Министерство науки
и высшего образова-
ния Российской
Федерации

Федеральное госу-
дарственное авто-
номное
образовательное
учреждение
высшего
образования
Московский
физико-
технический инсти-
тут
(государственный
университет)

МФТИ

19 - 25 ноября
2018

61-я НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ МФТИ

Москва,
Долгопрудный,
Жуковский
2018

Труды 61-й Всероссийской науч-
ной конференции МФТИ

Прикладная математика и инфор-
матика

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Московский физико-технический институт
(государственный университет)»

Труды

61-й Всероссийской научной конференции МФТИ

19–25 ноября 2018

Прикладная математика и информатика

Москва - Долгопрудный - Жуковский

МФТИ

2018

УДК 51+004
ББК 22.1+32.81
Т78

Труды 61-й Всероссийской научной конференции МФТИ. 19–25 ноября 2018 года. Прикладная математика и информатика. — М.: МФТИ, 2018. – 240 с.

Т78

ISBN 978-5-7417-0689-3

Включены результаты оригинальных исследований студентов, аспирантов, преподавателей и научных сотрудников МФТИ и дружественных учебных и научных организаций. Статьи представляют интерес для специалистов, работающих в области прикладной математики и информатики.

УДК 51+004
ББК 22.1+32.81

ISBN 978-5-7417-0689-3

УДК 512.77

Эллиптические точки на графиках многочленов третьей степени

А.В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН

Вещественная проективная гиперповерхность служит множеством нулей некоторой формы, то есть однородного многочлена от однородных координат, над полем вещественных чисел. Например, все плоские кривые, а также поверхности в трехмерном пространстве – это гиперповерхности. Гиперповерхность может иметь особые точки. В особой точке градиент соответствующей формы обращается в нуль.

Гладкая точка P гиперповерхности F называется *эллиптической*, если P является изолированной вещественной точкой пересечения гиперповерхности с касательной гиперплоскостью к F в этой точке P и вторая фундаментальная форма положительно определена; это свойство можно эффективно проверить. Для аффинных гиперповерхностей можно предположить, что метрика индуцируется некоторой евклидовой метрикой в объемлющем аффинном пространстве. На самом деле определение не зависит от выбора конкретной метрики. Более того, аффинную часть можно выбрать произвольно. Таким образом, существование эллиптической точки является свойством проективной гиперповерхности. В достаточно малой аналитической окрестности эллиптической точки гиперповерхность аппроксимируется эллиптическим параболоидом. В проколотой окрестности гиперповерхность находится в одном открытом полупространстве, ограниченном касательной гиперплоскостью.

Теорема 1. *Дана вещественная проективная кубическая гиперповерхность F. Если на F существует эллиптическая точка P, то на F не лежит никакая вещественная прямая, состоящая из особых точек на F.*

Доказательство от противного. Предположим, что существуют эллиптическая точка P и вещественная проективная прямая L, состоящая из особых точек гиперповерхности F. Обозначим через T проективную касательную гиперплоскость к F в точке P. Точка P служит изолированной вещественной точкой сечения F гиперплоскостью T, поскольку P эллиптическая. С другой стороны, это сечение содержит две особые точки: точку P и некоторую точку Q на прямой L. Следовательно, это сечение содержит вещественную прямую PQ. Но это противоречит изолированности вещественной точки P. Теорема доказана.

Рассмотрим гиперповерхности, которые являются проективными замыканиями графиков (неоднородных) многочленов третьей степени. Интерес к ним обусловлен следующей теоремой.

Теорема 2. *Если график многочлена третьей степени от нескольких переменных содержит эллиптическую точку, то проективное замыкание множества нулей этого многочлена не содержит вещественных особых точек на бесконечно удалённой гиперплоскости.*

Если график многочлена с рациональными коэффициентами содержит эллиптическую точку, то он содержит и рациональную эллиптическую точку. Легко проверить, является ли данная рациональная точка эллиптической, например, используя пакеты программ для символьных вычислений [1]. Таким образом, поиск эллиптической точки, когда она существует, позволяет решить алгоритмически трудную задачу проверки гладкости вещественной кубической гиперповерхности. В частности, задача о разбиении множества сводится к поиску вещественной особой точки, лежащей одной из двух данных гиперплоскостей, каждая из которых может быть выбрана в качестве бесконечно удалённой [2, 3]. При некоторых дополнительных предположениях этот метод приводит к успеху в большой доле случаев, хотя не всегда. Существование эллиптической точки на графике многочлена не противоречит существованию пары комплексно-сопряжённых особых точек на бесконечно удалённой гиперплоскости, определяемой этим многочленом, хотя эти особые точки не могут быть вещественными.

Теорема 3. *Для почти всех неоднородных кубических многочленов от двух переменных график многочлена содержит эллиптическую точку.*

С другой стороны, существуют гладкие плоские кривые, для которых графики соответствующих многочленов не содержат эллиптических точек. Например, такой график может быть обезьяньим седлом. Однако сколь угодно малое изменение коэффициентов многочлена может приводить к появлению эллиптической точки на его графике.

Эллиптической точки нет на линейчатых поверхностях [4]. Над полем комплексных чисел прямые заметают всю трёхмерную кубическую гиперповерхность. Если это свойство выполняется над полем действительных чисел, то гиперповерхность не имеет эллиптической точки. Однако существует большое множество вещественных гиперповерхностей, имеющих эллиптическую точку. Например, если проективная кубическая гиперповерхность имеет две вещественные компоненты связности, то одна из них ориентируемая и ограничивает выпуклую область. Поэтому ориентируемая компонента содержит эллиптическую точку. Более того, если бесконечно удалённая гиперплоскость не пересекает ориентируемую компоненту, то график соответствующего неоднородного многочлена тоже содержит эллиптическую точку.

В высоких размерностях существование эллиптической точки на графике неоднородного многочлена связано со свойствами разложения Варинга формы, получаемой при гомогенизации этого многочлена. Отметим, что для кубических форм от четырёх переменных над полем вещественных чисел существуют два типичных значения ранга: пять и шесть [5].

Теорема 4. *Для почти всех неоднородных кубических многочленов от n переменных, равных сумме $(n + 1)$ кубов линейных функций, график многочлена содержит эллиптическую точку.*

Типичный ранг тернарных кубических форм равен четырём [5]. Поэтому обобщением теоремы 3 служит следующая гипотеза: для почти всех неоднородных кубических многочленов от n переменных, равных сумме $(n + 2)$ кубов линейных функций, график многочлена содержит эллиптическую точку.

Теоремы 1–3 могут применяться в области компьютерной графики [4, 6]. С другой стороны, теорема 4 может быть использована для обоснования новых генерических алгоритмов, пример которых можно найти в работе [7].

Литература

1. *Малашонок Г.И.* Система компьютерной алгебры MathPartner // Программирование. 2017. № 2. С. 63–71.
2. *Латкин И.В.*, *Селиверстов А.В*. Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел // Вестник Карагандинского университета. Серия: Математика. 2015. № 1 (77). С. 47–55.
3. *Селиверстов А.В*. Распознавание вещественных кубических гиперповерхностей без прямой из особых точек // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша. Тезисы докладов. М.: МГУ, 2018. С. 177–179.
4. *Vršek J.* Contour curves and isophotes on rational ruled surfaces // Computer Aided Geometric Design. 2018. V. 65. P. 1–12. DOI:10.1016/j.cagd.2018.06.006
5. *Bernardi A., Blekherman G., Ottaviani G.* On real typical ranks // Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 2018. V. 11. N 3. P. 293–307. DOI:10.1007/s40574-017-0134-0
6. *Савчик А.В., Николаев П.П.* Метод проективного сопоставления для овалов с двумя отмеченными точками // Информационные технологии и вычислительные системы. 2018. № 1. С. 60–67.
7. *Рыбалов А.Н.* О генерической сложности проблемы разрешимости систем диофантовых уравнений в форме Сколема // Прикладная дискретная математика. 2017. № 37. С. 100–106. DOI:10.17223/20710410/37/8

УДК 519.163

Анализ возмущений весов графов в задаче построения системы хабов

А.Г. Ключиков[1]

[1]Московский физико-технический институт (государственный университет)

В работе рассматриваются так называемые «шевеления» весов графов — малые возмущения на ребрах, которые позволяют перейти к графам с уникальными кратчайшими путями. Система хабов HL — это система множеств $\{H_v\}_{v\in V} : H_v \subseteq V$, сопоставляемых каждой вершине, для которой выполняется свойство покрытия: для любой пары вершин (u,v) существует такая вершина w, что $w \in H_u \cap H_v$ и w лежит на некотором кратчайшем пути, соединяющем (u,v). Такие вершины w будем называть хабами для вершин u и v. Задача состоит в построении системы хабов, минимизируя l_p – норму [1], [2].