Математические заметки

Том 117 выпуск 2 февраль 2025

УДК 510.223+510.225

Независимость схемы свертки в арифметике второго порядка от счетного выбора без параметров

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Доказано, что полная схема свертки $\mathbf{CA}$ в арифметике второго порядка $\mathbf{PA}_2$ невыводима в подтеории $\mathbf{PA}_2^*$ с беспараметрической сверткой даже при добавлении к последней беспараметрической схемы выбора $\mathbf{AC}_\omega^*$ и свертки $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)$ для всех $\mathbf{\Sigma}_2^1$-формул с параметрами.

Библиография: 27 названий.

Ключевые слова: арифметика второго порядка, свертка, счетный выбор, параметры, форсинг.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm14255

1. Введение. Структура и дедуктивные свойства арифметики Пеано второго порядка $\mathbf{PA}_2$ долгое время остаются одной из центральных тем в логике и основаниях математики. Анализируя эти вопросы, Крайзель указал в [1; § III, с. 366], что выбор подсистем "является центральной проблемой". Симпсон в монографии [2] изложил современные подходы к подсистемам $\mathbf{PA}_2$, выделенным разными ограничениями на тип формул, участвующих в схемах аксиом, в основном в терминах кванторной сложности формул. Другое возможное ограничение было указано еще Крайзелем [1]:

> [...] если вы убеждены в значимости чего-либо, например, данной схемы аксиом, то естественным будет изучить детали, такие как эффект от параметров[1].

В этом контексте *параметрами* являются свободные переменные в схемах аксиом рассматриваемых теорий.

С целью изучения упомянутого "эффекта параметров", можно ставить вопрос о сравнительной силе той или иной схемы аксиом S по сравнению с ее беспараметрической подсхемой S^*. Настоящая статья посвящена роли параметров в схеме аксиом *свертки* $\mathbf{CA}$ в арифметике второго порядка $\mathbf{PA}_2$.

Следуя [1]–[3], арифметика второго порядка $\mathbf{PA}_2$ определяется как теория в языке $\mathcal{L}(\mathbf{PA}_2)$ с двумя сортами переменных – для натуральных чисел (тип 0) и для их

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-44-00099, https://rscf.ru/project/24-44-00099/.

[1] if one is convinced of the significance of something like a given axiom schema, it is natural to study details, such as the effect of parameters.

множеств (тип 1). Традиционно j, k, m, n используются для переменных по ω, x, y, z для переменных по $\mathscr{P}(\omega)$. Аксиоматика $\mathbf{PA}_2$ включает следующее:

(1) аксиомы Пеано для чисел (тип 0);

(2) схема индукции

$$\Phi(0) \wedge \forall\, k\ \big(\Phi(k) \Longrightarrow \Phi(k+1)\big) \Longrightarrow \forall\, k\ \Phi(k)$$

для любой $\mathcal{L}(\mathbf{PA}_2)$-формулы $\Phi(k)$, в которой разрешены параметры, т.е. иные свободные переменные помимо k (мы не можем брать индукцию в чаще используемой форме одного предложения, поскольку схема свертки не будет предполагаться в полной общности в контексте нижеследующей теоремы 1.1);

(3) экстенсиональность для множеств:

$$\forall\, x\, \forall\, y\ \big(\forall\, k\ (k \in x \Longleftrightarrow k \in y) \Longleftrightarrow x = y\big);$$

(4) схема свертки $\mathbf{CA}$: $\exists\, x\, \forall\, k\ \big(k \in x \Longleftrightarrow \Phi(k)\big)$ для любой формулы Φ, в которой переменной x нет, и параметры также разрешены.

Следующая схема нередко рассматривается в связи с $\mathbf{PA}_2$. Мы используем $\mathbf{AC}_\omega$ вместо более обычной аббревиатуры $\mathbf{AC}$ в контексте $\mathbf{PA}_2$, поскольку $\mathbf{AC}$ резервируется здесь для обозначения полной аксиомы выбора в теории множеств.

Схема (*счетного*) *выбора* $\mathbf{AC}_\omega$ – это

$$\forall\, k\, \exists\, x\ \Phi(k, x) \Longrightarrow \exists\, x\, \forall\, k\ \Phi(k, (x)_k))$$

для любой формулы Φ с разрешенными параметрами, где $(x)_k = \{j \colon 2^k(2j+1) - 1 \in x\}$.

Через $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}^1_2)$ обозначается схема $\mathbf{CA}$, ограниченная требованием, чтобы Φ была $\mathbf{\Sigma}^1_2$ формулой (параметры разрешены). Напомним, что $\mathbf{\Sigma}^1_2$-*формулами* называются $\mathcal{L}(\mathbf{PA}_2)$-формулы вида $\exists\, x\, \forall\, y\, \Psi$, где Ψ – *арифметическая* формула, т.е. не содержащая кванторов по переменным по $\mathscr{P}(\omega)$.

Через $\mathbf{CA}^*$ обозначается беспараметрическая часть $\mathbf{CA}$ (т.е. $\Phi(k)$ в формулировке не содержит свободных переменных кроме k). Аналогично понимается $\mathbf{AC}^*_\omega$.

Наконец, $\mathbf{PA}^*_2$ будет обозначать подтеорию $(1) + (2) + (3) + \mathbf{CA}^*$ теории $\mathbf{PA}_2$.

Теперь формулируется главный результат этой статьи.

Теорема 1.1. *Существует генерическое расширение* $\mathbf{L}[G]$ *класса* $\mathbf{L}$ *конструктивных множеств и множество* $X \in \mathbf{L}[G]$, *для которого* $\mathscr{P}(\omega) \cap \mathbf{L} \subseteq X \subseteq \mathscr{P}(\omega)$ *и* $\langle \omega; X \rangle$ *– модель теории* $\mathbf{PA}^*_2 + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}^1_2) + \mathbf{AC}^*_\omega$, *в которой не выполнен некоторый конкретный пример* $\mathbf{CA}$ *с параметрами.*

Таким образом, схема $\mathbf{CA}$ *недоказуема в* $\mathbf{PA}^*_2 + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}^1_2) + \mathbf{AC}^*_\omega$.

Замечание 1.2. В формулировке теоремы мы не делаем различия между параметрами типа 0 и типа 1. Однако представленная модель является ω-моделью в теоретико-множественном универсуме, где параметры типа 0 интерпретируются как обычные натуральные числа и потому тривиально элиминируются. Поэтому теорема 1.1 остается верной в предположении, что в схемах $\mathbf{PA}^*_2$ и $\mathbf{AC}^*_\omega$ запрещены только параметры типа 1 (но разрешены параметры типа 0).

2. Комментарии. Исследования роли параметров в схемах аксиом начались еще в ранние годы современной теории множеств. В частности, Гузицки [4] установил, используя модели $\mathbf{ZF}$ с генерической сверткой кардиналов по Леви–Соловею [5], [6], что счетная схема выбора $\mathbf{AC}_\omega$, в языке $\mathbf{PA}_2$, не следует из своей беспараметрической подсхемы $\mathbf{AC}_\omega^*$. Этот же результат о разделении $\mathbf{AC}_\omega$ и $\mathbf{AC}_\omega^*$, но при помощи моделей с сохранением кардиналов, содержится в нашей недавней работе [7].

Из этого результата, кстати, следует, что $\mathbf{AC}_\omega^*$ нельзя заменить на $\mathbf{AC}_\omega$ (с разрешенными параметрами) в теореме 1.1 по той причине, что $\mathbf{AC}_\omega$ влечет полную $\mathbf{CA}$ (с параметрами), так что такое усиление теоремы невозможно.

О некоторых результатах о беспараметрических подсхемах выделения и подстановки в теории множеств Цермело–Френкеля $\mathbf{ZF}$ см. в работах [8]–[10].

Отождествляя теории с их дедуктивными замыканиями, мы заключаем из теоремы 1.1 (даже в ослабленной форме без $\mathbf{AC}_\omega^*$), что

$$\bigl(\mathbf{PA}_2^* + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)\bigr) \subsetneqq \mathbf{PA}_2.$$

Работы по подсистемам теории $\mathbf{PA}_2$ дали немало случаев, когда строгое включение $S \subsetneqq S'$ выполнено для какой-то пары подсистем S, S', см. к примеру [2]. В ряде случаев такие результаты получаются посредством вывода в S' формальной непротиворечивости S. Однако для результата выше это оказывается не так, поскольку

$$\text{теории } \mathbf{PA}_2^*,\ \mathbf{PA}_2^* + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1) \text{ и полная } \mathbf{PA}_2 \text{ равнонепротиворечивы}$$

согласно одной из теорем в [11], которая также упомянута в статье [12]. Эта равнонепротиворечивость также следует из более сильного результата в [13; 1.5]. (Авторы благодарны Али Энаяту за ссылки на работы [11]–[13] в отношении этого результата о равнонепротиворечивости.)

Что касается самого результата теоремы 1.1, то он является усилением нашего предшествующего результата в этом направлении из статьи [14], где установлена невыводимость $\mathbf{CA}$ в $\mathbf{PA}_2^* + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)$ (т.е. без $\mathbf{AC}_\omega^*$). Этот более слабый результат с наброском доказательства также опубликован в нашей статье [7]. Усиление в теореме 1.1 состоит в том, что схема $\mathbf{AC}_\omega^*$ (т.е. некоторый ее конкретный пример) не выводится в $\mathbf{PA}_2^* + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)$ (и даже в полной $\mathbf{PA}_2$), как установлено в [4], [5].

И несколько слов о роли $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)$ в утверждении теоремы 1.1. Модель для $\mathbf{PA}_2^*$ (без $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)$), в которой не выполнена полная схема $\mathbf{CA}$, строится гораздо более простыми средствами, чем доказательство теоремы 1.1. Именно, берем генерическую по Коэну над $\mathbf{L}$ последовательность $\langle x_i\rangle_{i<\omega}$ множеств $x_i \subseteq \omega$ и образуем множество $X = (\mathscr{P}(\omega) \cap \mathbf{L}) \cup \{x_i \colon i < \omega\}$. Тогда $\langle \omega; X\rangle$ – модель $\mathbf{PA}_2^*$, где полная $\mathbf{CA}$ не выполнена поскольку X не содержит дополнений $\omega \smallsetminus x_i$ множеств x_i.

Таким образом, теория $\mathbf{PA}_2^*$ с беспараметрической сверткой недостаточно сильна, чтобы доказать $\mathbf{CA}$ даже в той элементарной форме, что каждое множество имеет дополнение. Теории с таким свойством вряд ли интересны, и именно поэтому некоторую часть $\mathbf{CA}$ с параметрами приходится добавить. Как показывает наша теорема, добавление $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)$ сохраняет в силе главный результат.

В целом, изучение подсистем арифметики второго порядка продолжает оставаться предметом интереса в современных работах, см. к примеру [15], и эта наша статья принадлежит данному направлению.

3. Обобщенный итерированный форсинг по Саксу. Доказательство теоремы 1.1 использует сложную итерацию форсинга Сакса, разработанную в [16] на основе более ранних работ [17], [18] и др. Также будет использована кодировка при помощи степеней конструктивности, в духе метода, изложенного в связи с теоремой T3106 в статье [19; с. 143].

Книга Кюнена [20] дается как главный источник по методу форсинга. Мы в особенности ссылаемся на раздел IV.6 в книге в отношении подхода названного там "forcing over the universe" (форсинг над универсумом всех множеств).

Конструктивный универсум $\mathbf{L}$ используется как исходная модель.

Далее в этом пункте все рассуждения проводятся в универсуме $\mathbf{L}$.

Напомним, что $2^{<\omega}$ = все кортежи чисел $0,1$. Мы определяем в $\mathbf{L}$ множество

$$\boldsymbol{I} = (\omega_1 \times 2^{<\omega}) \cup \omega_1, \qquad \boldsymbol{I} \in \mathbf{L}, \tag{1}$$

частично упорядоченное так, что $\langle\gamma, s\rangle \preccurlyeq \langle\beta, t\rangle$, когда $\gamma = \beta$ и $s \subseteq t$ в $2^{<\omega}$; при этом каждый ординал $\gamma < \omega_1$ (вторая часть $\boldsymbol{I}$) остается $\preccurlyeq$-несравнимым в $\boldsymbol{I}$ ни с каким иным элементом. Заметим, что если $\gamma < \omega_1$, то γ принадлежит $\boldsymbol{I}$ как элемент множества ω_1, и пара $\langle\gamma, \Lambda\rangle$ (где $\Lambda \in 2^{<\omega}$ – пустой кортеж) также принадлежит $\boldsymbol{I}$ как элемент множества $\omega_1 \times 2^{<\omega}$, причем мы не отождествляем γ и $\langle\gamma, \Lambda\rangle$, это разные (и $\preccurlyeq$-несравнимые) элементы $\boldsymbol{I}$, причем оба $\preccurlyeq$-минимальны в $\boldsymbol{I}$.

Буквы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ используются для обозначения элементов $\boldsymbol{I}$.

Если $\boldsymbol{i} = \gamma$ или $\boldsymbol{i} = \langle\gamma, s\rangle$ принадлежит $\boldsymbol{I}$, то обозначим $\gamma = |\boldsymbol{i}|$.

Положим $\boldsymbol{\Xi} = \{$все не более чем счетные начальные сегменты $\zeta \subseteq \boldsymbol{I}\}$.

Буквы $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ будут обозначать начальные сегменты из $\boldsymbol{\Xi}$.

Если $\boldsymbol{i} \in \zeta \in \boldsymbol{\Xi}$, то рассматриваются начальные сегменты $[\prec \boldsymbol{i}] = \{\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{I} : \boldsymbol{j} \prec \boldsymbol{i}\}$ и $\zeta[\not\succcurlyeq \boldsymbol{i}] = \{\boldsymbol{j} \in \zeta : \boldsymbol{j} \not\succcurlyeq \boldsymbol{i}\}$ и аналогично определенные $[\preccurlyeq \boldsymbol{i}]$, $\zeta[\not\succ \boldsymbol{i}]$.

Далее, рассматривается канторов дисконтинуум $\mathscr{D} = 2^\omega$. Если ξ счетно, то $\mathscr{D}^\xi$ есть произведение ξ копий пространства $\mathscr{D}$ с топологией произведения.

Пусть $\eta \subseteq \xi \in \boldsymbol{\Xi}$. Если $x \in \mathscr{D}^\xi$, то через $x \restriction \eta \in \mathscr{D}^\eta$ обозначим обычное ограничение. Если $X \subseteq \mathscr{D}^\xi$, то положим $X \restriction \eta = \{x \restriction \eta : x \in X\}$. Для краткости будем писать $x \restriction_{\prec \boldsymbol{i}}$ вместо $x \restriction [\prec \boldsymbol{i}]$, $X \restriction_{\not\succcurlyeq \boldsymbol{i}}$ – вместо $X \restriction \xi[\not\succcurlyeq \boldsymbol{i}]$, и т.п.

Если же $Y \subseteq \mathscr{D}^\eta$, то положим $Y \restriction^{-1} \xi = \{x \in \mathscr{D}^\xi : x \restriction \eta \in Y\}$.

Определение 3.1 [16]. Если $\zeta \in \boldsymbol{\Xi}$, то $\mathbf{Perf}_\zeta$ состоит из всех множеств $X \subseteq \mathscr{D}^\zeta$, для которых имеется гомеоморфизм $H\colon \mathscr{D}^\zeta \xrightarrow{\text{на}} X$, удовлетворяющий

$$x_0 \restriction \xi = x_1 \restriction \xi \quad \Longleftrightarrow \quad H(x_0) \restriction \xi = H(x_1) \restriction \xi$$

для всех $x_0, x_1 \in \operatorname{dom} H$ и $\xi \in \boldsymbol{\Xi}$, $\xi \subseteq \zeta$. Гомеоморфизмы H, удовлетворяющие этому условию, называются *сохраняющими проекцию*. Другими словами, множества из $\mathbf{Perf}_\zeta$ – это образы $\mathscr{D}^\zeta$ при сохраняющих проекцию гомеоморфизмах.

Замечание 3.2. Пустое множество $\varnothing$ формально принадлежит $\boldsymbol{\Xi}$, и тогда $\mathscr{D}^\varnothing = \{\varnothing\}$, и очевидно, что $\mathbb{I} = \{\varnothing\}$ – единственное множество в $\mathbf{Perf}_\varnothing$.

Для удобства читателя мы приведем с соответствующей ссылкой одну лемму о множествах из $\mathbf{Perf}_\zeta$, которая доказана в [16].

Лемма 3.3 (см. [16; лемма 8]). *Если $\zeta \in \boldsymbol{\Xi}$, $X \in \mathbf{Perf}_\zeta$, $X' \subseteq X$ открыто в X, и $x_0 \in X'$, то имеется множество $X'' \in \mathbf{Perf}_\zeta$, $X'' \subseteq X'$, открыто-замкнутое в X и содержащее x_0.*

4. Форсинг и базовое расширение. Здесь вводится форсинг для доказательства теоремы 1.1 и рассматривается соответствующее генерическое расширение.

Мы продолжаем рассуждать в $\mathbf{L}$. Напомним, что частично упорядоченное множество $\boldsymbol{I} \in \mathbf{L}$ определено через (1) в п. 3, а $\boldsymbol{\Xi} \in \mathbf{L}$ – множество всех не более чем счетных начальных сегментов $\xi \subseteq \boldsymbol{I}$ в $\mathbf{L}$. Если $\zeta \in \boldsymbol{\Xi}$, то пусть $\mathbb{P}_\zeta = (\mathbf{Perf}_\zeta)^{\mathbf{L}}$.

Множество $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{\boldsymbol{I}} = \bigcup_{\zeta\in\boldsymbol{\Xi}} \mathbb{P}_\zeta \in \mathbf{L}$ и есть наш *форсинг*. Его элементы $X \in \mathbb{P}$ будут называться “условиями”.

Для определения порядка мы положим $\|X\| = \zeta$ для всех $X \in \mathbb{P}_\zeta$. Теперь определяем $X \leqslant Y$ (т.е. X *сильнее*, чем Y), когда $\zeta = \|Y\| \subseteq \|X\|$ и $X \restriction \zeta \subseteq Y$.

Замечание 4.1. Множество $\mathbb{I} = \{\varnothing\}$, как и в замечании 3.2, принадлежит $\mathbb{P}$ и является $\leqslant$-наибольшим (т.е. самым слабым) “условием” в $\mathbb{P}$.

Замечание 4.2. Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$. Если $X \in \mathbb{P}_\zeta$ в $\mathbf{L}$ то X на самом деле не является замкнутым множеством в $\mathscr{D}^\zeta$ в $\mathbf{L}[G]$. Однако его можно преобразовать в замкнутое множество в $\mathbf{L}[G]$ операцией замыкания. При этом топологическое замыкание $X^\#$ такого X в $\mathscr{D}^\zeta$, определенное в $\mathbf{L}[G]$, принадлежит $\mathbf{Perf}_\zeta$ уже в смысле расширения $\mathbf{L}[G]$.

Согласно лемме 3.3 в ситуации замечания 4.2 существует (единственный) массив $\mathbf{a}[G] = \langle \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]\rangle_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{I}}$ точек $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G] \in 2^\omega$, для которого мы имеем $\mathbf{a}[G] \restriction \xi \in X^\#$ всякий раз, когда $X \in G$ и $\|X\| = \xi$. Тогда $\mathbf{L}[G] = \mathbf{L}[\langle \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]\rangle_{\boldsymbol{i}\in\boldsymbol{I}}] = \mathbf{L}[\mathbf{a}[G]]$ есть $\mathbb{P}$-*генерическое расширение* $\mathbf{L}$. Такие массивы $\mathbf{a} = \mathbf{a}[G]$ также будут называться $\mathbb{P}$-генерическими.

Теорема 4.3 (см. [16; теоремы 24, 31]). *Все кардиналы в* $\mathbf{L}$ *остаются кардиналами в* $\mathbf{L}[G]$. *Каждая точка* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$ *является генерической по Саксу над* $\mathbf{L}[\mathbf{a}[G] \restriction_{\prec\boldsymbol{i}}]$.

Следующие четыре результата получены в [16]. В каждой из лемм, множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$.

Лемма 4.4 (см. [16; лемма 22]). *Если конечные или счетные множества* $\eta, \xi \subseteq \boldsymbol{I}$ *в* $\mathbf{L}$ *удовлетворяют* $\forall\, \boldsymbol{j} \in \eta\ \exists\, \boldsymbol{i} \in \xi\ (\boldsymbol{j} \preccurlyeq \boldsymbol{i})$, *то* $\mathbf{a}[G] \restriction \eta \in \mathbf{L}[\mathbf{a}[G] \restriction \xi]$.

Лемма 4.5 (см. [16; лемма 26]). *Если* $\boldsymbol{K} \in \mathbf{L}$ *– начальный сегмент в* $\boldsymbol{I}$, *и* $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I} \smallsetminus \boldsymbol{K}$, *то* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G] \notin \mathbf{L}[\mathbf{a}[G] \restriction \boldsymbol{K}]$.

Лемма 4.6 (см. [16; следствие 27]). *Если* $\boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$ *в* $\boldsymbol{I}$, *то* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G] \neq \mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G]$, *и даже* $\mathbf{L}[\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]] \neq \mathbf{L}[\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G]]$.

Лемма 4.7 (см. [16; лемма 29]). *Если* $\boldsymbol{K} \in \mathbf{L}$ *– начальный сегмент в* $\boldsymbol{I}$ *и* $r \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[G]$, *то либо* $r \in \mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \boldsymbol{K}]$ *либо имеется* $\boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{K}$, *для которого* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G] \in \mathbf{L}[r]$.

Мы применим эти леммы в доказательстве следующей теоремы. Через $\leqslant_{\mathbf{L}}$ обозначим порядок относительной конструктивности на 2^ω, так что $x \leqslant_{\mathbf{L}} y$ равносильно $x \in \mathbf{L}[y]$. Через $x <_{\mathbf{L}} y$ обозначим строгое отношение: $x \leqslant_{\mathbf{L}} y$ но $y \not\leqslant_{\mathbf{L}} x$, а эквивалентность $x \equiv_{\mathbf{L}} y$ означает, что $x \leqslant_{\mathbf{L}} y$ и $y \leqslant_{\mathbf{L}} x$.

Теорема 4.8. *Пусть* $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$ *и* $r \in \mathbf{L}[G] \cap 2^\omega$. *Тогда*

(i) *если* $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{I}$ *и* $\boldsymbol{j} \preccurlyeq \boldsymbol{i}$, *то* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G] \leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$;

(ii) *если* $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{I}$ *и* $\boldsymbol{j} \not\preccurlyeq \boldsymbol{i}$, *то* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G] \not\leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$;

(ii) *если* $r \leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$, *то* $r \in \mathbf{L}$ *или* $r \equiv_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G]$ *для какого-то* $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{j} \preccurlyeq \boldsymbol{i}$;

(iv) *если* $\boldsymbol{i} = \langle\gamma, s\rangle \in \boldsymbol{I}$, $e = 0, 1$, *и* $\boldsymbol{i}^\frown e = \langle\gamma, s^\frown e\rangle$, *то* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown e}[G]$ *является правильным наследником* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$ *в том смысле, что* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G] <_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown e}[G]$ *и любая точка* $y \in 2^\omega$ *удовлетворяет* $y <_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown e}[G] \Longrightarrow y \leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$;

(v) *если* $\boldsymbol{i} = \langle\gamma, s\rangle \in \boldsymbol{I}$ *и* $x \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[G]$ *– правильный наследник* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$ *в смысле* (iv), *то существует* $e = 0, 1$, *для которого* $x \equiv_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown e}[G]$.

Доказательство. (i) Используем лемму 4.4 при $\eta = \{\boldsymbol{j}\}$ и $\xi = \{\boldsymbol{i}\}$.

(ii) Используем лемму 4.5 для $\boldsymbol{K} = [\preccurlyeq \boldsymbol{i}]$.

(iii) Если существует $\boldsymbol{j} \in \mathcal{I}$, $\boldsymbol{j} \preccurlyeq \boldsymbol{i}$, для которого $\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G] \in \mathbf{L}[r]$, то пусть $\boldsymbol{j}$ обозначает наибольшее из них, и пусть $\xi = [\preccurlyeq \boldsymbol{j}]$ (конечный начальный сегмент в $\boldsymbol{I}$). Согласно лемме 4.7 либо $r \in \mathbf{L}[\mathbf{a}[G] \restriction \xi]$, либо имеется $\boldsymbol{i}' \notin \xi$ с $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}'}[G] \in \mathbf{L}[r]$.

В первом случае $r \in \mathbf{L}[\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G]]$ по (i), так что $\mathbf{L}[r] = \mathbf{L}[\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G]]$ по выбору $\boldsymbol{j}$. Во втором же случае мы имеем $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}'}[G] \in \mathbf{L}[a_{\boldsymbol{i}}[G]]$, так что $\boldsymbol{i}' \preccurlyeq \boldsymbol{i}$ по (ii). Но это противоречит выбору $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{i}'$.

Наконец, если нет $\boldsymbol{j} \in \mathcal{I}$, $\boldsymbol{j} \preccurlyeq \boldsymbol{i}$, для которого $\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G] \in \mathbf{L}[r]$, то аналогичное рассуждение с $\xi = \varnothing$ дает $r \in \mathbf{L}$.

(iv) Соотношение $\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G] <_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown e}[G]$ вытекает из лемм 4.4 и 4.5. Если теперь $y <_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown e}[G]$, то $y \in \mathbf{L}$ или же $y \equiv_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G]$ для какого-то $\boldsymbol{j} \preccurlyeq \boldsymbol{i}^\frown e$ согласно (iii), причем во втором случае $\boldsymbol{j} \prec \boldsymbol{i}^\frown e$, откуда $\boldsymbol{j} \preccurlyeq \boldsymbol{i}$, и, наконец, $y \leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$.

(v) Согласно (iv) достаточно доказать, что $x \leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown 0}[G]$ или $x \leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown 1}[G]$. Допустим, что $x \not\leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown 0}[G]$. Тогда по лемме 4.7 имеется такое $\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{I}$ что $\boldsymbol{j} \not\preccurlyeq \boldsymbol{i}^\frown 0$ и $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}_0}[G] \leqslant_{\mathbf{L}} x$. Если $\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G] <_{\mathbf{L}} x$ строго, то $\mathbf{a}_{\boldsymbol{j}}[G] \leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}}[G]$ по свойству правильного наследника, а значит, $\boldsymbol{i}_0 \preccurlyeq \boldsymbol{i}$, что противоречит $\boldsymbol{i}_0 \not\preccurlyeq \boldsymbol{i}^\frown 0$, как и выше. Поэтому на самом деле $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}_0}[G] \equiv_{\mathbf{L}} x$. Тогда мы имеем $\boldsymbol{i}_0 = \boldsymbol{i}^\frown 0$ или $\boldsymbol{i}_0 = \boldsymbol{i}^\frown 1$, так как x – правильный наследник. Но тогда $\boldsymbol{i}_0 = \boldsymbol{i}^\frown 1$, поскольку предполагается $x \not\leqslant_{\mathbf{L}} \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}^\frown 0}[G]$, что и требовалось.

5. Модель. Пусть множество G является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}[G] = \langle \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}} \rangle_{\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}} \in \mathscr{D}^{\boldsymbol{I}}$. Рассмотрим множество $\boldsymbol{J}[G] = \boldsymbol{J}[\mathbf{a}] \in \mathbf{L}[G] = \mathbf{L}[\mathbf{a}]$ всех $\boldsymbol{i} \in \boldsymbol{I}$, для которых выполнено одно из следующих утверждений:

либо $\boldsymbol{i} = \langle\gamma, 0^m\rangle$, где $\gamma < \omega_1$, $m < \omega$, $0^m = \langle 0, 0, \dots, 0\rangle$ (m членов равных 0);

либо $\boldsymbol{i} = \langle\gamma, 0^{m\frown} 1\rangle$, где $\gamma < \omega_1$ и $m < \omega$, $\mathbf{a}_\gamma[G](m) = 1$.

Таким образом, если $\gamma < \omega_1$, то значение $\mathbf{a}_\gamma[G](m) = 1$ или 0 для любого данного числа $m < \omega$ кодируется посредством наличия (для значения 1) или соответственно отсутствия (для 0) *развилки* из кортежей $\langle\gamma, 0^{m\frown} 0\rangle = \langle\gamma, 0^{m+1}\rangle$ и $\langle\gamma, 0^{m\frown} 1\rangle$ над кортежем $\langle\gamma, 0^m\rangle$ в $\boldsymbol{J}[G]$. При этом сами ординалы $\gamma < \omega_1$ (вторая часть определения $\boldsymbol{I}$ согласно (1) в п. 3) множеству $\boldsymbol{J}[G] = \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$ не принадлежат.

На этом и будет построен контрпример к $\mathbf{CA}$ в определенной через $\boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$ модели $W[\mathbf{a}]$ из (2). Именно, для любого $\gamma < \omega_1$ множество $\{m < \omega \colon \mathbf{a}_\gamma[G](m) = 1\}$ не будет принадлежать $W[\mathbf{a}]$, поскольку $\gamma \notin \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$, но будет определимо в $W[\mathbf{a}]$ подходящей формулой языка $\mathbf{PA}_2$ с параметром $\mathbf{a}_{\langle\gamma,\Lambda\rangle}[G]$ через указанное свойство развилок.

Итак, мы определяем $\mathcal{L}(E) = \bigcup_{x \in E} \mathbf{L}[x]$ для любого множества E. Понятно, что $\mathcal{L}(E) \subseteq \mathbf{L}[E]$, но в принципе $\mathcal{L}(E)$ может и не быть моделью $\mathbf{ZF}$. Наконец, полагаем

$$E[\mathbf{a}] = \{\mathbf{a} \restriction \xi \colon \xi \in \boldsymbol{\Xi} \wedge \xi \subseteq \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]\} \quad \text{и} \quad W[\mathbf{a}] = \mathscr{P}(\omega) \cap \mathcal{L}(E[\mathbf{a}]). \tag{2}$$

Лемма 5.1. *Если* $\boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$, *то* $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}} \notin W[\mathbf{a}]$.

Доказательство. Мы не можем сразу сослаться на лемму 4.5, так как $\boldsymbol{J}[\mathbf{a}] \notin \mathbf{L}$. Однако множество $\boldsymbol{K} = \{\boldsymbol{j} \in \boldsymbol{I} \colon \boldsymbol{i} \not\preccurlyeq \boldsymbol{j}\}$ принадлежит $\mathbf{L}$ и удовлетворяет $\boldsymbol{J}[\mathbf{a}] \subseteq \boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{I}$. Мы имеем $\boldsymbol{i} \notin \boldsymbol{K}$, следовательно, $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}} \notin \mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \boldsymbol{K}]$ по лемме 4.5. С другой стороны, выполнено $W[\mathbf{a}] \subseteq \mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \boldsymbol{K}]$, откуда и следует результат.

Имея в виду теорему 1.1, мы докажем, что $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle$ выполняет $\mathbf{PA}_2^* + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1) + \mathbf{AC}_\omega^*$, но полная свертка $\mathbf{CA}$ неверна в $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle$. Это утверждение разбито на две теоремы.

Теорема 5.2. *Если множество G является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}[G]$, то* $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle \models \mathbf{PA}_2^* + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1) + \neg\mathbf{CA}$.

Доказательство. То, что $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle$ выполняет все аксиомы $\mathbf{PA}_2$, кроме $\mathbf{CA}$, тривиально. Истинность свертки $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)$ (с параметрами) в $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle$ следует из теоремы абсолютности Шенфилда.

Докажем, что полная $\mathbf{CA}$ без ограничения на формулы ложна в $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle$. Пусть $\gamma < \omega_1^{\mathbf{L}}$, так что γ и каждая пара $\langle \gamma, s \rangle$, $s \in 2^{<\omega}$, принадлежат $\boldsymbol{I}$ по определению (1) в п. 3. В частности, $\boldsymbol{i}_0 = \langle \gamma, \Lambda \rangle \in \boldsymbol{I}$, где Λ – пустой кортеж. К тому же γ (как элемент $\boldsymbol{I}$) не принадлежит $\boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$. Мы собираемся доказать, что точка $\mathbf{a}_\gamma$ не принадлежит $W[\mathbf{a}]$, но определима в $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle$.

Шаг 1. Имеем $\mathbf{a}_\gamma \notin W[\mathbf{a}]$ по лемме 5.1, так как $\gamma \notin \boldsymbol{J}[G]$.

Шаг 2. Мы утверждаем, что точка $\mathbf{a}_\gamma$ определима в $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle$ с параметром $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}_0}$, где $\boldsymbol{i}_0 = \langle \gamma, \Lambda \rangle \in \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$. Более точно, утверждается, что при любом $m < \omega$:

$$\mathbf{a}_\gamma(m) = 1 \iff \begin{array}{l} \text{существует набор точек } b_0, b_1, \ldots, b_m, b_{m+1} \text{ и } b'_{m+1} \\ \text{в } 2^\omega\text{, для которого выполнено следующее: } b_0 = \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}_0}, \\ \text{каждая } b_{k+1} \text{ есть правильный наследник } b_k \\ (k \leqslant m),\ b'_{m+1} \text{ есть правильный наследник } b_m, \text{ и} \\ b'_{m+1} \not\equiv_{\mathbf{L}} b_{m+1}. \end{array} \qquad (3)$$

Формула в правой части эквивалентности (3) основана на геделевой канонической Σ_2^1-формуле для $\leqslant_{\mathbf{L}}$, которая абсолютна для $W[\mathbf{a}]$ по определению $W[\mathbf{a}]$. Следовательно, (3) означает, что $\mathbf{a}_\gamma[G]$ в самом деле определима в $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle$ с параметром $\mathbf{a}_{\boldsymbol{i}_0}[G]$. Итак, остается доказать (3).

Импликация $\Longrightarrow$. Пусть $\mathbf{a}_\gamma(m) = 1$. Тогда $\boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$ содержит элементы $\boldsymbol{i}_k = \langle \gamma, 0^k \rangle$, $k \leqslant m+1$, а также содержит $\boldsymbol{i}'_{m+1} = \langle \gamma, 0^m{}^\frown 1 \rangle$. Поэтому точки $b_k = \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}_k}$, $k \leqslant m+1$, и $b'_{m+1} = \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}'_{m+1}}[G]$ принадлежат $W[\mathbf{a}]$. Теперь теорема 4.8, (iv), (ii) влечет то, что точки b_k и b'_{m+1} удовлетворяют правой части (3), что и требовалось.

Импликация $\Longleftarrow$. Допустим, что точки b_k, $k \leqslant m+1$, и b'_{m+1} удовлетворяют правой части (3). По теореме 4.8, (v) имеется массив чисел $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, e'_{m+1} = 0, 1$, удовлетворяющих $b_k = \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}_k}$ для всех $k \leqslant m+1$, а также $b'_{m+1} = \mathbf{a}_{\boldsymbol{i}'_{m+1}}$, где $\boldsymbol{i}_k = \langle \gamma, \langle e_1, \ldots, e_k \rangle \rangle$ и $\boldsymbol{i}'_{m+1} = \langle \gamma, \langle e_1, \ldots, e_m, e'_{m+1} \rangle \rangle$.

Однако по лемме 5.1 $\boldsymbol{i}_k \in \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$ для всех $k \leqslant m+1$, и $\boldsymbol{i}'_{m+1} \in \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$, поскольку точки b_k и b'_{m+1} принадлежат $W[\mathbf{a}]$. Тогда очевидно $e_1 = \cdots = e_m = 0$, а также $e_{m+1} = 0$ и $e'_{m+1} = 1$, либо наоборот, $e_{m+1} = 1$ и $e'_{m+1} = 0$. Другими словами, пары $\langle \gamma, 0^{m+1} \rangle$ и $\langle \gamma, 0^m{}^\frown 1 \rangle$ принадлежат $\boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$. Отсюда и следует $\mathbf{a}_\gamma[G](m) = 1$, завершая доказательство теоремы 5.2.

Теорема 5.3. *Если множество G является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{a}[G]$, то* $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle \models \mathbf{AC}_\omega^*$ (*беспараметрическая*).

Доказательство этой теоремы основано на технике пермутаций для форсинга $\mathbb{P}$, излагаемой в следующем пункте. Само доказательство последует в п. 7.

6. Пермутации. Рассуждая в $\mathbf{L}$, рассмотрим группу $\mathbf{\Pi} \in \mathbf{L}$ всех таких биекций $\pi\colon \omega_1 \xrightarrow{\text{на}} \omega_1$, что область нетривиальности $|\pi| = \{\alpha\colon \pi(\alpha) \neq \alpha\}$ ограничена в ω_1, с суперпозицией $\circ$ в роли групповой операции; такие π называем *пермутациями.*

Определение 6.1. Любая пермутация $\pi \in \mathbf{\Pi}$ действует:

(a) на элементы $\boldsymbol{i} = \gamma$ и $\boldsymbol{j} = \langle \gamma, s\rangle$ в $\boldsymbol{I}$, через $\pi^\frown \boldsymbol{i} = \pi(\gamma)$, соответственно, $\pi^\frown \boldsymbol{j} = \langle \pi(\gamma), s\rangle$;

(b) на множества $\xi \subseteq \boldsymbol{I}$ через $\pi^\frown \xi = \{\pi^\frown \boldsymbol{i}\colon \boldsymbol{i} \in \xi\}$;

(c) на функции g с $\operatorname{dom} g \subseteq \boldsymbol{I}$, через $\operatorname{dom}(\pi^\frown g) = \pi^\frown \operatorname{dom} g$ и $(\pi^\frown g)(\pi^\frown \boldsymbol{i})) = g(\boldsymbol{i})$ для всех $\boldsymbol{i} \in \operatorname{dom} g$, или формально через *суперпозицию* $\circ$, $\pi^\frown g = g \circ \pi^{-1}$;

(d) тем самым, если $\xi \subseteq \boldsymbol{I}$ и $x \in \mathscr{D}^\xi$ то $\pi^\frown x \in \mathscr{D}^{\pi^\frown \xi}$ и $(\pi^\frown x)(\pi^\frown \boldsymbol{i}) = x(\boldsymbol{i})$, $\forall\, \boldsymbol{i} \in \xi$;

(e) на "условия" $X \in \mathbf{Perf}_\xi$, $\xi \in \mathbf{\Xi}$, через $\pi^\frown X = \{\pi^\frown x\colon x \in X\} \in \mathbf{Perf}_{\pi''\xi}$.

Лемма 6.2. *Если* $\xi \in \mathbf{\Xi}$, $\mathbf{a} \in \mathscr{D}^{\boldsymbol{I}}$ *и* $\pi, \sigma \in \mathbf{\Pi}$, *то* $\pi^\frown \mathbf{a} = \mathbf{a} \circ \pi^{-1}$, *а также* $\pi^\frown(\sigma^\frown \mathbf{a}) = (\pi \circ \sigma)^\frown \mathbf{a}$, *и* $\pi^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi) = (\pi^\frown \mathbf{a}) \restriction (\pi^\frown \xi) \in \mathscr{D}^{\pi^\frown \xi}$.

Доказательство. К примеру, по определению мы имеем

$$\pi^\frown(\sigma^\frown \mathbf{a}) = (\sigma^\frown \mathbf{a}) \circ \pi^{-1} = \mathbf{a} \circ \sigma^{-1} \circ \pi^{-1} = \mathbf{a} \circ (\pi \circ \sigma)^{-1} = (\pi \circ \sigma)^\frown \mathbf{a}.$$

Остальные утверждения также проверяются непосредственно.

Для изучения генерических структур вида $\langle \omega; W[\mathbf{a}]\rangle$, рассматривается *язык форсинга*, т.е. в данном случае обычный $\in$-язык, обогащенный *именами* вида

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{имя } \overset{\bullet}{x} & - & \text{для любого } x \in \mathbf{L},\ \textit{отождествляется с } x \\ \text{имя } \underline{\sigma \mathbf{a}} & - & \text{для любого } \sigma \in \mathbf{\Pi} \\ \text{в том числе имя } \underline{\varepsilon \mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}} & - & \text{для тождественной пермутации } \varepsilon \in \mathbf{\Pi} \\ \underline{\mathbf{\Omega}} & - & \text{одно специальное имя} \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Действие пермутаций $\pi \in \mathbf{\Pi}$ продолжается на имена t так:

$$\left.\begin{array}{rcl} \pi^\frown \overset{\bullet}{x} & = & \overset{\bullet}{x} \\ \pi^\frown(\underline{\sigma \mathbf{a}}) & = & \underline{(\sigma \circ \pi^{-1})\mathbf{a}} \\ \text{в частности, } \pi^\frown \underline{\mathbf{a}} & = & \underline{(\pi^{-1})\mathbf{a}} \text{ (при } \sigma = \varepsilon) \\ \pi^\frown \underline{\mathbf{\Omega}} & = & \underline{\mathbf{\Omega}} \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Далее, если $\mathbf{a} \in \mathscr{D}^{\boldsymbol{I}}$, то *интерпретация* $t[\mathbf{a}]$ любого имени t определяется так:

$$\left.\begin{array}{rcl} \overset{\bullet}{x}[\mathbf{a}] & = & x \quad \text{(независимо от } \mathbf{a}) \\ \underline{\sigma \mathbf{a}}[\mathbf{a}] & = & \sigma^\frown \mathbf{a} = \mathbf{a} \circ \sigma^{-1} \quad \text{(принадлежит } \mathscr{D}^{\boldsymbol{I}}) \\ \underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}] & = & \{\sigma^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi)\colon \sigma \in \mathbf{\Pi} \wedge \xi \in \mathbf{\Xi} \wedge \xi \subseteq \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]\} \\ \text{и также } W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]] & = & \mathscr{P}(\omega) \cap \mathcal{L}(\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]) = \mathscr{P}(\omega) \cap \bigcup_{u \in \underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]} \mathbf{L}[u] \quad \text{(ср. с (2))} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Лемма 6.3. *В условиях теоремы 5.3, если* $\pi \in \mathbf{\Pi}$, *то массив* $\mathbf{b} = \pi^\frown \mathbf{a} \in \mathscr{D}^{\boldsymbol{I}}$ *–* $\mathbb{P}$*-генерический над* $\mathbf{L}$, $\boldsymbol{J}[\mathbf{b}] = \pi^\frown(\boldsymbol{J}[\mathbf{a}])$, *и* $t[\mathbf{a}] = (\pi^\frown t)[\mathbf{b}]$ *для любого имени* t.

Доказательство. Отображение $\boldsymbol{i} \mapsto \pi^\frown \boldsymbol{i}$ является порядковым автоморфизмом $\boldsymbol{I}$, поэтому генеричность $\mathbf{b}$ следует из генеричности $\mathbf{a}$ по общим теоремам о форсинге. Для проверки равенства $\boldsymbol{J}[\mathbf{b}] = \pi^\frown(\boldsymbol{J}[\mathbf{a}])$ достаточно заметить, что если $\delta = \pi(\gamma)$, то по определению $\pi^\frown \gamma = \delta$ и $\pi^\frown \langle \gamma, s\rangle = \langle \delta, s\rangle$. (Здесь $\boldsymbol{i} = \gamma$ и $\boldsymbol{i} = \langle \gamma, s\rangle$ – элементы множества $\boldsymbol{I}$.) С другой стороны, мы имеем $\mathbf{b}_\delta = \mathbf{a}_\gamma$ также в силу того, что $\mathbf{b} = \pi^\frown \mathbf{a}$. Из этих фактов нетрудно вывести $\boldsymbol{J}[\mathbf{b}] = \pi^\frown(\boldsymbol{J}[\mathbf{a}])$.

Рассмотрим имя $t = \underline{\sigma \mathbf{a}}$, как в (4), где $\sigma \in \mathbf{\Pi}$. Используя равенство $\pi^\frown(\sigma^\frown \mathbf{a}) = (\pi \circ \sigma)^\frown \mathbf{a}$ леммы 6.2, мы непосредственно вычисляем

$$(\pi^\frown(\underline{\sigma \mathbf{a}}))[\pi^\frown \mathbf{a}] = (\underline{(\sigma \circ \pi^{-1})\mathbf{a}})[\pi^\frown \mathbf{a}] = (\sigma \circ \pi^{-1})^\frown(\pi^\frown \mathbf{a}) = (\sigma \circ \pi^{-1} \circ \pi)^\frown \mathbf{a} = \sigma^\frown \mathbf{a},$$

по формулам (5) и (6), что и требовалось.

Наконец, рассмотрим имя $t = \underline{\mathbf{\Omega}}$, как в (4). Требуется доказать $\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{b}] = \underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]$. Рассмотрим произвольное $x = \sigma^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi) \in \underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]$, где $\sigma \in \mathbf{\Pi}$, $\xi \in \mathbf{\Xi}$, $\xi \subseteq \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$. Положим $\xi_1 = \pi^\frown \xi \in \mathbf{\Xi}$ и $\sigma_1 = \sigma \circ \pi^{-1} \in \mathbf{\Pi}$. Используя лемму 6.2, вычисляем

$$\begin{aligned} \sigma^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi) &= (\sigma^\frown \mathbf{a}) \restriction (\sigma^\frown \xi) = \big((\sigma_1 \circ \pi)^\frown \mathbf{a}\big) \restriction \big((\sigma_1 \circ \pi)^\frown \xi\big) = \big(\sigma_1^\frown(\pi^\frown \mathbf{a})\big) \restriction \big(\sigma_1^\frown(\pi^\frown \xi)\big) \\ &= \sigma_1^\frown\big((\pi^\frown \mathbf{a}) \restriction (\pi^\frown \xi)\big) = \sigma_1^\frown(\mathbf{b} \restriction \xi_1). \end{aligned}$$

Однако из равенства $\boldsymbol{J}[\mathbf{b}] = \pi^\frown(\boldsymbol{J}[\mathbf{a}])$ следует $\xi_1 \subseteq \boldsymbol{J}[\mathbf{b}]$, и поэтому $x = \sigma^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi) = \sigma_1^\frown(\mathbf{b} \restriction \xi_1) \in \underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{b}]$. Лемма 6.3 доказана.

Если Φ является $\in$-формулой с именами вида (4) в роли параметров, то $\pi^\frown \Phi$ будет обозначать результат замены каждого участвующего имени t на $\pi^\frown t$.

Если, кроме того, $\mathbf{a} \in \mathscr{D}^{\boldsymbol{I}}$, то $\Phi[\mathbf{a}]$ будет обозначать результат замены каждого участвующего имени t на интерпретацию $t[\mathbf{a}]$ по формулам (6).

Через $\Vdash$ обозначается отношение $\mathbb{P}$-вынуждения над $\mathbf{L}$ как базовой моделью, согласованное с определением интерпретаций по (6). Следующая теорема является ключевым результатом теории форсинга для $\Vdash$.

Теорема 6.4. *Пусть $X \in \mathbb{P}$, $\xi = \|X\|$, а Φ – замкнутая $\in$-формула с именами (4) в роли параметров. Тогда $X \Vdash \Phi$ равносильно тому, что $\mathbf{L}[\mathbf{a}] \models \Phi[\mathbf{a}]$ для любого $\mathbf{a} \in \mathscr{D}^{\boldsymbol{I}}$, $\mathbb{P}$-генерического над $\mathbf{L}$ и такого, что $\mathbf{a} \restriction \xi \in X^\#$.*

Рутинное доказательство следующего результата 6.5 об инвариантности отношения $\Vdash$ относительно пермутаций, основанное на лемме 6.3, опускается.

Следствие 6.5. *Пусть Φ является замкнутой $\in$-формулой с именами (4) в роли параметров, $\pi \in \mathbf{\Pi}$ и $X \in \mathbb{P}$. Тогда $X \Vdash \Phi$ равносильно $\pi^\frown X \Vdash \pi^\frown \Phi$.*

Следствие 6.6. *Пусть Φ – замкнутая $\in$-формула с именами только вида $\overset{\bullet}{x}$ и $\underline{\mathbf{\Omega}}$ из (4), и $X \in \mathbb{P}$. Тогда $X \Vdash \Phi$ влечет $\mathbb{I} \Vdash \Phi$.*

Напомним, что $\mathbb{I}$ является слабейшим “условием” в $\mathbb{P}$, см. замечание 4.1.

Доказательство следствия 6.6. В противном случае выполнено $Y \Vdash \neg\Phi$ для какого-то “условия” $Y \in \mathbb{P}$. Множества $\xi = \|X\|$ и $\eta = \|Y\|$ (см. начало п. 4) принадлежат Ξ, в частности, они счетны в $\mathbf{L}$. Поэтому найдется такая пермутация $\pi \in \mathbf{\Pi}$, что множества ξ и $\eta' = \pi^\frown \eta$ дизъюнктны. Отсюда следует, что “условия” X и $Y' = \pi^\frown Y$ (последнее удовлетворяет $\|Y'\| = \eta'$) совместны в $\mathbb{P}$.

С другой стороны, формула Φ по условию удовлетворяет $\pi^\frown\Phi = \Phi$. Отсюда по следствию 6.5 и выбору Y следует $Y' \Vdash \neg\,\Phi$. Но это противоречит выбору X и совместности X и Y'. Противоречие доказывает доказывает следствие 6.6.

7. Беспараметрический выбор и доказательство основной теоремы. Здесь мы доказываем теорему 5.3 как решающий шаг в доказательстве нашей основной теоремы.

Доказательство теоремы 5.3. Мы фиксируем $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathbf{L}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$ и полагаем $\mathbf{a} = \mathbf{a}[G]$. Нашей целью является вывод $\mathbf{AC}^*_\omega$ в структуре $\langle\omega; W[\mathbf{a}]\rangle \in \mathbf{L}[\mathbf{a}] = \mathbf{L}[G]$. Поэтому фиксируем беспараметрическую формулу $\varphi(k,x)$ языка $\mathcal{L}(\mathbf{PA}_2)$. Требуется доказать, что

$$\langle\omega; W[\mathbf{a}]\rangle \models \bigl(\forall\,k\,\exists\,x\ \varphi(k,x) \Longrightarrow \exists\,y\,\forall\,k\ \varphi(k,(y)_k)\bigr). \tag{7}$$

Прервемся на следующую простую лемму.

Лемма 7.1. *Имеет место равенство* $W[\mathbf{a}] = W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]]$ (*см.* (2) *и* (6)).

Доказательство. Если $\sigma \in \mathbf{\Pi}$ то $\mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \xi] = \mathbf{L}[\sigma^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi)]$ (поскольку $\mathbf{\Pi} \in \mathbf{L}$). Отсюда следует $\mathcal{L}(E[\mathbf{a}]) = \mathcal{L}(\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}])$, и лемма доказана.

Доказанная лемма разрешает переписать (7) в следующем эквивалентном виде:

$$\langle\omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]]\rangle \models \bigl(\forall\,k\,\exists\,x\ \varphi(k,x) \Longrightarrow \exists\,y\,\forall\,k\ \varphi(k,(y)_k)\bigr). \tag{8}$$

что мы и будем доказывать.

Начиная вывод (8), предполагаем противное, т.е. $\neg$(8). По теореме 6.4 это вынуждается некоторым “условием” $X \in G$. Однако вынуждаемое предложение здесь содержит только имя $\underline{\mathbf{\Omega}}$ согласно (6). Поэтому согласно следствию 6.6 мы имеем

$$\mathbb{I} \Vdash \neg\,(8), \quad \text{т.е.}\ \ \mathbb{I} \Vdash \ \bigl[\langle\omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}]\rangle \models \bigl(\forall\,k\,\exists\,x\ \varphi(k,x) \wedge \neg\,\exists\,y\,\forall\,k\ \varphi(k,(y)_k)\bigr)\bigr]. \tag{9}$$

В частности, для каждого $k < \omega$ выполнено

$$\mathbb{I} \Vdash \ \bigl(\langle\omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}]\rangle \models \exists\,x\ \varphi(k,x)\bigr).$$

По определению (6) для каждого k имеются такие $\xi_k \in \mathbf{\Xi}$, $\mu_k < \omega_1$, $X_k \in \mathbb{P}$, что

$$X_k \Vdash \xi_k \subseteq \boldsymbol{J}[\underline{\mathbf{a}}] \ \wedge\ \exists\,x\ \bigl(\Psi(\underline{\mathbf{a}} \restriction \xi_k, \mu_k, x) \wedge \langle\omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}]\rangle \models \varphi(k,x)\bigr), \tag{10}$$

где $\in$-формула $\Psi(\underline{\mathbf{a}} \restriction \xi_k, \mu_k, x)$ говорит, что x есть μ_k-й в смысле канонического геделева порядка на $\mathbf{L}[\underline{\mathbf{a}} \restriction \xi_k]$ элемент множества $\mathscr{P}(\omega) \cap \mathbf{L}[\underline{\mathbf{a}} \restriction \xi_k]$.

Замечание 7.2. Квантор $\exists\,x \in \mathbf{L}[\sigma^\frown(\underline{\mathbf{a}} \restriction \xi_k)] \cap \mathscr{P}(\omega)$ в (10), ожидавшийся по определению (6), сначала заменен более простым $\exists\,x \in \mathbf{L}[\underline{\mathbf{a}} \restriction \xi_k] \cap \mathscr{P}(\omega)$, на основании того, что $\mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \xi] = \mathbf{L}[\sigma^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi)]$ (следует из $\sigma \in \mathbf{\Pi} \in \mathbf{L}$), а затем и просто на $\exists\,x$, поскольку $\Psi(\underline{\mathbf{a}} \restriction \xi_k, \mu_k, x)$ формально влечет $x \in \mathbf{L}[\underline{\mathbf{a}} \restriction \xi_k] \cap \mathscr{P}(\omega)$.

И при этом отображение $k \mapsto \langle\xi_k, \mu_k, X_k\rangle$ принадлежит $\mathbf{L}$.

Отображение $k \mapsto \eta_k = \|X_k\| \in \mathbf{\Xi}$ тогда также принадлежит $\mathbf{L}$. Следовательно, рассуждая в $\mathbf{L}$, можно построить систему $\langle\pi_k\rangle_{k<\omega} \in \mathbf{L}$ пермутаций $\pi_k \in \mathbf{\Pi}$, для которых множества $\eta'_k = \pi_k^\frown \eta_k \in \mathbf{\Xi}$ *попарно дизъюнктны*. Тогда "условия" $Y_k = \pi_k^\frown X_k \in \mathbb{P}$ удовлетворяют $\|Y_k\| = \eta'_k$, откуда и из попарной дизъюнктности следует, что множество $Y = \bigcup_k (Y_k \restriction^{-1} \eta)$ принадлежит $\mathbb{P}$ и $\|Y\| = \eta$, где $\eta = \bigcup_k \eta'_k \in \mathbf{\Xi}$.

Пусть теперь $\xi'_k = \pi_k^\frown \xi_k \ \forall\, k$. Поскольку $Y \leqslant Y_k$ в $\mathbb{P}$, мы имеем из (10)

$$Y \Vdash \xi_k \subseteq \boldsymbol{J}[\underline{\pi_k \mathbf{a}}] \wedge \exists\, x \left(\Psi((\underline{\pi_k \mathbf{a}}) \restriction \xi_k, \mu_k, x) \wedge \langle \omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}] \rangle \models \varphi(k, x)\right) \quad \forall\, k. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь любой массив $\mathbf{a} \in \mathscr{D}^{\boldsymbol{I}}$, $\mathbb{P}$-генерический над $\mathbf{L}$ и такой, что $\mathbf{a} \restriction \eta \in Y^\#$. По теореме 6.4 (11) влечет в $\mathbf{L}[\mathbf{a}]$ следующее:

$$\xi_k \subseteq \boldsymbol{J}[\pi_k^\frown \mathbf{a}] \wedge \exists\, x \left(\Psi((\pi_k^\frown \mathbf{a}) \restriction \xi_k, \mu_k, x) \wedge \langle \omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]] \rangle \models \varphi(k, x)\right) \quad \forall\, k. \tag{12}$$

Однако равенство $\boldsymbol{J}[\mathbf{b}] = \pi^\frown(\boldsymbol{J}[\mathbf{a}])$ леммы 6.3 позволяет заменить соотношение $\xi_k \subseteq \boldsymbol{J}[\pi_k^\frown \mathbf{a}]$ на эквивалентное $\xi'_k \subseteq \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$, а последнее равенство леммы 6.2 позволяет заменить $(\pi_k^\frown \mathbf{a}) \restriction \xi_k$ на эквивалентное $\pi_k^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi'_k)$. Тем самым, в $\mathbf{L}[\mathbf{a}]$ выполнено

$$\xi'_k \subseteq \boldsymbol{J}[\mathbf{a}] \wedge \exists\, x \left(\Psi(\pi_k^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi'_k), \mu_k, x) \wedge \langle \omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]] \rangle \models \varphi(k, x)\right) \quad \forall\, k. \tag{13}$$

Далее, коль скоро отображения $k \mapsto \xi_k, \pi_k$ принадлежат $\mathbf{L}$, отображения $k \mapsto \xi'_k$ также принадлежат $\mathbf{L}$, а потому множество $\xi' = \bigcup_k \xi'_k$ принадлежат $\mathbf{L}$, и $\xi' \in \mathbf{\Xi}$, $\xi' \subseteq \boldsymbol{J}[\mathbf{a}]$ согласно (13). Тогда $\mathbf{a} \restriction \xi' \in \underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]$ и $\mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \xi'] \cap \mathscr{P}(\omega) \subseteq W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]]$ по определению (6). Теперь, рассуждая в $\mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \xi']$, для каждого $k < \omega$ мы, через x_k, обозначим μ_k-й в смысле канонического геделева порядка на $\mathbf{L}[\pi_k^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi'_k)]$ элемент множества $\mathscr{P}(\omega) \cap \mathbf{L}[\pi_k^\frown(\mathbf{a} \restriction \xi'_k)]$, а затем определяем $y \in \mathscr{P}(\omega) \cap \mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \xi']$ равенствами $(y)_k = x_k$ для всех k. Имеем

$$\langle \omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]] \rangle \models \varphi(k, x_k) \quad \forall\, k$$

согласно (13), и в то же время

$$y \in \mathscr{P}(\omega) \cap \mathbf{L}[\mathbf{a} \restriction \xi'] \subseteq W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]]$$

по построению. Таким образом, $\langle \omega; W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]] \rangle \models \exists\, y\, \forall\, k\, \varphi(k, (y)_k)$. Но это противоречит (13), поскольку $\mathbb{I} \in \mathbb{P}$ – слабейшее "условие", а $\mathbf{a}$ – генерический массив. Противоречие завершает вывод теоремы 5.3.

Доказательство теоремы 1.1. Берем произвольное $\mathbb{P}$-генерическое над $\mathbf{L}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}$. Пусть $\mathbf{a} = \mathbf{a}[G]$ и $X = W[\mathbf{a}] = W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]]$ (см. лемму 7.1). Имеем $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle \models \mathbf{PA}_2^* + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1) + \neg\, \mathbf{CA}$. по теореме 5.2 и $\langle \omega; W[\mathbf{a}] \rangle \models \mathbf{AC}_\omega^*$ (беспараметрическая) по теореме 5.3.

8. Обсуждение. Мы закончим несколькими вопросами и замечаниями в связи с теоремой 1.1.

Проблема 1. Остается неясным, до какого проективного уровня схема свертки $\mathbf{CA}$ верна в построенной модели $W[\mathbf{a}] = W^*[\underline{\mathbf{\Omega}}[\mathbf{a}]]$ для доказательства теоремы 1.1. Из теоремы 5.2 следует, что $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_2^1)$ верна в этой модели, а внимательный анализ примера для $\neg\, \mathbf{CA}$ из доказательства теоремы 5.2 показывает, что $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_4^1)$ не выполнена. Остается открытым вопрос, верна ли там $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_3^1)$. Наша гипотеза состоит в том, что $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_3^1)$, т.е. $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_3^1) + \neg\, \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}_4^1)$ выполнена в $W[\mathbf{a}]$, а предполагаемый метод доказательства состоит в использовании внутренних автоморфизмов форсинга Сакса дополнительно к пермутациям из $\mathbf{\Pi}$.

Проблема 2. Построить модель для теории $\mathbf{AC}^*_\omega + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}^1_2) + \neg\,\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}^1_3)$. Решение этой проблемы следует ожидать на основе итераций и произведений форсинга Йенсена из [21], [22]. Дело в том, что релятивная "йенсеновость" является Π^1_2-отношением, в отличие от отношения "правильного наследника" из доказательства теоремы 4.8, которое оценивается как заведомо более сложное чем Π^1_2.

Проблема 3. Как обобщение предыдущего, было бы интересно доказать, что при любом $n \geqslant 2$, $\mathbf{PA}^*_2 + \mathbf{AC}^*_\omega + \mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}^1_n)$ (с параметрами) не влечет $\mathbf{CA}(\mathbf{\Sigma}^1_{n+1})$. (Ср. с проблемой 9 в [3; § 11].) Отсюда следовало бы, что полная схема свертки $\mathbf{CA}$ не является конечно аксиоматизируемой над $\mathbf{PA}^*_2 + \mathbf{AC}^*_\omega$. Мы ожидаем, что методы индуктивного построения форсингов в $\mathbf{L}$, подобных итерированному форсингу Йенсена из [22], но имеющих скрытые автоморфизмы, из наших недавних работ [23], [24], [25] и др., могут привести к решению этой проблемы.

Проблема 4 (сообщена Али Энаятом). Возможны ли результаты, подобные нашей теореме 1.1, для теории классов Келли–Морса как теории второго порядка над $\mathbf{ZFC}$? Решение этой задачи может потребовать развития техники форсинга Сакса для несчетных кардиналов, как у Канамори [26], или как сделано в недавней еще неопубликованной работе Фридмана и Гитман [27] для форсинга Йенсена.

Замечание 8.1. Это исследование может быть полезно при создании алгоритмов или счетных алгоритмических моделей, которые представляют эволюцию клеточных типов и связаны с хранением и обработкой геномной информации.

Авторы благодарят Али Энайята, Гюнтера Фукса и Викторию Гитман за дискуссию и замечания, которые привели к успешному завершению этой работы. Авторы признательны анонимным рецензентам за ценные исправления, позволившие существенно дополнить и улучшить изложение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] G. Kreisel, "A survey of proof theory", *J. Symbolic Logic*, **33** (1968), 321–388.

[2] S. G. Simpson, *Subsystems of Second Order Arithmetic*, Cambridge Univ. Press, New York, 2009.

[3] K. Apt, W. Marek, "Second order arithmetic and related topics", *Ann. Math. Logic*, **6**:3-4 (1974), 177–229.

[4] W. Guzicki, "On weaker forms of choice in second order arithmetic", *Fund. Math.*, **93**:2 (1976), 131–144.

[5] A. Levy, "Definability in axiomatic set theory. II", *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory* (Proc. Internat. Colloq., Jerusalem, 1968), Stud. Logic Found. Math., North-Holland, Amsterdam–London, 1970, 129–145.

[6] R. M. Solovay, "A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable", *Ann. Math.* (2), **92**:1 (1970), 1–56.

[7] V. Kanovei, V. Lyubetsky, "On the significance of parameters in the choice and collection schemata in the 2nd order Peano arithmetic", *Mathematics*, **11**:3 (2023), 1–19.

[8] M. Corrada, "Parameters in theories of classes", *Mathematical logic in Latin America* (Proc. IV Latin Amer. Sympos. Math. Logic, Santiago, 1978), Stud. Logic Found. Math., **99**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1980, 121–132.

[9] A. Levy, "Parameters in comprehension axiom schemas of set theory", *Proceedings of the Tarski Symposium*, Proc. Sympos. Pure Math., **25**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, 309–324.

[10] R. Schindler, P. Schlicht, *ZFC without parameters* (*A note on a question of Kai Wehmeier*), https://ivv5hpp.uni-muenster.de/u/rds/ZFC_without_parameters.pdf, Muenster, Germany, 2011.

[11] H. Friedman, "On the necessary use of abstract set theory", *Adv. in Math.*, **41**:3 (1981), 209–280.

[12] T. Schindler, "A disquotational theory of truth as strong as Z_2^-", *J. Philos. Log.*, **44**:4 (2015), 395–410.

[13] J. H. Schmerl, "Peano arithmetic and hyper-Ramsey logic", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **296**:2 (1986), 481–505.

[14] V. Kanovei, V. Lyubetsky, "Parameterfree comprehension does not imply full comprehension in second order Peano arithmetic", *Studia Logica*, 2024.

[15] E. Frittaion, "A note on fragments of uniform reflection in second order arithmetic", *Bull. Symb. Log.*, **28**:3 (2022), 451–465.

[16] V. Kanovei, "Non-Glimm–Effros equivalence relations at second projective level", *Fund. Math.*, **154**:1 (1997), 1–35.

[17] J. E. Baumgartner, R. Laver, "Iterated perfect-set forcing", *Ann. Math. Logic*, **17**:3 (1979), 271–288.

[18] M. J. Groszek, "Applications of iterated perfect set forcing", *Ann. Pure Appl. Logic*, **39**:1 (1988), 19–53.

[19] A. Mathias, "Surrealist landscape with figures (a survey of recent results in set theory)", *Period. Math. Hungar.*, **10**:2–3 (1979), 109–175.

[20] K. Kunen, *Set Theory*, Stud. Log. (Lond.), **34**, College Publ., London, 2011.

[21] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "Определимое счетное множество, не содержащее определимых элементов", *Матем. заметки*, **102**:3 (2017), 369–382.

[22] S.-D. Friedman, V. Gitman, V. Kanovei, "A model of second-order arithmetic satisfying AC but not DC", *J. Math. Log.*, **19**:1 (2019), 1–39.

[23] V. Kanovei, V. Lyubetsky, "Definable minimal collapse functions at arbitrary projective levels", *J. Symb. Log.*, **84**:1 (2019), 266–289.

[24] V. Kanovei, V. Lyubetsky, "On the Δ^1_n problem of Harvey Friedman", *Mathematics*, **8**:9 (2020), 1–21.

[25] V. Kanovei, V. Lyubetsky, "On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski, Part II", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **375**:12 (2022), 8651-8686.

[26] A. Kanamori, "Perfect-set forcing for uncountable cardinals", *Ann. Math. Logic*, **19**:1–2 (1980), 97–114.

[27] S.-D. Friedman, V. Gitman, *Jensen Forcing at an Inaccessible and a Model of Kelley–Morse Satisfying* CC *but not* DC_ω, https://victoriagitman.github.io/files/inaccessibleJensen.pdf, 2023.

В. Г. Кановей
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: kanovei@iitp.ru

Поступило
05.02.2024
После доработки
27.03.2024
Принято к публикации
17.04.2024

В. А. Любецкий
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: lyubetsk@iitp.ru