изучен во многих аспектах (см., например, [4, 5]). Доминантно-треугольные графы образуют собственный подкласс треугольных графов, поскольку каждое максимальное независимое множество является также и доминирующим. Сложность распознавания треугольных графов является открытой проблемой в теории графов. В то же время, как показывает следующий результат, доминантно-треугольные графы распознаются за полиномиальное время.

Теорема. *Граф является доминантно-треугольным тогда и только тогда, когда для любого его ребра uv найдется такая вершина $w \in N[u] \cap N[v]$, что $N[w] \subseteq N[u] \cap N[v]$. Здесь $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ — замкнутое окружение вершины x .*

Класс доминантно-треугольных графов не является наследственным, но обладает следующим «псевдонаследственным» свойством: он замкнут относительно удаления произвольного множества вершин (возможно, пустого) вместе с их окружениями. Этот результат позволяет получить характеристику класса доминантно-треугольных графов в терминах запрещенных ко-окрестностных подграфов, т. е. подграфов, которые получаются из графа удалением произвольного множества вершин вместе с его окружением.

Для класса доминантно-треугольных графов установлены результаты о сложностном статусе вычисления ряда теоретико-графовых инвариантов, родственных классическим числам

независимости и доминирования (число независимого доминирования, число независимого окрестностного множества, число окрестностного множества). В частности, показано, что для любого $\varepsilon > 0$ (при условии $P \neq NP$) задачу вычисления числа независимого доминирования для доминантно-треугольных графов порядка n нельзя аппроксимировать за полиномиальное время с точностью до $n^{1-\varepsilon}$. Установлено, что распознавательная версия задачи вычисления классического числа доминирования NP -полна в классе доминантно-треугольных графов даже при дополнительном условии, что граф планарен и имеет максимальную степень 6. Найдены также некоторые полиномиально разрешимые случаи этих задач для доминантно-треугольных графов.

Литература

1. Емеличев В. А. и др. *Лекции по теории графов*. М.: Наука, 1990. 384 с.
2. Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J. *Fundamentals of domination in graphs*. New York: Marcel Dekker Inc., 1998. 446 p.
3. Orlovich Yu. L., Zverovich I. *Independent domination in triangle graphs* // Electron. Notes Discrete Math. 2007. V. 28. P. 341–348.
4. Orlovich Y. et al. *On the complexity of the independent set problem in triangle graphs* // Discrete Math. 2011. V. 311. P. 1670–1680.
5. Miklavič Š., Milanič M. *Equistable graphs, general partition graphs, triangle graphs, and graphs products* // Discrete Appl. Math. 2011. V. 159. P. 1148–1159.

МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМЫ СИНТЕЗА СТРАТЕГИЙ ОБСЛУЖИВАНИЯ БИНАРНОГО ПОТОКА ОБЪЕКТОВ ПРИ НАЛИЧИИ ДВУХ КРИТЕРИЕВ ОЦЕНКИ

А.С. Куимова

Волжская государственная академия водного транспорта
Нестерова 5а, 603950 Нижний Новгород, Россия
anastasia.kuimova@gmail.com

Рассматриваемая проблема возникла в связи с созданием компьютерных средств поддержки оперативного управления Северным завозом дизельного топлива через речной порт г. Салехард. Прибывающие в порт с юга Западной Сибири крупнотоннажные танкеры на специализированном терминале выгружают доставленное топливо в береговой резервуар. На этом же терминале осуществляется загрузка топливом малотоннажных танкеров для доставки его потребителям, расположенным по берегам малых рек приполярного региона полуострова Ямал. Задача диспетчера порта состоит в том, чтобы сократить экономические потери, связанные с простоем судов в ожидании обслуживания и обеспечить выполнение установленных директивных сроков.

Вводится математическая модель однопроцессорного обслуживания потока объектов, состоящего из двух подпотоков — входящего и исходящего. Объекты характеризуются целочисленными значениями параметров: момент поступления в очередь на обслуживание, норма длительности обслуживания, штраф за единицу времени простоя в ожидании обслуживания, мягкий директивный срок завершения обслуживания, объемная характеристика.

Обслуживание прибывшего в очередь объекта может быть начато свободным процессором в любой момент времени; обслуживание осуществляется без прерываний; необслуженный объект не может покинуть очередь; непроизводительные простои процессора запрещены. Процессор может начать обслуживание объекта из входящего подпотока при наличии свободного места в резервуаре, объект исходящего подпотока может быть обслужен при наличии достаточного количества топлива в резервуаре.

Стратегия обслуживания представляет собой перестановку длины n , где n — число обслуживаемых объектов. В сформулированной задаче диспетчеризации стратегии оцениваются по двум независимым минимизируемым критериям: суммарному штрафу за простой объектов в ожидании обслуживания и максимальному нарушению директивных сроков завершения обслуживания. Известно, что при учете только первого критерия оптимизационная задача адекватная описанной модели технологического процесса NP -трудна [1].

В докладе приводятся два алгоритма синтеза оптимальных стратегий управления:

- 1) точный алгоритм динамического программирования со сложностью $\mathcal{O}(n^3 2^n)$;
- 2) точный алгоритм ветвей и границ. Несмотря на экспоненциальную оценку сложности этого алгоритма, экспериментальные данные позволяют сделать вывод о его достаточной эффективности в среднем для решаемой реальной задачи.

Алгоритмы соответствуют наиболее общему подходу к построению эффективных решений — парадигме бикритериальной Парето-оптимальности [2], наиболее приемлемой в условиях непрерывно изменяющейся оперативной обстановки. Результаты исследования алгоритмов на тестовых наборах данных различных размерностей позволили сформулировать рекомендации для их наиболее рационального применения.

Литература

1. Коган Д. И., Федосенко Ю. С., Шеянов А. В. *Моделирование и оптимизация управления обслуживанием потока объектов в системе с изодромным элементом* // Межвузовский сб. науч. тр. Вып. 273. Ч. 1. Н. Новгород: Изд-во ВГАВТ, 1996. С. 44–54.
2. Подиновский В. В., Ногин В. Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. М.: Физматлит, 2007. 256 с.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ ДЛЯ БОЛЬШИХ СИСТЕМ

К. В. Кутхашвили

Университет Грузии, факультет математики и информатики
ул. Костава 77а, 0171 Тбилиси, Грузия
kkutkhashvili@yahoo.com

Среди задач дискретной оптимизации значительное место занимают задачи прикладного значения. Идеи дискретности широко используются в технической кибернетике для планирования целого ряда производств народного хозяйства. Многие задачи управления или планирования фиксированного ресурса при условии конечного множества заданий требуют их упорядочения во времени. От постановки таких задач и от качества их решения во многом зависят рациональная организация работ и эффективность производства.

Возможность изучения и построения эффективных математических моделей для этих задач дают те методы оптимизации, которые называются методами календарного планирования. Суть метода состоит в следующем: систему заданий следует выполнить с помощью определенного количества ресурсов или возможностями обслуживания. При заданных условиях и ограничениях, наложенных на систему заданий и на дополнительные ресурсы, следует построить эффективный алгоритм, с помощью которого было бы возможно нахождение оптимального порядка выполнения заданий, а также, чтобы по какой-нибудь мере эффективности данный метод дал бы возможность достигнуть оптимальности. Мерой эффективности могут быть стоимость выполнения всех заданий, среднее время пребывания в системе заданий, длина расписания с точки зрения времени и т. д.

Целью работы является исследование одной конкретной задачи теории расписаний: выполнение заданий возможно с помощью одношаговой многопроцессорной системы, где процессоры полностью взаимозаменяемые. К тому же множество частичного упорядочения не является пустым, а множество дополнительных ресурсов ограничено. Для выполнения входящих в систему заданий число необходимых процессоров бесконечно.

Для описанной задачи построен многокритериальный алгоритм. С этой целью использованы методы комбинаторного анализа и теории графов. Построенный алгоритм, который дает возможность построения наилучшего расписания, для мобильного управления системой даст принимающему решение лицу рекомендации в диалоговом режиме.

Литература

1. *Теория расписаний и вычислительные машины* / (под ред. Э. Г. Коффмана). М.: Наука, 1984.
2. Танаев В. С., Гордон В. С., Шафранский Я. М. *Теория расписаний*. М.: Наука, 1983.
3. Salukvadze M. E. *Vector-Valued Optimization Problems in Control Theory*. New York: Academic Press, 1979.
4. Kutkhashvili K. *Algorithm for multicriterion problem of scheduling theory* // Georgian Academy of sciences A. Eliashvili Institute of Control Systems proceedings. 2005. No. 9. P. 68–73.

О БИКЛИКОВОМ ПОКРЫТИИ ЛЕСТНИЦЫ, ЛЕСТНИЦЫ МЕБИУСА, ПРИЗМЫ И РЕШЕТКИ

В.В. Лепин, О.И. Дугинов

Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
lepin@im.bas-net.by

Введение. Рассматриваются только неориентированные графы без кратных ребер, петель. Все используемые, но не определяемые здесь понятия взяты из книги [1].

Определение 1. Бикликой графа $G = (V, E)$ называется полный двудольный подграф графа G (не обязательно вершинно-порожденный).

Определение 2. Бикликовым покрытием (соответственно, разбиением) графа G называется множество S биклик графа G такое, что каждое ребро содержится хотя бы (соответственно, в точности) в одной биклике из S . Мощность минимального бикликового покрытия (соответственно, разбиения) графа G называется числом бикликового покрытия (соответственно, разбиения) графа G и обозначается как $bc(G)$ (соответственно, $bp(G)$).

Задачи связанные с покрытием ребер графа подграфами специального вида являются одними из базовых задач в области комбинаторной оптимизации на графах. В частности, задача нахождения $bc(G)$ графа G широко исследуется [2–6], так как имеет важное теоретическое и прикладное значение в области искусственного интеллекта, биологии, теории потоков [4, 7].

Определение 3. Лестницей L_n называется декартово произведение двух цепей P_2 и P_n , т.е. $L_n = P_2 \times P_n$. Граф $H_n = P_2 \times C_n$ называется призмой. Граф, полученный в результате переключения двух ребер призмы H_n как показано на рисунке, называется лестницей Мебиуса и обозначается как M_n . Двумерной решеткой называется граф $G_{m,n} = P_m \times P_n$, где $m \leq n$.

Графы, такие как лестница, призма, лестница Мебиуса, имеют широкое применение в химии [8]. Двумерные решетки используются в области обработки изображений, статистической физики, теории графов.

Число бикликового покрытия графа. Доказаны следующие утверждения.

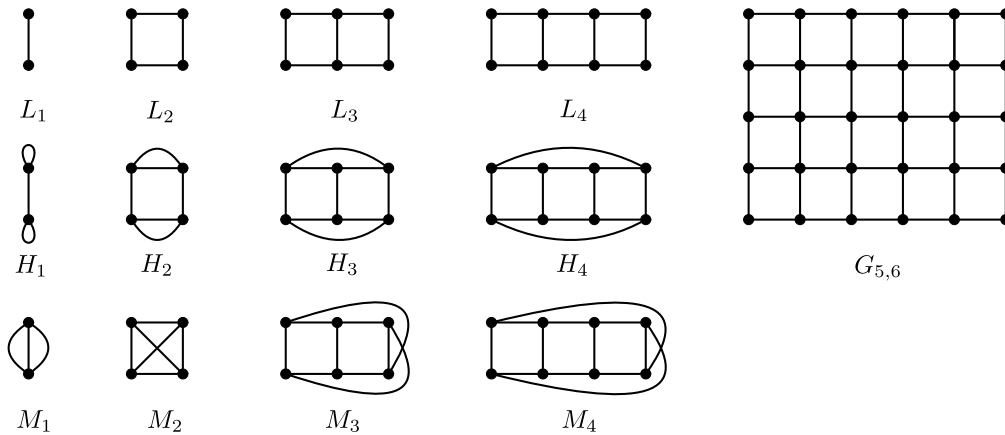
Теорема 1. Для каждого $n \geq 3$ выполняется

$$bc(L_n) = n - 1, \quad bc(H_n) = bc(M_n) = n.$$

Теорема 2. Пусть n — натуральное число, тогда

$$bc(G_{n,n}) = \begin{cases} \frac{n^2 - 1}{2}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{n^2}{2} - 1, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Лемма. Для всех n выполняется $bc(G_{n,n}) = bp(G_{n,n})$. Если n — нечетное натуральное число, то $bc(G_{n,n}) = \beta(G_{n,n})$, где $\beta(G_{n,n})$ — число вершинного покрытия графа $G_{n,n}$.



L_n — лестница, H_n — призма, M_n — лестница Мебиуса, где $1 \leq n \leq 4$, $G_{5,6}$ — решетка

Таким образом, получена формула для $bc(G_{m,n})$ в случае $m = n$, в то время как формула для случая $m < n$ (и даже сам факт ее существования) является открытым вопросом. Обобщая результат установленный в случае $m = n$ (теорема 2) на случай $m < n$ приходим к следующей гипотезе:

$$bc(G_{m,n}) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{mn}{2} \right\rfloor, & \text{если } m \text{ нечетно,} \\ \frac{mn}{2} - 1, & \text{если } m \text{ четно.} \end{cases} \quad (1)$$

Данное соотношение доказано нами для случая $m = 3$, используя метод упрощенной ограниченной раскраски (simply-restricted coloring) ребер графа введенный в работе [2].

Теорема 3. Если размерность одной стороны решетки $G_{m,n}$ ограничена фиксированным натуральным числом $k \geq 3$, то существует алгоритм с трудоемкостью $O(n^{k+1})$, который находит $bc(G_{m,n})$ для m, n таких, что $2 < m \leq k$ и $m \leq n$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф12РА-006).

Литература

1. Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. *Лекции по теории графов*. М.: Либроком, 2009.
2. Fishburn P. C., Hammer P. L. *Bipartite Dimensions and Bipartite Degrees of Graphs* // Discrete Math. 1996. P. 127–148.
3. Quadras J., Vasanthika S. *Biclique Cover of Complete Graph K_n and Honeycomb Network $HC(n)$* // International Conference “ICIEIS 2011”. Kuala Lumpur, Malaysia, November 14–16, 2011. P. 151–158.
4. Amilhastre J., Vilarem M. C., Janssen P. *Complexity of minimum biclique cover and minimum biclique decomposition for bipartite domino-free graphs* // Discrete Appl. Math. 1998. P. 125–144.

5. Fleischner H., Mujuni M., Paulusma D., Szeider S. *Covering graphs with few complete bipartite subgraphs* // Theor. Comput. Sci. 2009. V. 410, no. 21–23. P. 2045–2053.
6. Orlin J. *Contentment in Graph Theory: Covering Graphs with Cliques* // Indagationes Mathematicae. 1977. V. 80. P. 406–424.
7. Cornaz D., Fonlupt J. *Chromatic characterization of biclique covers* // Discrete Math. 2006. V. 306, no. 5. P. 495–507.
8. Hosoya H., Harary F. *On the matching properties of three fence graphs* // Journal of Mathematical Chemistry. 1993. P. 211–218.

О ЛИНЕЙНОМ РАЗМЕЩЕНИИ КОРОНЫ ДВУХ ГРАФОВ

В.В. Лепин, С.А. Тихон

Институт математики НАН Беларуси
Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
lepin@im.bas-net.by

Рассматриваются только неориентированные графы без кратных ребер, петель.

Пусть $G = (V, E)$ — n -вершинный граф. Линейным размещением графа G называется биекция $f : V \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$.

Длина графа G при линейном размещении f , обозначается через $s(G, f)$ и определяется следующим образом:

$$s(G, f) = \sum_{uv \in E} |f(u) - f(v)|.$$

Длина графа G обозначается через $s(G)$ и по определению равна минимальному значению $s(G, f)$ на всем множестве линейных размещений f графа G .

Оптимальным линейным размещением графа G называется размещение f' , на котором достигается равенство $s(G, f') = s(G)$.

Задача нахождения длины произвольного графа является NP -трудной.

Граф $G = (V, E)$ называется *графом Халина*, если он является планарным и его множество ребер можно разбить на такие два множества A , B , $A \cup B = E$, $A \cap B = \emptyset$, что множество A индуцирует дерево T_A , не имеющее вершин степени 2, а множество B индуцирует цикл C_B , проходящий через все листья дерева T_A . Дерево T_A называется *древесной основой* графа Халина.

Дерево называется *гусеницей*, если в результате удаления всех листьев получаем либо цепь, либо пустой граф. Более формально, пусть $n = r + \sum_{1 < i < r} s_i$, где $r \geq 2$ и каждое $s_i \geq 0$. *Гусеницей* с параметрами $(n; r; s_2, s_3, \dots, s_{r-1})$ называется дерево T с множеством вершин

$$V(T) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \cup \bigcup_{1 < i < r} \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,s_i}\}$$

и множеством ребер

$$E(T) = \{x_1x_2, x_2x_3, \dots, x_{r-1}x_r\} \cup \bigcup_{1 < i < r} \{x_iv_{i,1}, x_iv_{i,2}, \dots, x_iv_{i,s_i}\}.$$

В [1] показано, что если G — граф Халина, древесной основой которого является гусеница с параметрами $(n; r; s_2, s_3, \dots, s_{r-1})$, то

$$s(G) = 3(n - 1) + \sum_{1 < i < r} \left\lfloor \frac{(s_i + 1)^2}{4} \right\rfloor.$$

Пусть даны графы G и H на n и m вершинах соответственно. *Короной* G относительно H называется граф $G \wedge H$ с множеством вершин

$$V(G \wedge H) = V(G) \cup \{n \text{ различных копий } V(H), \text{ обозначаемых } V(H_1), \dots, V(H_n)\}$$

и множеством ребер

$$E(G \wedge H) = E(G) \cup \{n \text{ различных копий } E(H), \text{ обозначаемых } E(H_1), \dots, E(H_n)\} \cup \\ \cup \{(u_i, v) : u_i \in V(G), v \in V(H_i)\}.$$

В [2] приведены формулы для вычисления длины короны $G \wedge H$, когда оба графа: G и H — цепи; и когда G — полный граф, а H — полный граф на двух вершинах.

Теорема. *Существует алгоритм линейной трудоемкости для построения оптимального линейного размещения короны $G \wedge H$, такой, что G — граф Халина, древесной основой которого является гусеница, а H — либо пустой граф, либо цикл, либо полный граф.*

Литература

1. Easton T., Horton S., Parker R. *A solvable case of the optimal linear arrangement problem on Halin graphs* // Congressus Numerantium. 1996. Vol. 119. P. 3–17.
2. Williams K., *On the Minimum Sum of the Corona of Two Graphs* // Congressus Numerantium. 1993. Vol. 94. P. 43–49.

О ПОСТРОЕНИИ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДЛЯ РЕГУЛЯРНОЙ СБАЛАНСИРОВАННОЙ РОБОТИЗИРОВАННОЙ ЯЧЕЙКИ БЕЗ ЗАДЕРЖЕК

С.В. Павлов

Институт математики СО РАН
Коптюга 4, 630090 Новосибирск, Россия
kiberdweller@gmail.com

Введение. Рассматриваются циклические расписания для регулярной сбалансированной роботизированной ячейки в машинной среде flow shop со строгой стратегией разгрузки, обслуживаемой одним роботом. Анализируются возможные циклы, и на основе их анализа находится оптимальное решение для задачи с 5 машинами и длительностью операции p в интервале $[4\delta, 8\delta)$, где δ — расстояние между соседними машинами.

Постановка задачи и известные результаты. *Роботизированная ячейка* представляет собой $m + 2$ машины $\{M_0, \dots, M_{m+1}\}$ и одного робота. Роботизированная ячейка выполняет идентичные работы. Каждая работа представляет собой m операций $\{O_1, \dots, O_m\}$. Операции выполняются в порядке $O_1 \rightarrow O_2 \rightarrow \dots \rightarrow O_m$, при этом каждая операция $O_j, j \in \{1, \dots, m\}$, выполняется на машине M_j . Машины M_0 и M_{m+1} являются выделенными и представляют собой, соответственно, *вход* и *выход* роботизированной ячейки.

Определение 1. *Сбалансированной* называется роботизированная ячейка, в которой время выполнения каждой операции равно $p \geq 0$.

Определение 2. *Регулярной* называется роботизированная ячейка, в которой δ_i^j — время, за которое робот перемещается между машинами M_i и M_j — задается следующим образом: $\delta_i^j = |i - j|\delta$, где $\delta \geq 0$ — некоторая константа.

В процессе выполнения циклического расписания робот совершает цикл из действий A_i по переносу деталей с машины M_i на машину M_{i+1} . Степенью цикла называют число деталей, которые начали обрабатываться за один цикл.

Определение 3. *Производительностью* расписания называется отношение k/T , где k — степень цикла, а T — период.

Целевой функцией рассматриваемой задачи является производительность расписания, которую следует максимизировать. В [1] впервые высказывается гипотеза о том, что степень оптимального цикла не превосходит $m - 1$, где m — число машин, и приводится доказательство для $m = 2, 3$. Позднее в [2] была представлена гипотеза о структуре оптимальных расписаний, и там же доказана для $m \leq 4$, а также для произвольного числа машин m в случае $p \in [4(k - 1)\delta, 4k\delta)$, $k \leq (m + 2)/4$.

Полученный результат. Автором доказано

Утверждение. *Для регулярной сбалансированной роботизированной ячейки с одним роботом в среде flow shop и запретом на задержки между операциями одной работы, если $m = 5$, а $p \in [4\delta, 8\delta)$, оптимальным является цикл $A_0A_1A_0A_2A_1A_3A_2A_4A_3A_5A_4A_5$.*

Литература

1. Agnetis A. *Scheduling no-wait robotic cells with two and three machines* // European Journal of Operational Research. 2000. Vol. 123, no. 2. P. 303–314.
2. Mangione F., Brauner N., Penz B. *Cyclic production for the robotic balanced no-wait flow shop* // International Conference of Industrial Engineering and Production Management — IEPМ. Porto, Portugal, 2003.

**О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ НАСЛЕДСТВЕННЫХ УНИГРАФОВ
НА ОСНОВЕ КАНОНИЧЕСКОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ**

Р.А. Петрович

Белгосуниверситет, механико-математический факультет
Независимости 4, 220050 Минск, Беларусь
raman.petrovich@gmail.com

Пусть G — простой граф с множеством вершин VG и множеством ребер EG .
Граф G называется *расщепляемым*, если существует разбиение

$$VG = A \cup B \tag{1}$$

его множества вершин VG на клику A и независимое множество B . Это разбиение называется *биразбиением графа G* ; A — *верхняя доля*, B — *нижняя*. Упорядоченная тройка (G, A, B) , где G — расщепляемый граф с биразбиением (1), называется *расщепленным графом*.

Множества расщепленных и простых графов обозначаются Σ и Γ соответственно.

Композиция $\circ : \Sigma \times \Gamma \rightarrow \Gamma$ определяется следующим образом:
если $\sigma = (G, A, B) \in \Sigma$, $H \in \Gamma$, то $\sigma \circ H = (G \cup H) + \{av : a \in A, v \in VH\}$ (к дизъюнктному объединению графов G и H добавляются ребра полного двудольного графа $K_{A, VH}$ с долями A и VH) [1].

Элемент $\sigma \in \Sigma$ называется *разложимым*, если существуют такие $\alpha, \beta \in \Sigma$, что $\sigma = \alpha \circ \beta$, в противном случае элемент σ *неразложим*. Граф G называется *разложимым*, если его можно представить в виде произведения $G = \sigma \circ H$, иначе граф G *неразложим*. Множество неразложимых элементов в Σ обозначается Σ^* , множество всех неразложимых графов — Γ^* .

Любое представление графа G в виде

$$G = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_k \circ G_0, \tag{2}$$

где $\sigma_i \in \Sigma^*$, $1 \leq i \leq k$, $G_0 \in \Gamma^*$, называется *декомпозицией*.

Известно, что произвольный разложимый граф G может быть представлен в виде композиции (2) неразложимых компонент ($G_0 = \emptyset$, если граф G — расщепляемый).

Граф, определяемый с точностью до изоморфизма списком степеней своих вершин, называется *униграфом* [2]. Униграф называется *наследственным униграфом*, если каждый его порожденный (вершинно) подграф также является униграфом [3]. Известно, что не все униграфы наследственные.

Обозначим HU класс всех наследственных униграфов. В [3] приведена характеристика класса HU в терминах конечного списка запрещенных порожденных подграфов и поставлена задача его характеристики исходя только из степеней вершин графа. Очевидно, что из конечности списка запрещенных порожденных подграфов вытекает, что задача распознавания « $G \in HU$ » разрешима за полиномиальное время.

В представляемом сообщении рассказывается схема решения вышеупомянутой задачи за линейное время на базе вышеупомянутой теории канонической декомпозиции графов.

Схема характеристики выглядит следующим образом.

1. Поиск наследственных униграфов в каталоге неразложимых униграфов.
2. Доказательство утверждения: в списке запрещенных подграфов из [3] все элементы — неразложимые.
3. Доказательство утверждения: граф является наследственным униграфом тогда и только тогда, когда каждая его неразложимая компонента есть наследственный униграф.

Работа выполнена в БГУ в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь на 2011–2015 годы (ГПНИ «Конвергенция»).

Литература

1. Тышкевич Р. И. *Каноническое разложение графа* // Докл. АН БССР. 1980. Т. 24, № 8. С. 677–679.
2. Tyshkevich R. *Decomposition of graphical sequences and unigraphs* // Discrete Math. 2000. Vol. 220. P. 201–238.
3. Barrus M. D. *On 2-switches and isomorphism classes* // Preprint submitted to Elsevier.

ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО ВЫСТРОДЕЙСТВИЮ РАСПИСАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ FLOW-SHOR С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ПРИБОРАМИ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ДЛИТЕЛЬНОСТЯМИ ОПЕРАЦИЙ

И.С. Свирская¹, Я.М. Шафранский²

¹ ИООО «Эксадел», Минск, Беларусь
Molde University College, Molde, Norway
irena.svirskaya@gmail.com

² Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси
Сурганова 6, 220012 Минск, Беларусь
shafr-04@yandex.ru

Рассматривается следующая задача. Каждое из n требований должно пройти пять последовательных стадий обслуживания. На каждой из первых трех стадий обслуживание осуществляется одним прибором, на четвертой и пятой стадиях работает по несколько идентичных приборов. Все требования имеют один и тот же технологический маршрут. Обслуживание каждого требования должно осуществляться без задержек при переходе с одной стадии на другую, т. е. по завершении обслуживания на каждой и первых четырех стадий требование должно немедленно переходить на следующую стадию обслуживания. Для каждого из обслуживаемых приборов задан момент его готовности к работе. Необходимо построить оптимальное по быстродействию расписание обслуживания требований, т. е. расписание, при

котором момент, когда последнее из обслуживаемых требований покидает систему, минимален. При этом обслуживание протекает в условиях неопределенности, когда длительности обслуживания требований на стадиях не известны: для каждого требования и каждой стадии заданы лишь интервалы, которым принадлежат соответствующие длительности. Кроме того, на первых двух стадиях все требования имеют одни и те же интервалы длительностей обслуживания (относительно этих двух стадий все требования можно рассматривать как идентичные).

Задача представляет собой модель ситуации, возникающей при планировании работы цеха хлебо-булочных изделий.

В принятой в теории расписаний системе обозначений сформулированная задача может быть представлена как

$$F5(m_1, \dots, m_5) \mid \text{no-wait, machine availability, } p_{ij} \in [p_{ij}^{\min}, p_{ij}^{\max}] \mid C_{\max},$$

где $F5$ обозначает систему обслуживания типа flow-shop с пятью стадиями, m_i — число идентичных приборов на стадии i , no-wait — обслуживание без задержек, machine availability указывает на одновременную готовность приборов к работе, p_{ij} — длительность обслуживания требования j на стадии i , p_{ij}^{\min} и p_{ij}^{\max} — нижняя и верхняя границы возможных значений величины p_{ij} , а C_{\max} — момент завершения обслуживания последнего требования.

Задача в детерминированном случае ($p_{ij}^{\min} = p_{ij}^{\max}$ для всех требований и всех стадий) является NP -трудной в сильном смысле.

Сочетание условия «без задержек» с неопределенностью длительностей обслуживания дает несколько нестандартный эффект: в отличие от многих задач теории расписаний в условиях неопределенности, эти условия влияют не только на значение целевой функции, но и на допустимость расписаний для рассматриваемой задачи. Указанная особенность существенно затрудняет применение таких типичных для условий неопределенности подходов, как принцип гарантированного результата, например.

Предлагается техника построения расписаний, являющихся допустимыми при любых возможных длительностях обслуживания требований, а также схема декомпозиции задачи и серия приближенных алгоритмов решения получающихся в результате декомпозиции подзадач.

О НУЛЯХ В МАТРИЦАХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

А. В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
Большой Каретный 19, 1, ГСП-4 127994 Москва, Россия
slvstv@iitp.ru

Поиск точек минимума вещественного квадратичного многочлена на множестве вершин многомерного куба является алгоритмически трудной задачей [1, 2]. В этой работе получены ограничения на взаимное расположение нулей в матрицах квадратичных форм, достигающих минимума на большом множестве точек с координатами ± 1 .

Симметричной матрице A порядка n сопоставлен простой неориентированный граф $G(A)$ с n вершинами, в котором вершины с номерами j и k смежные, если отличен от нуля матричный элемент $A_{jk} \neq 0$. Элементы на главной диагонали не влияют на вид графа. Вершину графа назовем точкой сочленения, если ее удаление увеличивает число компонент связности графа. Множество вершин графа независимое, если любые две из этих вершин не смежны.

Квадратичные формы от $(n + 1)$ переменных, достигающие минимума на наибольшем по включению собственном множестве ± 1 -точек с таким свойством, соответствуют фасетам многогранника BQP_n из [3]. Размерность BQP_n равна $n(n + 1)/2$. При этом пары противоположных ± 1 -точек соответствуют одной вершине единичного куба в n -мерном проективном пространстве. Симметричная матрица коэффициентов квадратичной формы определена фасетой многогранника BQP_n с точностью до изменения главной диагонали и умножения на положительное число. Граф такой матрицы однозначно определен фасетой.

Фасеты многогранников BQP_n при $n \leq 6$ вычислены программой lrs версии 4.2c [4] (см. также <http://cgm.cs.mcgill.ca>). У отрезка BQP_1 две фасеты; у симплекса BQP_2 четыре фасеты; у многогранника BQP_3 16 фасет; у BQP_4 56 фасет; у BQP_5 368 фасет; у BQP_6 116764 фасеты. Граф матрицы, определяющей фасету многогранника BQP_n при $n \leq 5$, либо полный, либо является объединением клики и одной или нескольких изолированных вершин. Но BQP_6 имеет фасеты с нетривиальным расположением нулей в определяющих матрицах. Некоторые фасеты многогранника BQP_6 нельзя задать матрицами ранга меньше трех; это тесно связано со свойствами корневой решетки E_6 , рассмотренной, например, в [5].

Теорема. *Дана симметричная матрица A порядка $(n + 1)$, определяющая фасету многогранника BQP_n . Удаление из графа $G(A)$ любого независимого множества его вершин не увеличивает число компонент связности. В графе $G(A)$ нет точек сочленения.*

Литература

1. Береснев В. Л. *Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных*. Новосибирск: Издательство института математики, 2005.
2. Емеличев В. А., Коротков В. В. *Об устойчивости лексикографического решения векторной минимаксной квадратичной булевой задачи* // Тр. Ин-та математики НАН Беларуси. 2011. Т. 19, № 2. С. 26–36.
3. Padberg M. *The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives* // Mathematical programming. 1989. V. 45, no. 1–3. P. 139–172.
4. Avis D., Fukuda K. *A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra* // Discrete and computational geometry. 1992. V. 8, no. 1. P. 295–313.
5. Гришухин В. П. *Многогранники Вороного корневой решетки E_6 и ее двойственной* // Дискретная математика. 2010. Т. 22, № 2. С. 133–146.

ОЦЕНКА ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПЛОТНЫХ РАСПИСАНИЙ В ЗАДАЧЕ OPEN SHOP

А. А. Сухорослов

Институт математики СО РАН
пр-т академика Коптюга 4, 630090 Новосибирск, Россия
artem.sukhoroslov@gmail.com

В работе [1] рассматривалась задача теории расписаний Open Shop, которая может быть описана следующим образом. Дано m машин и n работ. Каждая работа J_i имеет m операций. На каждой машине M_j выполняется ровно одна операция работы J_i . O_{ij} — операция i -й работы на j -й машине, ее длина обозначается как p_{ij} , а момент начала — s_{ij} . Операции выполняются без прерываний. Никакие две операции одной работы не выполняются одновременно и каждая машина в любой момент времени выполняет не более одной операции.

Задача обозначается как $O||C_{\max}$ и заключается в построении расписания S минимальной длины $C_{\max}(S) = \max_{i,j}(s_{ij} + p_{ij})$.

Определение. *Плотное расписание* — расписание, в котором каждая машина M_j может простаивать в некоторый момент времени тогда и только тогда, когда для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ верно: либо операция $O_{i,j}$ завершилась раньше этого момента, либо некоторая операция $O_{i,k}$ ($k \neq j$) выполняется в этот момент на другой машине.

Относительной погрешностью расписания S называют величину $C_{\max}(S)/C_{\max}^*$, где C_{\max}^* — длина оптимального расписания. Пусть ℓ_{\max} — максимальная машинная нагрузка, d_{\max} — максимальная длина работы. Тогда очевидно, что $C_{\max}^* \geq \bar{c} = \max\{\ell_{\max}, d_{\max}\}$. Следовательно,

$$\frac{C_{\max}(S)}{C_{\max}^*} \leq \frac{C_{\max}(S)}{\bar{c}} = \rho.$$

Из работы [2] следует, что для любого плотного расписания верна оценка $\rho \leq 2$, а в работе [3] была выдвинута гипотеза, что эта оценка улучшается до оценки

$$\rho \leq 2 - \frac{1}{m}. \quad (1)$$

Эту гипотезу называют гипотезой Чена — Струсевича, и она была ранее доказана различными авторами для числа машин $m \leq 8$ (см. [4–7]). Кроме того, в [6] была предложена и доказана для $m \leq 7$ более точная оценка длины плотного расписания:

$$C_{\max}(S) \leq \ell_{\max} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) d_{\max}. \quad (2)$$

В данной работе доказываются обе оценки (1) и (2) в случае $m \leq 9$.

Литература

1. Gonzalez T., Sahni S. *Open Shop Scheduling to Minimize Finish Time* // Journal of the ACM. 1976. Vol. 23, no. 4. P. 665–679.
2. Аксенов В. А. *Полиномиальный алгоритм приближенного решения одной задачи теории расписаний* // Управляемые системы. 1988. Т. 28. С. 8–11.
3. Chen B., Strusevich V. *Approximation Algorithms for Three-Machine Open Shop Scheduling* // INFORMS Journal on Computing. 1993. Vol. 5, no. 3. P. 321–326.
4. Chen B., Yu W. *How good is a dense schedule?* Warwick Business School, University of Warwick, Coventry, U.K. 1998. Исследовательская работа.
5. Chen X., Yu W. *The performance Ratio Conjecture of Dense Schedule for Open Shop Problem*. 2000. Неопубликованный манускрипт.
6. Мезенцева Е. *Исследование свойств оптимальных и близких к ним расписаний для систем открытого типа*. Новосибирский государственный университет, 2004. Дипломная работа.
7. Chen R., Huang W., Men Z., Tang G. *Open-shop dense schedules: properties and worst-case performance ratio* // Journal of Scheduling. 2012. Vol. 15, no. 1. P. 3–11.

SOME COMPLEXITY RESULTS RELATED TO KRAUSZ DIMENSION AND ITS GENERALIZATIONS IN SPECIAL GRAPH CLASSES

O.V. Glebova¹, Yu.M. Metelsky², P.V. Skums²

¹ department of Computer Science, Georgia State University
34 Peachtree str., Atlanta, USA, 30329
glebovaov@gmail.com

² Department of Mechanics and Mathematics, Belarus State University
4 Nezavisimosti av., 220030 Minsk, Republic of Belarus
metelsky@bsu.by, skumsp@gmail.com

The *Krausz* (k, m) -partition of a graph G is the partition of G into cliques, which are called *clusters* of the partition, such that any vertex belongs to at most k clusters of the partition, and any two clusters have at most m vertices in common. The *m-Krausz* dimension $kdim_m(G)$ of the graph G is the minimum k such that G has a Krausz (k, m) -partition. The well-known

concept of Krausz dimension (see, for example, [1]) is exactly the 1-Krausz dimension in these terms.

Denote by $KDIM_m$ the problem of determining the m -Krausz dimension of graph, and by $KDIM_m(k)$ the problem of determining whether $kdim_m(G) \leq k$.

The class of graphs with m -Krausz dimension at most 2 is exactly the class of edge intersection graphs of multigraphs with edge multiplicity at most m . For any fixed $m \geq 1$, it is characterized by a finite list of forbidden induced subgraphs, and efficient algorithms for solving the problem $KDIM_m(2)$ are known. The situation changes radically if one takes $k = 3$ instead of $k = 2$: the problem $KDIM_1(k)$ is NP -complete for every fixed $k \geq 3$ ([1]). Here we prove

Theorem 1. *The problem $KDIM_m$ is NP -hard for every fixed $m \geq 1$.*

A graph G is called *polar* [2] if there exists a partition of its vertex set

$$V(G) = A \cup B, A \cap B = \emptyset \quad (1)$$

(*bipartition* (A, B)) such that all connected components of the graphs $\overline{G}(A)$ and $G(B)$ are complete graphs. If, in addition, α and β are fixed integers and the orders of connected components of the graphs $\overline{G}(A)$ and $G(B)$ are at most α and β respectively, then the polar graph G with bipartition (1) is called (α, β) -*polar*. Given a polar graph G with bipartition (1), if the order of connected components of the graph $\overline{G}(A)$ (the graph $G(B)$) is not restricted above, then the parameter α (respectively β) is supposed to be equal ∞ . Thus $(1, 1)$ -polar graphs are exactly well-known split graphs.

It is proved in [1] that for every fixed k the problem $KDIM_1(k)$ is polynomially solvable in the class of split graphs. We generalize this by proving

Theorem 2. *The problem $KDIM_m(k)$ is fixed parameter tractable in the class of $(\infty, 1)$ -polar graphs, when parameterized by $k, m \geq 1$.*

Also we give an answer to the problem posed in [1] by proving

Theorem 3. *The problem $KDIM_1$ is NP -hard both in the class of split graphs and in the class of complements of bipartite graphs.*

Acknowledgement. The work is partially supported by BRFFR (Project F11OB-064).

References

1. Hliněný P., Kratochvíl J. *Computational complexity of the Krausz dimension of graphs* // Proc. WG'97. Lecture Notes in Comput. Sci. 1997. Vol. 1335. P. 214–228.
2. Tyshkevich R., Chernyak A. *Unigraphs* // Izv. Akad. Nauk BSSR. Ser. Fiz.-Mat. Nauk. 1978. No. 5. P. 5–11.

COUNTING LABELLED ORIENTED GRAPHS UP TO PUSH-EQUIVALENCE

V.A. Liskovets

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus
Surganov str. 11, 220072 Minsk, Belarus
liskov@im.bas-net.by

Given a digraph and a vertex v in it, the operation called *pushing* this vertex is defined as follows: the orientations of all arcs incident to v are reversed. This natural and interesting operation (somewhat resembling the switching operation for undirected graphs) was introduced by K. Mosesyan in 1972 and studied intensively since then, mainly in algorithmic aspects. For example, it is known that the problems to decide whether vertices of an arbitrary digraph can be pushed so as to produce a strongly connected or an acyclic digraph are both NP -complete [1].

If one digraph can be transformed into another one by a series of pushing vertices then both digraphs are called *push-equivalent*. Of course, push-equivalent digraphs possess one and the same underlying undirected graph. In this research we consider only simple *oriented* graphs, that is ones in which any two vertices x and y are connected by at most one arc ($x \rightarrow y$, or $y \rightarrow x$, or none). We are interested in the enumeration of push-equivalency classes of oriented graphs. Let s_n denote the number of push-equivalency classes of oriented graphs with n labelled vertices.

Lemma. *For any tree T , all orientations of its edges are push-equivalent.*

This can be easily proved by induction (due to the availability of vertices of degree 1).

Proposition. *The orientations of the edges of an arbitrary undirected graph Γ with n vertices and m edges form $2^{\beta(\Gamma)}$ push-equivalency classes of size 2^{n-k} each, where k is the number of connected components of Γ and $\beta(\Gamma) = m - n + k$ is its cyclomatic number.*

Thus, the enumeration problem under consideration reduces to a weighted counting of labelled (simple) undirected graphs. Namely:

Corollary 1. $s_n = \sum_{\Gamma} 2^{\beta(\Gamma)}$, where Γ runs over the set of all n -vertex undirected graphs.

Theorem. Let $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n / n!$ be the exponential generating function for $\{s_n\}$, where $s_0 := 1$. Then

$$S(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n(n-1)/2} x^n / (n! 2^n) \right)^2. \tag{1}$$

Corollary 2.

$$s_n = 3^{n(n-1)/2} 2^{-n} \left[\sum_{t=0}^n \binom{n}{t} 3^{-t(n-t)} \right].$$

Here are initial numerical values: 1, 1, 2, 9, 108, 3969, 460728, 165081321, 179388972432.

Corollary 3.

1. s_n is even if and only if n is even and $\neq 0$; in this case, moreover, $2^{n/2}$ divides s_n .
2. 3^r divides s_n , where $r = (n-1)^2/4$ if n is odd and $r = ((n-1)^2 - 1)/4$ if n is even.

Corollary 4. *The following asymptotic estimate is valid:*

$$s_n \sim 3^{n(n-1)/2} / 2^{n-1} \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \tag{2}$$

Apart from a simple analytical proof, formula (2) has a direct combinatorial explanation based upon the well-known fact that asymptotically “almost all” graphs are connected combined with Proposition 1 for $k = 1$ and with the observation that the numerator in the r.h.s. is the number of labelled n -vertex oriented graphs.

Acknowledgement. The work is partially supported by BRFFR (grant F10MLD-24).

References

1. Klostermeyer W.F. *Pushing vertices and orienting edges* // Ars Combin. 1999. Vol. 51. P. 65–75.

СОДЕРЖАНИЕ

Теория вероятностей и математическая статистика

Барабанова С.А. О статистическом оценивании параметров аппроксимационных сумм ...	3
Бекиш Н.В., Китурко О.М. Методы имитационного моделирования НМ-сетей с приоритетными заявками	4
Вирченко Ю.П., Шпилинская О.Н. О вероятностном описании случайных замкнутых сепарабельных множеств в \mathbb{R}	5
Воротницкая Т.И. Статистические свойства оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса с нерегулярными наблюдениями	6
Дудин А.Н. Анализ двухфазных систем обслуживания со второй фазой, описываемой марковским процессом с конечным пространством состояний	7
Дудин С.А. Двухфазная система обслуживания с нетерпеливыми запросами и бесконечным промежуточным буфером	8
Дудина О.С. Многолинейная система обслуживания с марковским входным потоком и повторными вызовами	9
Евдокимович В.Е., Курносенко Н.М. О моделировании стационарного временного ряда с произвольным одномерным распределением	10
Егоров А.Д. Вычисление функционалов от решений стохастических уравнений	11
Жерело А.В. Метод вычисления функционалов специального вида от решений СДУ с разрывной составляющей	12
Жук Е.Е. Априорные вероятности классов и риск байесовского решающего правила	12
Заливская А.И., Сечко В.В. Актуарные расчеты в медицинском страховании	14
Зуев Н.М. Распределение времени наступления серии случайных событий в полиномиальной схеме	15
Клименок В.И. Система массового обслуживания с рекуррентным входящим потоком и повторными вызовами	16
Косарева Е.В., Матальцкий М.А., Розов К.В. О нахождении ожидаемого дохода НМ-сети с ограниченными временами пребывания заявок в очередях методом последовательных приближений	17
Красногир Е.Г. Аппроксимация интегрального среднеквадратичного отклонения при непараметрическом оценивании плотности вероятностей, учитывающая наличие зависимости между выборочными данными	18
Лаппо П.М. Оценивание некоторых финансовых деривативов на неполных рынках с использованием цепей Маркова	19
Малинковский Ю.В., Боярович Ю.С. Инвариантность стационарного распределения состояний сети с временно неактивными заявками	20
Марченко Л.Н., Боярович Ю.С. Замкнутая сеть массового обслуживания с временно неактивными заявками и обходами узлов	21
Матальцкий М.А., Статкевич С.Э. Об исследовании сетей обслуживания с ограниченным временем ожидания заявок и ненадежным обслуживанием в переходном режиме	22
Меленец Ю.В. Представление временных рядов с периодическими вероятностными характеристиками уравнениями авторегрессии	23
Морозов В.А. Последовательные методы обнаружения разладок временных рядов с использованием копул	24
Науменко В.В., Матальцкий М.А. Анализ сети с вероятностями обходов заявок, систем обслуживания, зависящими от времени	25
Новик А.И. Параметрический подход к оцениванию параметров копул	26
Русилко Т.В. О применении сетей массового обслуживания при моделировании процессов обработки заявок клиентов в страховой компании	27
Самаль Т.В. Применение факторных моделей временной структуры в анализе форвардных ставок	28

Семенчук Н.В., Дейцева А.Г. Асимптотические свойства койфлет-оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса	29
Синюгина Ю.В., Дудин А.Н. Система массового обслуживания со смешанной дисциплиной обслуживания и адаптивными отдыхами	30
Соболева Т.В., Труш Н.Н. О моделях сетевого трафика, основанных на α -устойчивых распределениях	31
Труш Н.Н. Исследование цен финансовых активов с помощью устойчивых распределений	32
Цеховая Т.В. Предельное распределение оценки семивариограммы стационарного случайного поля	33
Чернов С.Ю., Харин А.Ю. Оценивание вероятностей ошибок последовательного критерия отношения вероятностей при наличии искажений в L_1 - и C -метриках	34
Ширяева Л.К. О распределении студентизированных отклонений для нормальной выборки с выбросом	36
Якубович О.В., Дудовская Ю.Е. Многорежимные сети с отрицательными заявками и сигналами	37
Kharin A. Yu. Robustness in sequential statistical testing of hypotheses: theory and applications	38
Kuzmina A. V. Parametrizations equivalence of generalized hyperbolic distribution	39
Nguyen Tuan Minh Malliavin — Stein method for multidimensional U -statistics of Poisson point processes	40

Математические проблемы защиты информации и анализ данных

Абрамович М.С., Коновалов Д.А. Вейвлет-фильтрация траекторных параметров баллистических объектов	42
Агеева А.С., Харин Ю.С. Об асимптотических свойствах ОМП регрессионных коэффициентов при наличии классификации наблюдений	43
Агиевич С.В. О сведении задачи дискретного логарифмирования к задаче Диффи — Хэллмана	44
Алексейчук А.Н. Субэкспоненциальные алгоритмы решения систем линейных булевых уравнений с искаженными правыми частями	45
Бережной И.Б., Харин Ю.С. Об оценках параметров модели Джекобса — Льюиса	46
Блинков Ю.А., Фокин П.В. Некоторые свойства ZDD диаграмм	47
Богрецов В.А., Липницкий В.А. К оптимальной реализации метода Фаддеева — Берлекемша	48
Бодягин И.А. Об оценивании параметров цензурированного $AR(p)$ -временного ряда по методу моментов	49
Булойчик В.М., Малюгин В.И., Макарова Е.С. Анализ подходов к принятию решений в имитационных системах моделирования боевых действий	50
Вечерко Е.В. Об одной q -блочной параметрической модели вкраплений в двоичную цепь Маркова	51
Волошко В.А. Риск прогнозирования на основе идентификации модели Блумфилда по обучающим данным	52
Гайдук А.Н. Модификация метода криптоанализа, основанного на соотношении время — память для генераторов с самоуправлением	53
Галибус Т.В., Матвеев Г.В. Модулярное разделение секрета и равноостаточные идеалы.	54
Галинский В.А. Сравнение операций сложения по модулю $2n$ и по модулю 2	55
Гринь Н.В., Малюгин В.И. О точности линейного статистического прогноза температуры атмосферного воздуха	56
Ерофеев В.Т. Побочные информационные электромагнитные излучения из отверстия в экране	57
Журак М.К., Харин Ю.С. Об одном подходе к статистическому анализу пространственно-временных данных заболеваемости	58
Капустя А.М. Двухэтапная процедура обнаружения изображений со встроенной информацией	60

Кирлица В.П. Структура точных D - и A -оптимальных планов экспериментов для линии регрессии с неравноточными наблюдениями	61
Ковальчук Л.В., Кучинская Н.В., Скрыпник Л.В. Построение верхних оценок средних вероятностей целочисленных дифференциалов раундовых функций блочных шифров	61
Липницкий В.А. Тензорные произведения кодов Хэмминга	62
Лобач В.И. Робастное прогнозирование временных рядов на основе алгоритмов фильтрации Калмана	63
Мальцев М.В. Об одной «малопараметрической» марковской модели	64
Малюгин В.И. Методы дискриминантного анализа модели VARX	65
Михаленок Ю.М. Робастного оценивания многомерной модели ковариационной матрицы	66
Мицкевич М.Н. Обнаружение разладок параметров баллистических объектов при вейвлет-фильтрации	67
Муха В.С., Трофимович А.Ф. О точности линейного статистического прогноза температуры атмосферного воздуха	68
Орлова Е.Н. О вероятностных свойствах случайных полей с цензурированием	69
Палуха В.Ю., Харин Ю.С. Об информативных признаках распознавания случайных и псевдослучайных последовательностей	71
Kharin Yu.S. Markov dependence of high order: small-parametric models, properties, statistical analysis	72
Matetski K. On the limiting distributions of sums of stochastic gradient flows	73

Дискретная математика и математическая кибернетика

Абросимов М.Б., Моденова О.В. Об орграфах, имеющих m - 1 р с малым количеством дополнительных дуг	75
Баркетов М.С., Пеш Э., Шафранский Я.М. Минимизация максимального веса подмножества в паросочетании в двудольном графе	76
Бенедиктович В.И. Гетерохроматическое число гиперграфа, ассоциированного с геометрическим графом	77
Болоташвили Г.Г., Демиденко В.М., Писарук Н.Н. Графы, определяющие фасеты многогранника линейных порядков	78
Бондаренко С.П., Акинфина А.М. Задача оптимального распределения требований	79
Демиденко В.М., Болоташвили Г.Г., Писарук Н.Н. Осание $0,1$ -направляющих крайних лучей конуса полуметрик конечного метрического пространства	80
Волчкова Г.П., Котов В.М. Серия приближенных алгоритмов для задачи теории расписаний типа $PS//C_{\max}$	81
Врублевский А.С., Шлык В.А. Новые числовые характеристики множеств разбиений чисел	82
Городецкий Д.А., Супрун В.П. Полиномиальное разложение фундаментальных симметрических булевых функций	83
Емеличев В.А., Коротков В.В. Инвестиционная булева задача в условиях многокритериальности и неопределенности	84
Емеличев В.А., Кузьмин К.Г. Постоптимальный анализ многокритериальной задачи о максимальном разрезе графа	85
Зайцев В.С., Степанец В.Я. Опыт использования VHDL описания при реализации блока кодирования данных метки радиочастотной идентификации	86
Исаченко А.Н., Исаченко Я.А. Периметр матроида и задача коммивояжера на матроиде	87
Исаченко А.Н., Ревякин А.М. Эквивалентность свойств для бинарных матроидов	88
Иржавский П.А. О циклических свойствах топологических графов шестиугольной решетки	89
Картынный Ю.А., Орлович Ю.Л. Доминантно-треугольные графы: характеристика и сложностные аспекты	90

Куимова А.С. Модели и алгоритмы синтеза стратегий обслуживания бинарного потока объектов при наличии двух критериев оценки	91
Кутхашвили К.В. Многокритериальная задача оптимального распределения ресурсов для больших систем	92
Лепин В.В., Дугинов О.И. О бикликовом покрытии лестницы, лестницы Мебиуса, призмы и решетки	93
Лепин В.В., Тихон С.А. О линейном размещении короны двух графов	95
Павлов С.В. О построении оптимальных циклов для регулярной сбалансированной роботизированной ячейки без задержек	96
Петрович Р.А. Характеризация наследственных униграфов на основе канонической декомпозиции	97
Свирская И.С., Шафранский Я.С. Построение оптимального по быстродействию расписания для системы flow-shop с параллельными приборами и неопределенными длительностями операций	98
Селиверстов А.В. О нулях в матрицах квадратичных форм	99
Сухорослов А.А. Оценка относительной погрешности плотных расписаний в задаче Open Shop	100
Glebova O.V., Metelsky Yu.M., Skums P.V. Some complexity results related to krausz dimension and its generalizations in special graph classes	101
Liskovets V.A. Counting labelled oriented graphs up to push-equivalence	102

Научное издание

XI Белорусская математическая конференция

Тезисы докладов

Часть 4

Редакторы *С. Г. Красовский, В. В. Ленин*
Компьютерная верстка *С. Г. Красовский*

Подписано в печать 16.10.2012 г.
Формат $60 \times 84^{1/8}$. Усл. печ. л. 12,56. Уч.-изд. л. 11,30. Тираж 100 экз. Зак. 15.

Отпечатано на ризографе Института математики НАН Беларуси.
Издатель и полиграфическое исполнение:
Институт математики НАН Беларуси.
ЛИ 02330/0549443 от 8 апреля 2009 г.
200072, Минск, ул. Сурганова, 11.