Препринт ПОМИ — 16/2007

БОРЕЛЕВСКАЯ СВОДИМОСТЬ КАК АДДИТИВНОЕ СВОЙСТВО ОБЛАСТЕЙ

В. Г. КАНОВЕЙ [1], В. А. ЛЮБЕЦКИЙ [2]

Аннотация

В этой заметке мы доказываем, что в определенных условиях если E и F — борелевские отношения эквивалентности, а $X = \bigcup_n X_n$ — счетное объединение борелевских множеств, причем каждое ограниченное отношение $\mathsf{E} \restriction X_n$ борелевски сводимо к F, то и $\mathsf{E} \restriction X$ борелевски сводимо к F, так что свойство борелевской сводимости к F является счетно аддитивным как свойство областей.

[1] Поддержан грантами РФФИ 06-01-00608 и 07-01-00445. Контактный автор.
[2] Поддержан грантом РФФИ 07-01-00445 и МНТЦ 2766

§1 Введение

Напомним, что если E, F — борелевские отношения эквивалентности на борелевских множествах, соотведственно, X, Y, то $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ (борелевская сводимость E к F) означает, что существует борелевское отображение $\vartheta : X \to Y$ такое, что для всех $x, x' \in X$ выполнено

$$x \,\mathsf{E}\, x' \iff f(x) \,\mathsf{F}\, f(x')\,.$$

Борелевские отображения — это такие, при которых прообраз всякого борелевского множества является борелевским же множеством, или, что для польских пространств эквивалентно, те, графики которых — борелевские множества в соответствующих произведениях пространств. О борелевской сводимости и связанных с ней вопросах см. более подробно на русском языке в книге [6], а также в [2, 7, 4].

Предположим, что E – борелевское отношение эквивалентности на борелевском множестве X некоторого польского пространства. Можно рассматривать ограниченные отношения вида $\mathsf{E} \restriction Y$, где Y – борелевское подмножество множества X. Такие ограниченные отношения эквивалентности могут удовлетворять соотношению $\mathsf{E} \restriction Y \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, где F — некоторое другое фиксированное борелевское отношение эквивалентности. Ясно, что если $\mathsf{E} \restriction Y \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, и $Y' \subseteq Y$ — борелевское множество, то также выполняется $\mathsf{E} \restriction Y' \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$. Это означает, что выполнение $\mathsf{E} \restriction Y \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ как свойство множества Y при фиксированных E и F является характеристикой типа «малости». В таких случаях типичной задачей является выяснить, насколько это свойство аддитивно. Главная теорема этой заметки доказывает, что при определенных условиях имеет место счетная аддитивность.

§2 Основная теорема

Формулировке теоремы предпошлем несколько определений. Допустим, что F — отношение эквивалентности на каком-то множестве X. Для каждого натурального n, через $n\mathsf{F}$ обозначается отношение эквивалентности, определенное на множестве $n \times X = \{\langle k, x\rangle : k < n \wedge x \in X\}$ так, что $\langle k, x\rangle \, n\mathsf{F} \, \langle j, y\rangle$, если $k = j$ и $x\mathsf{F}y$. Таким образом, $n\mathsf{F}$ можно рассматривать как объединение n независимых «копий» F_k, $k < n$, отношения F на попарно дизъюнктных множествах. Эти множества суть $X_k = \{k\} \times X$, а эти копии F_k определяются так, что $\langle k, x\rangle \,\mathsf{F}_k\, \langle k, y\rangle$, если $x \,\mathsf{F}\, y$.

Соответственно, в тех же условиях через $\mathbb{N}\mathsf{F}$ обозначается отношение эквивалентности, определенное на множестве $\mathbb{N} \times X$ так, что $\langle k, x\rangle \,\mathbb{N}\mathsf{F}\, \langle j, y\rangle$, если $k = j$ и $x \,\mathsf{F}\, y$. Таким образом, $\mathbb{N}\mathsf{F}$ можно рассматривать как объединение счетного числа независимых «копий» F_k отношения F на попарно дизъюнктных множествах.

Теорема 1. *Предположим, что* F *— борелевское отношение эквивалентности, удовлетворяющее* $\mathbb{N}\mathsf{F} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$, *причем все* F*-классы эквивалентности* σ*-компактны, а* E *— борелевское отношение эквивалентности на борелевском множестве* $X = \bigcup_k X_k$, *где все* X_k *— борелевские множества. Допустим, что* $\mathsf{E} \restriction X_k \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ *для каждого* k. *Тогда* $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$.

Доказательство. Достаточно доказать следующий более простой факт, показывающий, что из двух, возможно, несогласованных между собой отображений редукции можно составить одно отображение на общей области:

Лемма 2. *Допустим, что* E *— борелевское отношение эквивалентности, определенное на объединении* $X \cup Y$ *дизъюнктных борелевских множеств* X *и* Y, *а* F *— борелевское отношение эквивалентности с* σ*-компактными классами эквивалентности, определенное на объединении* $P \cup Q$ *дизъюнктных борелевских множеств* P *и* Q, F*-независимых в том смысле, что выполнено* $p \not\mathsf{F}\, q$ *для всех* $p \in P$, $q \in Q$.

В этой ситуации, если f, g *— борелевские редукции отношений* $\mathsf{E} \restriction X$, $\mathsf{E} \restriction Y$ *к соответственно* $\mathsf{F} \restriction P$, $\mathsf{F} \restriction Q$, *то имеется борелевская редукция* $h : X \cup Y \to P \cup Q$ *отношения* E *к* F *такая, что* $h \restriction X = f$.

Для **вывода теоремы из леммы,** пусть $Y = \mathtt{dom}\,\mathsf{F}$ (т.е. то борелевское множество, на котором определено F). Тогда $\mathbb{N}\mathsf{F}$ — отношение, определенное на $\mathbb{N} \times Y$ таким образом, что $\langle k, x\rangle\, \mathbb{N}\mathsf{F}\, \langle j, y\rangle$, когда $k = j$ и $x \,\mathsf{F}\, y$. Мы доказываем теорему в предположении, что множества X_k попарно дизъюнктны, что, очевидно, не умаляет общности. (В самом деле, иначе просто рассмотрим попарно дизъюнктные множества $X'_k = X_k \smallsetminus \bigcup_{j<k} X_j$, объединение которых очевидно совпадает с объединением исходных множеств X_k.)

Положим $Y_k = \{k\} \times Y$, так что $\mathbb{N} \times Y$ есть попарно дизъюнктое объединение борелевских множеств Y_k, на каждом из которых определяется своя «копия» F_k отношения F, т.е. $\langle k, x\rangle\, \mathsf{F}_k\, \langle k, y\rangle$, когда $x \,\mathsf{F}\, y$. Понятно, что F_k тождественно ограничению $\mathbb{N}\mathsf{F} \restriction Y_k$ отношения $\mathbb{N}\mathsf{F}$ на Y_k, и множества Y_k, Y_j являются $\mathbb{N}\mathsf{F}$-независимыми при $k \ne j$. Теперь определим $Y'_n = Y_0 \cup \dots \cup Y_n$, а также $X'_n = X_0 \cup \dots \cup X_n$.

Строится система борелевских отображений $h_n : X'_n \to Y'_n$, удовлетворяющая таким двум условиям:

(i) h_n — редукция отношения $\mathsf{E} \restriction X'_n$ к $\mathbb{N}\mathsf{F} \restriction Y'_n$;

(ii) h_{n+1} продолжает h_n.

Если такая последовательность $\{h_n\}$ построена, то по простым соображениям $h = \bigcup_n h_n$ становится борелевской редукцией отношения E (на множестве $X = \bigcup_n X_n$) к $\mathbb{N}\mathsf{F}$, так что $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathbb{N}\mathsf{F}$, а потому $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$.

Построение системы отображений h_n проходит по индукции. Прежде всего, поскольку по условию теоремы выполнено $\mathsf{E} \restriction X_k \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ для каждого k, существуют борелевские отображения $\vartheta_k : X_k \to Y_k$, являющиеся редукциями отношений соответственно $\mathsf{E} \restriction X_k$ к F_k, т.е. к $\mathbb{N}\mathsf{F} \restriction Y_k$. Это позволяет сразу взять $h_0 = \vartheta_0$.

Выполним индуктивный шаг $n \to n+1$. Допустим, что уже построена борелевская функция $h_n : X'_n \to Y'_n$, удовлетворяющая (i). Множества Y'_n и Y_{n+1} $\mathbb{N}\mathsf{F}$-независимы согласно сказанному выше. Кроме того, $\mathbb{N}\mathsf{F}$-классы эквивалентности, в сущности, тождественны F-классам, а потому являются σ-компактными множествами. Поэтому лемма 2 в равной степени применима к отношению $\mathbb{N}\mathsf{F}$ вместо F. Значит, имеется борелевская редукция $\eta : X'_{n+1} \to Y'_{n+1}$ отношения $\mathsf{E} \restriction X'_{n+1}$ к $\mathbb{N}\mathsf{F} \restriction Y'_{n+1}$, продолжающая h_n. Остается определить $h_{n+1} = \eta$, и это заканчивает индуктивный шаг построения и вывод теоремы 1 из леммы 2.

Доказательство (лемма)**.** Трудность состоит в том, что множества X, Y **не** предполагаются E-независимыми, так что могут существовать точки $x \in X$ и $y \in Y$ такие, что $x \mathrel{\mathsf{E}} y$. В таком случае мы должны будем определять $h(y)$ исходя не из значения $g(y)$, а как какую-нибудь точку из множества P, которая F-эквивалентна точке $f(x)$ в P для некоторого $x \in X$, удовлетворяющего $x \mathrel{\mathsf{E}} y$.

Таким образом, ключевая проблема состоит в выборе подходящего определения значений $h(y)$ для таких точек $y \in Y$, которые удовлетворяют соотношению $g(y) \in \mathtt{ran}\, U$, где

$$U = \{\langle p, q\rangle \in P \times Q : \exists\, x \in X\; \exists\, y \in Y\; (x \mathrel{\mathsf{E}} y \wedge f(x) \mathrel{\mathsf{F}} p \wedge g(y) \mathrel{\mathsf{F}} q)\}$$

и, как обычно, $\mathtt{ran}\, U = \{q : \exists\, p\, (\langle p, q\rangle \in U)\}$. В принципе было бы достаточно найти борелевскую функцию φ, определенную на множестве

$$Y' = \{y \in Y : \exists\, x \in X\; (x \mathrel{\mathsf{E}} y)\}\,,$$

и со значениями в X, такую, что выполнено $\varphi(y) \mathrel{\mathsf{E}} y$ для всех $y \in Y'$, и затем определить $h(y) = f(\varphi(y))$ для $y \in Y'$. Однако построение такой функции φ сводится к задаче униформизации множества

$$\{\langle y, x\rangle \in Y \times X : x \mathrel{\mathsf{E}} y\}\,,$$

которая в классе борелевских униформизаций, вообще говоря, неразрешима. Приходится использовать более сложное рассуждение.

Заметим, что U является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством (т. е. суслинским, или А-множеством, см. на русском языке [3, 5] о современной теории множеств из классов $\mathbf{\Sigma}^1_1$ и $\mathbf{\Pi}^1_1$). Кроме того, поскольку отображения f, g являются редукциями отношения E к F, мы заключаем, что U — подмножество $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества

$$W = \{\langle p, q\rangle \in P \times Q : \forall \langle p', q'\rangle \in U \,(p \mathrel{\mathsf{F}} p' \Longleftrightarrow q \mathrel{\mathsf{F}} q')\}\,.$$

В самом деле, допустим, что $\langle p, q\rangle \in U$, так что найдутся точки $x \in X$ и $y \in Y$, для которых $x \mathrel{\mathsf{E}} y$, а кроме того имеет место $f(x) \mathrel{\mathsf{F}} p$ и $f(y) \mathrel{\mathsf{F}} q$. Рассмотрим любую другую пару $\langle p', q'\rangle \in U$, и пусть $x' \in X$ и $y' \in Y$ удовлетворяют $x' \mathrel{\mathsf{E}} y'$, а также $f(x') \mathrel{\mathsf{F}} p'$ и $f(y') \mathrel{\mathsf{F}} q'$. Если теперь, например, $p \mathrel{\mathsf{F}} p'$, то мы имеем $x \mathrel{\mathsf{E}} x'$, поскольку f — редукция, а потому $y \mathrel{\mathsf{E}} y'$, откуда и следует $q \mathrel{\mathsf{F}} q'$.

Поэтому, согласно первой теореме отделимости Лузина (см. книгу [15], или, например, [3, 4] на русском языке), существует «промежуточное» борелевское множество V, для которого выполнено $U \subseteq V \subseteq W$.

Более того, оказывается, что в данном случае множество V можно выбрать среди инвариантных множеств. Заметим, что множества U и W F-*инвариантны* в том смысле, что если имеет место $p \mathrel{\mathsf{F}} p'$ и $q \mathrel{\mathsf{F}} q'$ то пары $\langle p, q\rangle$ и $\langle p', q'\rangle$ либо одновременно принадлежат либо одновременно не принадлежат множеству U, и то же для второго множества W. В этой ситуации справедлива «инвариантная» теорема отделимости (см., например, [9, 12]), которая приносит «промежуточное» борелевское множество V, удовлетворяющее соотношению $U \subseteq V \subseteq W$ и F-инвариантное в том же смысле вместе с множествами U, W. [3]

Второе важное свойство множества U состоит в том, что оно представляет собой «биекцию с точностью до F» в том смысле, что эквивалентность

$$p \mathrel{\mathsf{F}} p' \Longleftrightarrow q \mathrel{\mathsf{F}} q'$$

выполнена для любых двух пар $\langle p, q\rangle$ и $\langle p', q'\rangle$ из U. (В самом деле, допустим, что пары $\langle p, q\rangle$ и $\langle p, q\rangle$ принадлежат множеству U, так что найдутся точки

[3] Приведем для удобства читателя простое доказательство этой инвариантной формы теоремы отделимости в рассматриваемом случае. По обычной теореме отделимости, имеется борелевское множество V_0 такое, что $U \subseteq V_0 \subseteq W$. Множество

$$U_1 = [V_0]_{\mathsf{F}} = \{\langle p, q\rangle \in P \times Q : \exists \langle p', q'\rangle \in V_0 \,(p \mathrel{\mathsf{F}} p' \wedge q \mathrel{\mathsf{F}} q'\}$$

очевидно принадлежит $\mathbf{\Sigma}^1_1$, F-инвариантно, и удовлетворяет $V_0 \subseteq U_0 \subseteq W$, поскольку W также F-инвариантно. Опять по теореме отделимости имеется борелевское множество V_1 такое, что $U_1 \subseteq V_1 \subseteq W$. Рассматриваем $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $U_2 = [V_1]_{\mathsf{F}}$, и так далее. Полученное в результате этой бесконечной цепочки расширений множество $U' = \bigcup_n U_n = \bigcup_n V_n$ — борелевское (используется V_n-представление), F-инвариантное (используется U_n-представление), и всё еще удовлетворяет $V \subseteq U' \subseteq W$.

$x, x' \in X$ и $y, y' \in Y$, для которых $x \mathsf{E} y$, $x' \mathsf{E} y'$, а также $f(x) \mathsf{F} p$ и $f(y) \mathsf{F} q$, и соответственно $f(x') \mathsf{F} p'$ и $f(y') \mathsf{F} q'$. Если $p \mathsf{F} p'$, то выполнено $f(x) \mathsf{F} f(x')$, а значит и $x \mathsf{E} x'$, поскольку f – редукция, а тогда и $y \mathsf{E} y'$, откуда и следует $q \mathsf{F} q'$.)

Множества W и V не обязательно имеют это свойство: мешают пары $\langle p, q\rangle$ такие, что, например, p не является F-эквивалентным никакому $p' = f(x)$, $x \in X$. Мы собирается найти такое борелевское подмножество множества V, которое обладает указанным свойством и всё еще является надмножеством множества U. Для этого заметим, что $U \subseteq R$, где $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество R определено так:

$$R = \{\langle p', q'\rangle \in V : \forall \langle p, q\rangle \in V \, (p \mathsf{F} p' \Longleftrightarrow q \mathsf{F} q')\}.$$

Множество R также, очевидно, F-инвариантно вместе с V. Поэтому, опять согласно инвариантной теореме отделимости, найдется F-инвариантное борелевское множество S, для которого $U \subseteq S \subseteq R$.

Легко видеть, что множество R, а следовательно и его подмножество S, — «биекции с точностью до F». (В самом деле, если пары $\langle p', q'\rangle$ и $\langle p'', q''\rangle$ принадлежат V, и, например, $p' \mathsf{F} p''$, то взяв вторую пару в качестве $\langle p, q\rangle$ в определении R, мы сразу получим $q' \mathsf{F} q''$.) Отсюда и из F-инвариантности S (см. выше) следует, что для любого $q \in Q$ сечение $S_q = \{p : \langle p, q\rangle \in S\}$ либо пусто либо совпадает с F-классом эквивалентности $[p']_{\mathsf{F}} = \{p : p \mathsf{F} p'\}$ какого-нибудь элемента $p' \in P$, для которого $\langle p', q\rangle \in S$. Тем самым по условию леммы каждое сечение S_q σ-компактно.

Отсюда по известной теореме Арсенина – Кунугуи – Щеголькова для борелевских множеств с σ-компактными сечениями следует, что множество $Z = \mathtt{ran}\, S = \{q : \exists p \, (\langle p, q\rangle \in R)\}$ — борелевское, и более того найдется униформизирующая борелевская функция $\vartheta : Z \to P$, т.е. такая, что $\langle \vartheta(q), q\rangle \in S$ для всех $q \in Z$. (Об этой теореме см. например в книге [15, 35.H] или в статьях [8, 17].)

Заметим, что по построению выполнено $\mathtt{ran}\, U \subseteq Z$ и $p \mathsf{F} \vartheta(q)$ для всех пар $\langle p, q\rangle \in U$. Кроме того, множество Z является F-инвариантным, т.е. $q \in Z \wedge q' \mathsf{F} q \Longrightarrow q' \in Z$. Это позволяет нам закончить доказательство леммы (и теоремы), определив борелевскую редукцию E к F следующим образом. Естественно, полагаем $h(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Если $y \in Y$ и $g(y) \notin Z$ то полагаем $h(y) = g(y)$. Однако в случае, когда $g(y) \in Z$, мы определяем $h(y) = \vartheta(g(y))$.

$\square$ (лемма и теорема)

Требование σ-компактности классов эквивалентности, конечно, несколько ограничивает область применения теоремы 1, которая впрочем остается довольно широкой, см. ниже. Роль этого условия понятна: обеспечить требуемый выбор элемента в некотором классе F-эквивалентности при помощи борелевской функции (функция ϑ в конце доказательства леммы 2). При этом мы опираемся на теорему, которая дает борелевскую униформизацию для (борелевских) множеств с σ-компактными сечениями — в сущности, наиболее сильную из тех известных теорем о борелевской униформизации, которые в этом случае применимы.[4] Вряд ли в нашей ситуации можно ожидать разумного применения униформизационных теорем для «больших», например ненулевой меры или не первой категории, сечений (см. о них также в книге [15]), поскольку из всех классов эквивалентности данного отношения очевидно только счетное число может быть «большими» множествами.

Вторая возможность состоит в том, чтобы применить теорему борелевской униформизации для множеств с σ-компактными сечениями на уровне отношения E а не отношения F, а именно, в доказательстве леммы 2 сразу получить борелевскую функцию $\varphi : Y' \to X$ такую, что выполнено $\varphi(y) \mathrel{\mathsf{E}} y$ для всех $y \in Y'$. Для этого однако требуется σ-компактность всех множеств вида $[x]_{\mathsf{E}} \cap X$, т.е. в плане теоремы 1 σ-компактность всех множеств вида $[x]_{\mathsf{E}} \cap X_k$, что́, очевидно, накладывает ограничения не только на E но и на множества X_k. Впрочем, этот вариант работает и может быть полезен для случая, когда все E-классы эквивалентности — счетные множества. В этом случае счетность, а тогда и σ-компактность уже не зависят от природы множеств X_k.

§3 Приложения

Заметим, что условие $\mathbb{N}\mathsf{F} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ в доказанной теореме выполнено для большинства естественно определяемых отношений эквивалентности F. (На самом деле совершенно неясно как можно было бы определить борелевское отношение эквивалентности с бесконечным числом классов эквивалентности, которое не удовлетворяло бы этому условию.) Условие σ-компактности классов F-эквивалентности в теореме более ограничительно, но ему удовлетворяют, например, все *счетные* отношения эквивалентности F — т.е. те, которые имеют лишь конечные и счетные классы эквивалентности, в частности, такое отношение эквивалентности, как E_0, а также такие (не являющиеся счетными) отношения эквивалентности, как E_1 и $\boldsymbol{\ell}^\infty$.

Напомним, что E_0 определяется на множестве $2^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных диа-

[4] Напомним, что произвольное борелевское множество, вообще говоря, не обязательно униформизуется борелевским множеством: по теореме Новикова – Кондо приходится прибегать к униформизующим множествам более широкого класса $\mathbf{\Pi}^1_1$, что́ в контексте доказательства леммы привело бы к неборелевости функции h.

дических последовательностей так: $\{i_n\} \mathsf{E}_1 \{j_n\}$, когда $i_n = j_n$ для почти всех (т.е. кроме конечного числа) значений n. Отношение E_1 определяется точно так же на множестве $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных последовательностей вещественных чисел: $\{x_n\} \mathsf{E}_1 \{y_n\}$, если $x_n = y_n$ для почти всех n. Отношение $\boldsymbol{\ell}^\infty$ определено на том же множестве по-другому: $\{x_n\} \boldsymbol{\ell}^\infty \{y_n\}$, когда найдется число $C > 0$, для которого $|x_n - y_n| < C$ для всех n. Известно, что $\mathsf{E}_0 <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1 <_{\mathrm{B}} \boldsymbol{\ell}^\infty$ (т.е. борелевская сводимость имеет место только в одну сторону), см. [6], а также статью [11] о более широком спектре отношений эквивалентности подобного типа.

Следует еще упомянуть об одношении $\mathsf{\Delta}_{\mathbb{R}}$ равенства на вещественной прямой, которое рассматривается как отношение эквивалентности и также удовлетворяет обоим условиям теоремы 1 в роли F.

С отношениями $\mathsf{\Delta}_{\mathbb{R}}$, E_0, E_1 связаны следующие три типа борелевских отношений эквивалентности E:

гладкие: те, которые удовлетворяют $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{\Delta}_{\mathbb{R}}$, т.е. борелевски сводятся к отношению $\mathsf{\Delta}_{\mathbb{R}}$;

гиперконечные: те, которые удовлетворяют $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_0$ и являются счетными (т.е. все классы эквивалентности счетны), о них см. [10];

гипергладкие: те, которые удовлетворяют $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_1$, о них см. [16].

Все гладкие отношения эквивалентности являются гиперконечными, а все гиперконечные — гипергладкими, причем ни одно из двух обратных включений не имеет места.

Следствие 3. *Для каждого из этих трех классов борелевских отношений эквивалентности (т.е. гладкие, гиперконечные, гипергладкие отношения) справедливо следующее.*

Предположим, что E *— борелевское отношение эквивалентности на борелевском множестве* $X = \bigcup_k X_k$*, где все* X_k *— также борелевские множества. Если для каждого* k *ограниченное отношение* $\mathsf{E}\restriction X_k$ *принадлежит данному классу, то и само отношение* E *принадлежит данному классу.* $\square$

Этот частный случай теоремы 1 был достаточно давно известен для гиперконечных (и вероятно для гладких) отношений эквивалентности, по крайней мере он упоминается в [10], хотя точной ссылки нам найти не удалось.

Теорема 1 и следствие 3 могут быть полезны для верхней оценки сложности исследуемых отношений эквивалентности в тех случаях, когда по существу задачи область данного отношения разбивается на счетное число частей, на которых это отношение ведет себя по-разному. Это происходит, в частности, в доказательствах сложных дихотомических теорем (см. например [16, 13, 14]), когда первый случай, т. е. случай регулярной области, влечет разбиение на подобласти, определенные в соответствии с тем местом, откуда для определенного представления данной точки в виде последовательности уже начинается регулярность.

Цитированная литература

[1] К. Дж. Баруайз, ред. *Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств.* Пер. с англ. В. Г. Кановея, под ред. и с предисловием В. Н. Гришина, с добавлением В. Г. Кановея. «Наука», Москва, 1982.

[2] А. М. Вершик. Траекторная теория. В книге под ред. Я. Г. Синай, *Динамические системы – 2*, т. 2, *Итоги науки и техники. Серия: Современные проблемы математики. Фундаментальные направления*, стр. 89–105. ВИНИТИ, Москва, 1985.

[3] В. Г. Кановей. Добавление. Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории. В книге [1], стр. 273–364. «Наука», Москва, 1982.

[4] В. Г. Кановей. Топологии порожденные эффективно суслинскими множествами и их приложения в дескриптивной теории множеств. *УМН*, 51 (вып. 3 (309)):17–52, 1996.

[5] В. Г. Кановей and В. А. Любецкий. О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств. *УМН*, 58 (вып. 5(353)):3–88, 2003.

[6] В. Г. Кановей and В. А. Любецкий. *Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики.* «Наука», Москва, 2007.

[7] В. Г. Кановей and М. Реекен. Некоторые новые результаты о борелевской несводимости отношений эквивалентности. *Известия РАН, сер. матем.*, 67(1):59–82, 2003.

[8] Е. А. Щегольков. Об униформизации некоторых B-множеств. *Доклады АН СССР*, 59:1065–1068, 1948.

[9] John Burgess and Douglas Miller. Remarks on invariant descriptive set theory. *Fund. Math.*, 90(1):53–75, 1975.

[10] R. Dougherty, S. Jackson, and A. S. Kechris. The structure of hyperfinite Borel equivalence relations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 341(1):193–225, 1994.

[11] Su Gao. Equivalence relations and classical Banach spaces. In *Mathematical Logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian Logic Conference. Novosibirsk, Russia, 16–19 August, 2005.*, pages 70–89. World Scientific, 2006.

[12] L. A. Harrington, A. S. Kechris, and A. Louveau. A Glimm-Effros dichotomy for Borel equivalence relations. *J. Amer. Math. Soc.*, 3(4):903–928, 1990.

[13] G. Hjorth. Actions by the classical Banach spaces. *J. Symbolic Logic*, 65(1):392–420, 2000.

[14] Greg Hjorth and Alexander S. Kechris. Recent developments in the theory of Borel reducibility. *Fund. Math.*, 170(1-2):21–52, 2001.

[15] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[16] Alexander S. Kechris and Alain Louveau. The classification of hypersmooth Borel equivalence relations. *J. Amer. Math. Soc.*, 10(1):215–242, 1997.

[17] S. M. Srivastava. Selection and representation theorems for σ-compact valued multifunctions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 83(4):775–780, 1981.

Статья поступила 10 апреля 2007 г.

Кановей Владимир Григорьевич
kanovei@mccme.ru

Любецкий Василий Александрович
lyubetsk@ippi.ru

Институт проблем передачи информации
Москва, 101447, Большой Каретный переулок, д. 19