МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФГБОУ ВПО «ЯРОСЛАВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. К. Д. УШИНСКОГО»
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. М.В.ЛОМОНОСОВА

ТРУДЫ
XIII МЕЖДУНАРОДНЫХ
КОЛМОГОРОВСКИХ ЧТЕНИЙ

Ярославль
2015

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я43478
Т782

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЯГПУ им. К.Д. Ушинского

Труды XIII международных Колмогоровских чтений : сборник статей. –
Т 782 Ярославль : РИО ЯГПУ, 2015. – 308 с.
ISBN 978-5-00089-032-5

Начиная с юбилея (100-летия со дня рождения академика А.Н. Колмогорова, 2003 г.), на родине выдающегося математика XX столетия в Ярославле проводятся традиционные Колмогоровские чтения.

Настоящий сборник статей XIII Международных Колмогоровских чтений (2015 г.) так или иначе отражает интересы А.Н. Колмогорова во многих областях математики, теории и методики обучения математике, истории математики и математического образования. Воспоминания учеников и коллег А.Н. Колмогорова содержат новые факты его биографии и аспекты научно-методических интересов ученого.

Сборник будет полезен преподавателям школ и вузов, студентам и всем, кто интересуется математикой, методикой ее преподавания и историей российского образования.

УДК 51; 51:372.8; 51(091)
ББК 22.1 я434

ISBN 978-5-00089-032-5

2. *Sotomayor, J.* Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds [Текст] / J. Sotomayor // Publ. Math. IHES. 1974. V. 43. P. 5-46.
3. *Ройтенберг, В. Ш.* О типичных полиномиальных векторных полях на плоскости [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Вестник Адыгейского государственного университета. Серия 4: Естественно-математические и технические науки. 2014, № 4 (147) . С. 13–21.
4. *Ройтенберг, В. Ш.* О грубости полиномиальных векторных полей в окрестности экватора сферы Пуанкаре [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2014. Т. 20, № 7.
5. *Ройтенберг, В. Ш.* О бифуркационных многообразиях в пространстве полиномиальных векторных полей на плоскости [Текст] / В.Ш. Ройтенберг // Труды ФОРА. Изд-во АГУ. 2014. Т. 19. С. 1–5.
6. *Овсянников, И. М.* О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса [Текст] / И.М. Овсянников, Л.П. Шильников // Математический сборник. 1986. Т. 130, № 4. С. 552-570.

Замечание о билатеральной симметрии

А. В. Селиверстов

Поиск особой точки на комплексной гиперповерхности служит примером вычислительно трудной задачи, связанной с комбинаторной оптимизацией [1]. Гладкость аффинного многообразия эквивалентна несовместности системы алгебраических уравнений и может быть проверена за экспоненциальное время [2]. Также решение системы n алгебраических уравнений от n неизвестных может быть получено в виде ряда гипергеометрического типа от коэффициентов [3]. Гладкость проективной гиперповерхности выражается неравенством нулю дискриминанта. Для квадратичных форм дискриминант пропорционален определителю матрицы формы. Однако уже для кубических форм степень дискриминанта очень быстро увеличивается с ростом размерности [4].

Задача о разбиении множества NP-полна [5]. Напомним её формулировку. Дано (мульти)множество положительных целых чисел. Вопрос: существует ли разбиение на два подмножества с равными суммами элементов? Это эквивалентно распознаванию принадлежности некоторой вершины куба гиперплоскости. Мы продемонстрируем сводимость задачи о разбиении множества к задаче о поиске особых точек на кубической гиперповерхности.

Будем называть (-1, 1)-точками вершины многомерного куба. Их однородные координаты равны 1 или -1. Следующая теорема усиливает в случае кубических гиперповерхностей результат из [1].

Теорема 1. *Дана линейная форма h с ненулевыми целыми коэффициентами от не менее четырёх переменных. Принадлежащие гиперплоскости h=0 (-1, 1)-точки взаимно однозначно соответствуют особым точкам на кубической гиперповерхности, заданной формой с целыми коэффициентами, вычислимыми за полиномиальное время*.

Доказательство. Рассмотрим кубическую гиперповерхность типа Ферма, заданную формой с теми же коэффициентами, что у линейной формы h. Поскольку все коэффициенты отличны от нуля, эта гиперповерхность гладкая. Выходом алгоритма служит форма, соответствующая гиперплоскому сечению. Все особые точки этого гиперплоского сечения — это (-1, 1)-точки, если такие имеются. В этих точках секущая гиперплоскость касается кубической гиперповерхности. Теорема доказана.

Поиск особой точки на квадрике сводится к приведению квадратичной формы к каноническому виду. Для плоских кубических кривых известно несколько нормальных форм. Обобщение нормальной формы Гессе рассмотрено в [6]. Далее рассмотрено многомерное обобщение нормальной формы Вейерштрасса. Доказательство аналогично таковому для кривых [7].

Теорема 2. *Гладкая кубическая гиперповерхность проективно эквивалентна гиперповерхности, заданной формой вида* y^2z+g*, где кубическая форма* g *не зависит от переменной* y.

Доказательство. Покажем, что существует такая точка P гиперповерхности, в которой ранг матрицы Гессе H не больше двух, то есть H определяет приводимую квадрику — пару гиперплоскостей. Ранг симметричной матрицы H не превосходит двух тогда и только тогда, когда она имеет не более двух ненулевых собственных значений. Это эквивалентно равенству нулю каждого из элементарных симметрических многочленов степеней выше двух от собственных значений. Эти симметрические многочлены равны некоторым многочленам от коэффициентов характеристического многочлена матрицы, каждый из которых — многочлен с целыми коэффициентами от элементов матрицы H. Таким образом, точка P — это нетривиальный общий нуль системы форм, число которых на единицу меньше числа переменных. Одна из них определяет гиперповерхность. Существование такой точки P следует из теоремы Гильберта.

Дальше доказательство следует таковому для кубических кривых [7]. Отметим, что на плоской кубической кривой роль точки P выполняет точка перегиба, а на двумерной кубической поверхности — точка пересечения трёх прямых, лежащих на этой поверхности. Теорема доказана.

Теорема 2 говорит об инвариантности кубической формы относительно инволюции в случае гладкой гиперповерхности. Легко построить примеры особых гиперповерхностей, чьи формы тоже инвариантны.

Теорема 3. *Если кубическая форма* f *инвариантна относительно инволюции, изменяющей знак одной координаты* $y \to -y$*, число особых точек на гиперповерхности* $f=0$ *нечётное, и точка* P*, у которой только одна однородная координата* y *отлична от нуля, гладкая, то гиперплоское сечение* $y=0$ *само имеет нечётное число особых точек.*

Доказательство. Множество особых точек, которые не остаются неподвижными при инволюции, разбивается на пары точек, переходящих одна в другую. Поскольку общее число особых точек нечётное, то нечётно и число неподвижных точек. Неподвижными являются точка P и точки гиперплоскости $y=0$. Поскольку P гладкая, сечение $y=0$ содержит нечётное число особых точек исходной гиперповерхности.

Более того, секущая гиперплоскость $y=0$ не касается кубической гиперповерхности ни в какой гладкой точке. Следовательно, все особые точки сечения являются особыми точками исходной гиперповерхности. Теорема доказана.

Так мы либо нашли особую точку P, либо можем ограничить поиск особой точки гиперплоским сечением. Если исходная гиперповерхность гладкая, то сечения, описанные в теореме 3 тоже гладкие. Поэтому в силу теоремы 2 для каждого сечения существует некоторая инволюция. Это позволяет понижать размерность, пока не получится плоская кривая. Гладкая кубическая кривая может быть задана уравнением вида $y^2z=x^3+pxz^2+qz^3$, где многочлен x^3+px+q не имеет кратных корней, то есть его дискриминант $-4p^3-27q^2$ отличен от нуля [7].

Итак, описан метод, позволяющий отличить гладкую кубическую гиперповерхность от таковой с нечётным числом особых точек, выполняя небольшое (ограниченное некоторым многочленом от длины записи исходной формы) число операций над комплексными числами, если известны необходимые линейные преобразования координат. При этом легко проверить, что преобразование невырожденное и приводит кубическую форму к нужному виду.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Библиографический список

1. *Латкин, И.В.* Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел [Текст] / И.В. Латкин, А.В. Селиверстов // Вестник Карагандинского университета. Серия Математика. — 2015. — № 1 (77). — С. 47-55.
2. *Чистов, А.Л.* Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время [Текст] / А.Л. Чистов // Записки научных семинаров ЛОМИ. — 1984. — Т. 137. — С. 124-188.
3. *Куликов, В.Р.* О решениях и формулах Варинга для систем *n* алгебраических уравнений от *n* неизвестных [Текст] / В.Р. Куликов, В.А. Степаненко // Алгебра и анализ. — 2014. — Т. 26. — № 5. — С. 200-214.
4. *Морозов, А.Ю.* Новые и старые результаты в теории результантов [Текст] / А.Ю. Морозов, Ш.Р. Шакиров // Теоретическая и математическая физика. — 2010. —Т. 163. — № 2. — С. 222-257.
5. *Схрейвер, А.* Теория линейного и целочисленного программирования [Текст] / А. Схрейвер; пер. с англ. С.А. Тарасов, М.А. Фрумкин, В.И. Шлык. — М.: Мир, 1991. — Т. 1 — 360 с.
6. *Селиверстов, А.В.* Кубические формы без мономов от двух переменных [Текст] / А.В. Селиверстов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25. — № 1. — С. 71-77.
7. *Прасолов, В.В.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения [Текст] / В.В. Прасолов, Ю.П. Соловьев. — М.: Факториал, 1997. — 288 с.

Нейросетевая модель формирования аксиоматической теории на основе дедукции и GMP-стратегии креативного поиска

В. Е. Фирстов

Введение. Цель работы – в рамках нейросетевой модели рассмотреть процесс формирования аксиоматической теории, для чего предлагаются две модели дедуктивного построения системы знаний. Первая из этих моделей реализует построение дедуктивной теории как освоение информационного пространства в виде нейросети, которая определенным образом метризуется и на этой сети рассматриваются задачи оптимизации при формировании системы знаний, например, в дидактических целях. Вторая модель является стохастической и интерпретирует построение системы знаний в виде ветвящегося марковского процесса в данном информационном пространстве, освоение которого описывается переходами между состояниями данного процесса. В рамках стохастической модели удается получить корректное обоснование критериев оптимизации для реализации эффективной стратегии проведения креативного поиска в исследуемой области знаний и в этом смысле можно вести речь о некоторой "интеллектуальной" технологии.

Имеющиеся исследования показывают, что восприятие, обучение, мышление как функции мозга обусловлены коллективными процессами, обеспечивающими эффективную работу нейронных ансамблей мозга [1]. Самоорганизация таких ансамблей (нейронных сетей) является ключом к пониманию функций мозга. Поэтому нейронные сети является подходящим инструментом для моделирования всевозможных нелинейных систем в физике, технике, биологии, социологии и все больше находят применение в прогрессивных моделях обучения [1-3] так, что возникло отдельное научное направление, известное как нейропедагогика [4].

Заметим, что формальную основу построения аксиоматической теории составляет принцип абстракции, представляющий универсальный способ построения теоретического знания, который применим в отношении любой научной дисциплины: математической, естественной или гуманитарной. Однако, сами способы абстрагирования непосредственно