510.223+510.225

Локально счетные графы второго проективного класса, не порожденные счетным множеством проективных функций

Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России

В. Г. Кановей и В. А. Любецкий

Кановей Владимир Григорьевич (ORCID 0000-0001-7415-9784)
ИППИ РАН, главный научный сотрудник,
127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1.

Любецкий Василий Александрович (ORCID 0000-0002-3739-9161)
ИППИ РАН, заведующий лабораторией,
127051, г. Москва, Большой Каретный переулок, д.19 стр. 1.

kanovei@iitp.ru и lyubetsk@iitp.ru

Аннотация

Для решения проблемы Реттиха и Серафина, представлена модель теории множеств, в которой существует локально счетный граф второго проективного Пи-класса, на вещественных числах, который не порождается счетным семейством проективных (и даже вещественно-ординально определимых, кратко ROD) функций. Также доказано, что граф взаимной конструктивности на вещественных числах локально счетен но не порождается счетным семейством ROD функций и имеет ROD хроматическое число, равное континууму, в модели Соловея.

Ключевые слова: граф, второй проективный класс, хроматическое число, модель Соловея.

English summary

To solve the problem of Rettich and Serafin, a model of set theory is presented in which there exists a locally countable graph of the second projective Pi-class, on the real numbers, that is not generated by a countable family of projective (and even real-ordinally definable, briefly ROD) functions. It is also proved that, in the Solovay model, the graph of mutual constructivity on the real numbers is locally countable, but is not generated by a countable family of ROD functions, and has the ROD chromatic number equal to the continuum.

Keywords: graph, second projective class, chromatic number, Solovay model.

1 Введение

Согласно [1, § 2] или [2], граф G *порожден семейством функций* F, для краткости $G = G_F$, если, для любых x, y из области G, выполнено:

$$x\ G\ y \iff \exists\, f \in F\,\big(x = f(y) \vee y = f(x)\big). \qquad (*)$$

Если семейство функций F счетно и каждая функция $f \in F$ относится к типу $\aleph_0 \to 1$ (т. е. прообраз любого элемента конечен или счетен), то граф G_F обязан быть локально счетным, то есть с каждой вершиной инцидентно конечное или счетное множество рёбер. Обратно, с аксиомой выбора легко доказывается, что любой локально счетный граф порождается счетным семейством функций, по необходимости типа $\aleph_0 \to 1$.

Обратная задача становится более сложной в случае, когда требуется определимость порождающих функций в зависимости от определимости данного графа. В частности, как показано в [1, § 2], любой локально счетный *борелевский* граф порождается некоторым счетным семейством *борелевских* же функций. (См. ниже лемму 4.)

Данная работа посвящена задаче порождения графов второго проективного уровня с помощью счетных семейств вещественно-ординально определимых (ROD, для краткости) функций, что включает проективные функции любого класса. Оба наших главных результата (теоремы 1 и 2) утверждают, что такое порождение в определенных ситуациях невозможно. Простая редукция (лемма 3 ниже) позволяет вывести отсюда и невозможность счетной ROD раскраски в тех же случаях.

Для графов класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$, мы доказываем (лемма 6), что любой локально счетный $\mathbf{\Sigma}^1_2$ граф порождается семейством из $\aleph_1$ функций класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$, по необходимости типа $\aleph_0 \to 1$. (Более сильное утверждение о порождении борелевскими функциями приводится без доказательства.) Затем мы рассматриваем Σ^1_2 граф $\mathscr{L}$ взаимной конструктивности на вещественных числах, определенный так:

$$x\ \mathscr{L}\ y \ \ :=\ \ x \neq y \wedge \mathbf{L}[x] = \mathbf{L}[y] \quad - \quad \text{для } x, y \in 2^\omega;$$

т. е. иррефлексивную часть отношения взаимной конструктивности на 2^ω. Его свойства зависят от модели, в которой рассматривается граф $\mathscr{L}$. (См., например, [3, 4] о различных свойствах одного и того же графа в разных теоретико-множественных универсумах.) В частности, в конструктивном универсуме $\mathbf{L}$, любые элементы $x \neq y$ из 2^ω являются $\mathscr{L}$-смежными, и, согласно лемме 7 ниже, $\mathscr{L}$ порождается счетным семейством функций класса Σ^1_2 (не обязательно типа $\aleph_0 \to 1$).

Аналогичный положительный результат также справедлив для некоторых моделей вида $\mathbf{L}[a]$, например, в случае генерических по Саксу точек $a \in 2^\omega$. Однако лемма 10 решает проблему уже *отрицательным* образом для *ординально определимых* счетных семейств функций, порождающих граф $\mathscr{L}$. Длинное доказательство леммы основано на некоторых специфических свойствах форсинга Сакса, а сам результат является ключевым компонентом доказательства следующей теоремы. В ней речь идет о *модели Соловея*, т. е. модели теории **ZFC** + «все ROD множества вещественных чисел измеримы по Лебегу», построенной в [5]. См. § 5 ниже более подробно о построении и свойствах этой модели.

Теорема 1. *В модели Соловея верно, что $\mathscr{L}$ – локально счетный Σ^1_2 граф, не порожденный никаким счетным числом* ROD *функций, и кроме того, $\mathscr{L}$ имеет* ROD*-хроматическое число $\chi_{\mathrm{ROD}}(\mathscr{L}) = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.*

Как обычно в дескриптивной теории множеств, случай графов класса $\mathbf{\Pi}^1_2$ вызывает еще бóльшие трудности. Следующая теорема является нашим вторым основным результатом.

Теорема 2. *Существует модель теории множеств* **ZFC***, в которой имеется локально счетный $\mathit{\Pi}^1_2$ граф G на 2^ω, не порожденный никаким счетным семейством* ROD *функций, и дополнительно, G имеет* ROD*-хроматическое число $\chi_{\mathrm{ROD}}(G) = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.*

Теорема 2 дает положительный ответ на вопрос о существовании такой модели и графа в [2], проблема 3.6. При этом требуемый пример графа будет представлен в специальной форме иррефлексивной части некоторого счетного $\mathit{\Pi}^1_2$ отношения эквивалентности. Доказательство этого результата в § 6 использует модель, построенную в работе [6], в которой существует плоское $\mathit{\Pi}^1_2$ множество со счетными сечениями, не униформизуемое ROD (включая проективные) множествами.

Дополнительные части теорем касаются ROD-хроматических чисел (т.е. тех, которые возникают из ROD раскрасок) рассматриваемых графов, в обоих случаях равных континууму $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$, в то время как классические хроматические числа этих графов не превышают $\aleph_0$ из-за их локальной счетности. Результаты по разделению классических и борелевских хроматических чисел различных графов известны из ряда исследований, о которых см., например, [1, 2, 7, 8, 9] среди других работ, а

также готовящуюся к публикации книгу Кекриса и Маркса по дескриптивной комбинаторике графов[1]. Из более специальных направлений в этой области, в недавней статье [10] предложена новая методика использования форсинга для построения борелевских и аналитических *ориентированных* графов с различными эффектами, связанными с борелевскими хроматическими числами. Еще одно направление, представленное в [11], связано с приложениями аппарата бесконечных игр (детерминированность). *Измеримые по Лебегу* раскраски и соответствующие хроматические числа рассмотрены в сравнении с классическими и борелевскими раскрасками для некоторых графов G в работах [3, 12]. Работы [4, 13, 14] и др. посвящены более общим теоретико-множественным эффектам для хроматических чисел, в частности зависимости от универсума и аксиом выбора.

В этой общей картине, наши результаты открывают новое направление в дескриптивной комбинаторике графов и дают некоторые более сильные результаты, поскольку борелевские отображения составляют лишь малую часть ROD отображений. О важности исследований в этой области см., например, в [2], §§ 4 и 5.

2 Предварительные определения и замечания

Предполагается, что читатель обладает базовыми знаниями в области дескриптивной теории множеств и форсинга. Однако здесь мы должны уточнить несколько специальных понятий.

Дескриптивная теория множеств. Как обычно, мы берем *пространство Бэра* ω^ω в качестве основной области, а также рассматриваем $\omega^\omega \times \omega^\omega$ и т. д., а также *канторов дисконтинуум* $2^\omega \subseteq \omega^\omega$. Элементы ω^ω будем называть просто *точками*, т. к. термин reals, принятый в англоязычной литературе, трудно перевести прямо. Рассматриваются множества $X \subseteq \omega^\omega$, $X \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$, и т. п. – *точечные множества*, и совокупности точечных множеств – *точечные классы*. В частности, такие классы, как $\mathbf{\Delta}^1_1$ (все борелевские множества), $\mathbf{\Sigma}^1_1$ (аналитические или суслинские множества), $\mathbf{\Pi}^1_1$ (коаналитические или ко-суслинские множества), $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_1$ (проективные классы), $\mathbf{\Sigma}^1_\infty = \mathbf{\Pi}^1_\infty$ (все проективные множества), систематически изучаются в дескриптивной теории множеств (см., например,

[1] A. S. Kechris and A. S. Marks, *Descriptive graph combinatorics*, Preliminary version, 2020, `https://math.berkeley.edu/~marks/papers/combinatorics20book.pdf`.

книгу [15] или [16], главы $11, 25, 32$).

Ординальная пределимость. Такие классы, как OD (т. е. ординально-определимые множества), $\mathrm{OD}(P)$ (элементы $p \in P$ допускаются в качестве параметров определений наряду с ординалами) и $\mathrm{ROD} = \mathrm{OD}(\omega^\omega)$ (вещественно-ординально определимые множества) рассматриваются в более абстрактных разделах теории множеств. См. [16], глава 13 или [5] относительно множеств из OD и ROD.

Кортежи. Через $2^{<\omega}$ обозначается множество всех (конечных) *кортежей* чисел 0 и 1, включая пустой кортеж $\langle\rangle$. *Длина* кортежа $s \in 2^{<\omega}$ обозначается $\mathtt{lh}\, s$. Если $s \in 2^{<\omega}$ и $j = 0, 1$ то $s^\frown j \in 2^{<\omega}$ получается присоединением j как самого правого члена к s. При этом $s \subset t$ означает, что кортеж t есть собственное продолжение кортежа s.

Деревья и совершенные множества. Множество $T \subseteq 2^{<\omega}$ называется *деревом*, если 1) $s \subset t \in T \implies s \in T$, и 2) $s \in T \implies \exists\, j\, (s^\frown j \in T)$, и *совершенным* деревом, если дополнительно

$$\forall\, s \in T\, \exists\, t \in T\, \exists\, j \neq i \in \{0,1\}\, (t^\frown i \in T \wedge t^\frown j \in T).$$

Тогда $[T] = \{x \in 2^\omega : \forall\, m\, (x \restriction m \in T)\}$ – совершенное множество в 2^ω.

Графом называется любое множество G упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$, *симметричное* ($x\ G\ y \iff y\ G\ x$) и *иррефлексивное* ($x\ G\ y \implies x \neq y$). Здесь и далее $x\ G\ y$ – это сокращение для $\langle x, y\rangle \in G$. Мы будем рассматривать графы $G \subseteq P \times P$, где P – пространство вида $(\omega^\omega)^n$, в частности, просто $P = \omega^\omega$ или даже $P = 2^\omega \subseteq \omega^\omega$. В этом случае, говорят, что граф G принадлежит какому-то классу K (скажем, $K = \mathbf{\Delta}^1_1 =$ борелевские множества), если G принадлежит классу K как множество в $P \times P$. В частности, борелевский граф G означает, что G является борелевским множеством в $P \times P$.

Элементы множества $|G| = \{x : \exists\, y\, (x\ G\ y)\}$ – *вершины* графа G, а пары в G – его *ребра*. *Связной компонентой* графа G называется любой класс эквивалентности *отношения G-связности* на $|G|$: $x\ \mathsf{E}_G\ y$, когда существует цепочка $x = x_1\ G\ x_2\ G \ldots G\ x_n = y$ (здесь $x = y$ при $n = 1$).

Граф G называется *локально счетным*, если для любой вершины $x \in |G|$ множество $\{y : x\ G\ y\}$ всех *смежных* вершин не более чем счетно. Это равносильно счетности каждой связной компоненты G.

Порожденные графы. Понятие графа $G = G_F$, *порожденного семейством функций* F, основанное на соотношении $(*)$, было дано в § 1. Здесь

мы предполагаем, что каждая $f \in F$ является функцией $f : \mathtt{dom}\, f \subseteq |G| \to |G|$, равенство $\mathtt{dom}\, f = |G|$ не предполагается по умолчанию, а равенство $y = f(x)$ означает $x \in \mathtt{dom}\, f \wedge y = f(x)$.

Хроматические числа. Наряду с обычными хроматическими числами $\chi(G)$, ROD-*хроматическим числом* $\chi_{\text{ROD}}(G)$ графа G называется наименьшая возможная мощность множества $\mathtt{ran}\, c$, где $c : |G| \to 2^\omega$ есть ROD-раскраска графа G. (Это означает, что c является раскраской в классическом смысле, и одновременно ROD-отображением.) *Борелевские* хроматические числа $\chi_{\text{BOR}}(G)$ определяются аналогично. Тогда:

$$\chi(G) \leq \chi_{\text{ROD}}(G) \leq \chi_{\text{BOR}}(G) \leq \mathfrak{c}. \qquad (\dagger)$$

3 Некоторые результаты

Здесь мы изложим несколько простых лемм, которые (кроме леммы 3), хотя прямо и не используются в доказательствах теорем 1 и 2 – наших главных результатов, но содержат некоторые ограничения, позволяющие лучше оценить содержание наших теорем.

Лемма 3. *Если граф $G \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ имеет счетную* ROD-*раскраску и является иррефлексивной частью* ROD-*отношения эквивалентности на 2^ω то G порожден счетным семейством* ROD-*функций типа $\aleph_0 \to 1$.*

Аналогично для борелевских графов, счетных борелевских раскрасок, и счетных семейств борелевских функций типа $\aleph_0 \to 1$.

Доказательство. Имея ROD-раскраску $c : |G| \to \omega$, пусть $x \in |G|$. Множество $G(x) = \{y : x\ G\ y\}$ всех G-соседей элемента x по условию состоит из попарно G-связанных элементов, а потому функция раскраски c биективна на $G(x)$ а само $G(x)$ не более чем счетно. Поэтому множество $U_x = \{c(y) : x\ G\ y\} \subseteq \omega$ имеет вид

$$\begin{aligned} U_x &= \{m_0(x) < m_1(x) < m_2(x) < \dots\}, \quad \text{или} \\ U_x &= \{m_0(x) < m_1(x) < \dots < m_k(x) = m_{k+1}(x) = m_{k+2}(x) = \dots\}. \end{aligned}$$

Это позволяет определить $f_j(x) = y_j$, где $y_j \in G(x)$ – единственная точка, для которой $c(y_j) = m_j(x)$. Тогда каждая $f_j : |G| \to |G|$ является ROD-отображением, и легко видеть, что граф G порождается семейством $F = \{f_j : j < \omega\}$. $\square$

Следующие две леммы касаются борелевских графов.

Лемма 4. *Любой локально счетный борелевский граф G порожден счетным семейством F борелевских функций.*

Доказательство. Пусть $G \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$. Геометрически, G – борелевское множество со счетными вертикальными сечениями. Однако по теореме Лузина – П. С. Новикова [15] проекция любого борелевского множества со счетными сечениями сама есть борелевское множество, так что область графа G, она же проекция $|G| = \{x : \exists\, y\, (x\ G\ y)\}$ множества G – борелевское множество, и 2) $G = \bigcup_n f_n$ является счетным объединением *униформных* борелевских множеств f_n, т. е. в сущности графиков борелевских функций, с той же областью определения (т. е. проекцией) $\mathtt{dom}\, f_n = |G|$. Остается положить $F = \{f_n : n < \omega\}$. □

Что касается счетных борелевских раскрасок, следующая лемма, вместе с леммой 4, показывают, что импликация леммы 3 для борелевского случая необратима.

Лемма 5. *Существуют локально счетные борелевские графы G, имеющие несчетное борелевское хроматическое число.*

Доказательство. Примеры хорошо известны из [1, 12] и др. Наглядный пример дается *графом Витали* $x\ V\ y$, когда $x \neq y$ и $x - y \in \mathbb{Q}$, на вещественной прямой $\mathbb{R}$. Если предположить, что $c : \mathbb{R} \to \omega$ – счетная борелевская раскраска для V, то все множества $X_n = c^{-1}(n)$ будут борелевскими (частичными) трансверсалями для отношения эквивалентности Витали, следовательно, множествами первой категории (и также и меры 0), что противоречит теореме Бэра поскольку $\mathbb{R} = \bigcup_n X_n$. □

Для графов второго проективного класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$ имеет место следующий результат о порождении семейством из $\aleph_1$ функций. Теорема 1 показывает, что усиление до порождения *счетным* семейством ROD функций (включая все проективные) здесь и невозможно.

Лемма 6. *Любой локально счетный $\mathbf{\Sigma}^1_2$-граф G порождается семейством $F = \{f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ из $\aleph_1$ функций класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$.*

Доказательство. Пусть $G \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ – множество класса $\Sigma^1_2(p_0)$; $p_0 \in 2^\omega$ фиксировано. Если $x \in 2^\omega$, то множество $G(x) = \{y : x\ G\ y\}$ из всех

G-смежных элементов является счетным $\Sigma^1_2(p_0,x)$-множеством, так что $G(x)\subseteq \mathbf{L}[p_0,x]$. Отсюда $G(x)\subseteq\{h(\alpha,p_0,x):\alpha<\omega_1\}$, где $h(\alpha,p,x)$ – это α-й элемент множества $2^\omega\cap\mathbf{L}[p,x]$ в смысле канонического полного упорядочения множества $2^\omega\cap\mathbf{L}[p,x]$ по Гёделю — при $\alpha<\omega_1^{\mathbf{L}[x,p]}$, а если $\omega_1^{\mathbf{L}[x,p]}\leq\alpha<\omega_1$ то к примеру $h(\alpha,p,x)=y$, где $y(k)=0$, $\forall\, k$. Как известно, $h:\omega_1\times 2^\omega\times 2^\omega\to 2^\omega$ является функцией класса $\Delta^{\rm HC}_1$.

Положим $f(\alpha,x)=h(\alpha,p_0,x)$ при выполнении $x\;G\;h(\alpha,p_0,x)$. Таким образом, функция f определена на множестве

$$D=\mathtt{dom}\, f:=\{\langle\alpha,x\rangle\in\omega_1\times 2^\omega : x\;G\;h(\alpha,p_0,x)\},$$

и, согласно сказанному выше, является $\Sigma^{\rm HC}_1(p_0)$-функцией как множество кортежей вида $\{\langle\alpha,x,f(\alpha,x)\rangle:\langle\alpha,x\rangle\in D\}$. Поэтому любая $f_\alpha(x):=f(\alpha,x)$ является $\mathbf{\Sigma}^1_2$-функцией из $D_\alpha=\{x\in 2^\omega:\langle\alpha,x\rangle\in D\}$ в 2^ω. Убедимся, что граф G порожден семейством функций $F=\{f_\alpha:\alpha<\omega_1\}$.

Пусть $x\;G\;y$, так что $y\in G(x)$. Тогда $y=h(\alpha,p_0,x)=f(\alpha,x)=f_\alpha(x)$ для какого-то $\alpha<\omega_1$ по построению. Обратно, пусть $y=f_\alpha(x)=f(\alpha,x)$ для некоторого α; тогда имеем $x\;G\;y$. $\square$

Более тщательный анализ гёделевой конструктивности в области наследственно счетных множеств позволяет усилить результат леммы 6 до порождения семейством из $\aleph_1$ *борелевских* функций, но это выходит за технические рамки настоящей статьи.

И один результат для графа взаимной конструктивности $\mathscr{L}$. Понятно, что в самом конструтивном универсуме $\mathbf{L}$ граф $\mathscr{L}$ полный, т. е. $x\neq y\implies x\;\mathscr{L}\;y$. Так что $\mathscr{L}$ порождается в $\mathbf{L}$, к примеру, (несчетным) семейством всех непрерывных $f:2^\omega\to 2^\omega$, которые нигде не идемпотентны, т. е. $f(x)\neq x$, $\forall\, x$. Однако имеется и счетное порождающее семейство, как показывает следующая лемма. Это контрастирует с нашей теоремой 1, согласно которой в модели Соловея счетного порождающего семейства ROD функций для $\mathscr{L}$ не существует.

Лемма 7. *В конструктивном универсуме* $\mathbf{L}$ *верно, что* Σ^1_2*-граф* $\mathscr{L}$ *порождается счетным семейством* $F=\{f_n:n<\omega\}$ *функций класса* Σ^1_2*, и имеет хроматическое число* $\chi(\mathscr{L})=\mathfrak{c}=\aleph_1$.

Доказательство. Рассуждая в $\mathbf{L}$, используем полное упорядочение $<_{\mathbf{L}}$ класса $\mathbf{L}$ по Гёделю. Если $x\in 2^\omega$ то через $\{h(n,x):n<\omega\}$ обозначим $<_{\mathbf{L}}$-наименьшее перечисление множества $\{y\in 2^\omega : y<_{\mathbf{L}}x\}$. Поло-

жим $f_n(x) := h(n,x)$. Отдельно для $<_{\mathbf{L}}$-наименьшей точки $x_0 \in 2^\omega$ пусть $f_n(x_0) := x_1$, где $x_1 \in 2^\omega$ является $<_{\mathbf{L}}$-следующей точкой. $\square$

4 Граф взаимной конструктивности в модели Сакса

Мы рассматриваем здесь Σ^1_2-граф взаимной конструктивности $x \mathrel{\mathscr{L}} y$, если $x \neq y$ но $\mathbf{L}[x] = \mathbf{L}[y]$ на 2^ω. Лемма 10 ниже содержит довольно сложный отрицательный результат для генерических расширений по Саксу, который будет использован в доказательстве теоремы 1.

Напомним, что форсинг Сакса $\mathbb{S}_z \in \mathbf{L}[z]$ для какой-нибудь модели вида $\mathbf{L}[z]$ состоит из всех совершенных деревьев $T \in \mathbf{L}[z]$, $T \subseteq 2^{<\omega}$, причем меньшее дерево является более сильным вынуждающим условием. Форсинг Сакса $\mathbb{S}_z$ присоединяет к $\mathbf{L}[z]$ *генерическую по Саксу точку* $a \in 2^\omega$. Ниже мы будем использовать следующие хорошо известные свойства форсинга Сакса, о которых см., например, [17] или [16], гл. 15.

Предложение 8. *Пусть $z_0 \in 2^\omega$. Тогда*:

(i) *форсинг $\mathbb{S}_{z_0}$ сохраняет $\mathbf{L}[z_0]$-несчетность, т. е. если точка $a \in 2^\omega$ является $\mathbb{S}_{z_0}$-генерической над $\mathbf{L}[z_0]$, то $\omega_1^{\mathbf{L}[z_0]} = \omega_1^{\mathbf{L}[z_0,a]}$;*

(ii) *если точка $a \in 2^\omega$ является $\mathbb{S}_{z_0}$-генерической над $\mathbf{L}[z_0]$, и $b \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[z_0,a]$, то либо $b \in \mathbf{L}[z_0]$ либо же $a \in \mathbf{L}[z_0,b]$ и в этом случае точка b также является $\mathbb{S}_{z_0}$-генерической над $\mathbf{L}[z_0]$;*

(iii) *форсинг $\mathbb{S}_{z_0}$ однороден, т. е. если $S,T \in \mathbb{S}_{z_0}$, то «конусы» $K_S = \{S' \in \mathbb{S}_{z_0} : S' \subseteq S\}$ и K_T $\subseteq$-изоморфны в $\mathbf{L}[z_0]$;*

(iv) *как стандартное следствие* (iii)*, если такое-то $S \in \mathbb{S}_{z_0}$ вынуждает, над $\mathbf{L}[z_0]$, замкнутую формулу Φ с параметрами только из $\mathbf{L}[z_0]$, то любое другое дерево $T \in \mathbb{S}_{z_0}$ также вынуждает Φ.* $\square$

Лемма 9. *Пусть $z_0 \in 2^\omega$, $U \in \mathbf{L}[z_0]$, $U \subseteq 2^{<\omega}$ – совершенное дерево, а точка $a \in [U]$ $\mathbb{S}_{z_0}$-генерическая над $\mathbf{L}[z_0]$. Тогда множество X_U всех точек $x \in [U] \cap \mathbf{L}[z_0,a]$, $\mathbb{S}_{z_0}$-генерических над $\mathbf{L}[z_0]$, несчетно в $\mathbf{L}[z_0,a]$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что множество $Y_U = [U] \setminus \mathbf{L}[z_0]$ несчетно, поскольку $X_U = Y_U$ согласно пункту (ii) предложения 8.

Сначала рассмотрим случай когда просто $U = U_0 = 2^{<\omega}$, т. е. $[U_0] = 2^\omega$. Обозначим через $\cdot$ покомпонентное сложение точек в 2^ω $\bmod 2$. Раз

$a \notin \mathbf{L}[z_0]$ по генеричности, множество $C = \{x \cdot a : x \in 2^\omega\} \cap \mathbf{L}[z_0]$ удовлетворяет $C \subseteq Y_{U_0}$ и несчетно в $\mathbf{L}[z_0, a]$ согласно пункту (i) предложения 8, откуда и следует результат.

Теперь рассматриваем случай произвольного совершенного дерева $U \in \mathbf{L}[z_0]$. Простое топологическое рассуждение в $\mathbf{L}[z_0, a]$ приносит гомеоморфизм $H : [U] \xrightarrow{\text{на}} [U_0] = 2^\omega$, имеющий код в модели $\mathbf{L}[z_0]$ в том смысле, что если $x \in [U]$ то $x \in \mathbf{L}[z_0] \iff H(x) \in \mathbf{L}[z_0]$. Отсюда следует равенство $Y_U = H^{-1}(Y_{U_0})$. Остается сослаться на первую часть доказательства. $\square$

Лемма 10. *Предположим, что $z_0 \in 2^\omega$, и $a_0 \in 2^\omega$ является генерической по Саксу точкой над $\mathbf{L}[z_0]$. Пусть, в $\mathbf{L}[z_0, a_0]$, $F = \langle f_n \rangle_{n<\omega}$ есть последовательность класса определимости $\mathrm{OD}(\{z_0\})$ функций $f_n : 2^\omega \to 2^\omega$. Тогда, в $\mathbf{L}[z_0, a_0]$, граф $\mathscr{L}$ не порождается семейством F.*

Требование для всей последовательности $F = \langle f_n \rangle_{n<\omega}$ можно было бы ослабить до требования $\mathrm{OD}(\{z_0\})$ для каждой из функций f_n с сохранением конечного результата леммы но с более сложными выкладками. Мы этого не будем делать, поскольку и в данной форме лемма 10 позволит завершить доказательство теоремы 1 ниже в § 5.

Доказательство. Предположим, что напротив, семейство F порождает $\mathscr{L}$ в $\mathbf{L}[z_0, a_0]$. Все утверждения о форсинге ниже в ходе доказательства леммы относятся только к форсингу $\mathbb{S}_{z_0}$ над $\mathbf{L}[z_0]$.

Если $x, y \in \omega^\omega$, то через $x^*y \in \omega^\omega$ обозначим пошаговую конкатенацию: $(x^*y)(2k) = x(k)$ и $(x^*y)(2k+1) = y(k)$, $\forall\, k$. Рассмотрим дерево

$$T_0 = \{s \in 2^{<\omega} : \forall\, n = 2k < \mathtt{lh}\, s\, (s(2k) = z_0(k))\} \in \mathbb{S}_{z_0}\,,$$

так что $[T_0] = \{{z_0}^* y : y \in 2^\omega\}$.

В наших предположениях, существует формула $\varphi(n, x, y)$ с параметрами z_0 и некоторыми $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathsf{Ord}$, которые явно не указаны, такая, что в $\mathbf{L}[z_0, a_0]$ выполнено: $f_n = \{\langle x, y\rangle : \varphi(n, x, y)\}$ для каждого n. Пусть $\widehat{f}_n$ будет сокращением для $\{\langle x, y\rangle : \varphi(n, x, y)\}$. Тогда следующее предложение выполнено в $\mathbf{L}[z_0, a_0]$ в соответствии с вышеизложенным:

$$\Phi \quad := \quad \forall\, n\, (\widehat{f}_n : 2^\omega \to 2^\omega) \text{ исемейство } \{\widehat{f}_n : n < \omega\} \text{ порождает } \mathscr{L}.$$

Из этого следует, что любое дерево в $\mathbb{S}_{z_0}$, в частности введенное выше T_0, вынуждает Φ над $\mathbf{L}[z_0]$ – согласно пункту (iv) предложения 8.

Теперь **мы рассуждаем в** $\mathbf{L}[z_0]$. Пусть $\underline{a}$ – каноническое $\mathbb{S}_{z_0}$-имя для главной генерической по Саксу точки в 2^ω. Утверждается, что

(A) если $T \in \mathbb{S}_{z_0}$, $T \subseteq T_0$ и $n < \omega$, то существуют деревья $T', T'' \in \mathbb{S}_{z_0}$, $T', T'' \subseteq T$, и числа k и $j' \neq j''$ такие, что T' вынуждает $\widehat{f}_n(\underline{a})(k) = j'$ и T'' вынуждает $\widehat{f}_n(\underline{a})(k) = j''$ над $\mathbf{L}[z_0]$.

В самом деле, предположим обратное, и пусть $T \in \mathbb{S}_{z_0}$ является контрпримером. Тогда существует точка $y \in \mathbf{L}[z_0] \cap 2^\omega$, для которой T вынуждает $\widehat{f}_n(\underline{a}) = y$ над $\mathbf{L}[z_0]$. Мы знаем, что a_0 – точка генерическая по Саксу над $\mathbf{L}[z_0]$. Отсюда следует, что существует и генерическая по Саксу точка $a \in [T]$ над $\mathbf{L}[z_0]$ – согласно пункту (iii) предложения 8. Тогда мы имеем $\widehat{f}_n(a) = y$ по генеричности, и, следовательно, $a \mathrel{\mathscr{L}} y$ выполняется в $\mathbf{L}[z_0, a]$, потому что T_0 вынуждает Φ.

Однако $y \in \mathbf{L}[z_0]$, тогда как $a \notin \mathbf{L}[z_0]$ по генеричности. Следовательно, $\mathbf{L}[a] = \mathbf{L}[y]$ определенно невозможно. Это противоречие с определением $\mathscr{L}$ завершает доказательство утверждения (A).

Следующее утверждение является простым следствием из (A):

(B) если $S, T \in \mathbb{S}_{z_0}$, $S, T \subseteq T_0$ и $n < \omega$, то существуют деревья $S', T' \in \mathbb{S}_{z_0}$, $S' \subseteq S$, $T' \subseteq T$, и числа k и $j \neq i$ такие, что S' вынуждает $\widehat{f}_n(\underline{a})(k) = i$ и T' вынуждает $\widehat{f}_n(\underline{a})(k) = j$ над $\mathbf{L}[z_0]$.

Теперь, **по-прежнему рассуждая в** $\mathbf{L}[z_0]$, мы докажем следующее:

(C) В $\mathbf{L}[z_0]$ существует система деревьев U_s и кортежей r_s, где $s \in 2^{<\omega}$, а также кортежей ϑ^n_s, где $s \in 2^{<\omega}$ и $n < \mathtt{lh}\, s$, удовлетворяющая следующим условиям (1)–(6):

(1) $U_s \in \mathbb{S}_{z_0}$, $U_s \subseteq T_0$, $r_s \in U_s$, $\vartheta^n_s \in 2^{<\omega}$;

(2) если $s \in 2^{<\omega}$ и $n < \mathtt{lh}\, s$, то $\mathtt{lh}\, \vartheta^n_s \geq \mathtt{lh}\, s$;

(3) если $s \in 2^{<\omega}$, то $\mathtt{lh}\, r_s \geq \mathtt{lh}\, s$ и кортеж r_s является $\subseteq$-сравнимым с каждым $t \in U_s$ (т. е. $r_s \subseteq t$ или $t \subseteq r_s$);

(4) если кортежи $s \subset t$ принадлежат $2^{<\omega}$ и $n < \mathtt{lh}\, s$, то $r_s \subset r_t$, $U_t \subseteq U_s$, $\vartheta^n_s \subset \vartheta^n_t$;

(5) если $s \neq t \in 2^{<\omega}$ и $n < \mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t$, то кортежи r_s и r_t являются $\subseteq$-несравнимыми (т. е. $r_s \not\subseteq r_t$ и $r_t \not\subseteq r_s$), и ϑ^n_s, ϑ^n_t также являются $\subseteq$-несравнимыми;

(6) если $s \in 2^{<\omega}$ и $n < \mathtt{lh}\, s$, то U_s вынуждает $\vartheta_s^n \subset \widehat{f}_n(\underline{a})$ над $\mathbf{L}[z_0]$.

Построение для (C) **проходит в** $\mathbf{L}[z_0]$ индукцией по длине $\mathtt{lh}\, s$.

Мы полагаем $U_{\langle\rangle} = T_0$ и $r_{\langle\rangle} = \langle\rangle$, где $\langle\rangle \in 2^{<\omega}$ – пустой кортеж, а совершенное дерево $T_0 \in \mathbb{S}_{z_0}$ было выбрано выше.

Теперь предположим, что $m < \omega$, и U_s, r_s, ϑ_s^n были определены для всех $s \in 2^m$ (двоичных кортежей длины m) и $n < m$ и удовлетворяют условиям (1)–(6).

Шаг 1. Делаем следующее для всех $s \in 2^m$. Пусть $\rho_s = \mathtt{root}(U_s)$ – наибольший кортеж $\rho \in U_s$, $\subseteq$-сравнимый с каждым $u \in U_s$; тогда $r_s \subseteq \rho_s$ по (3). Для $i = 0, 1$ определим

$$r_{s^\frown i} = \rho_s{}^\frown i \quad \text{и} \quad \widetilde{U}_{s^\frown i} = \{u \in U_s : u \subseteq r_{s^\frown i} \vee r_{s^\frown i} \subset u\}.$$

Таким образом, кортежи r_σ, $\widetilde{U}_\sigma$ определены для всех $\sigma \in 2^{m+1}$. Значения r_σ являются окончательными, в то время как деревья $\widetilde{U}_\sigma$ являются временными; они будут сокращены на следующих шагах. Заметим, что соответствующие части (1),(3),(4),(5) сохраняются при переходе на уровень $m+1$ с уровня m, и также будут сохраняться после любого сокращения деревьев $\widetilde{U}_\sigma$ в области $\mathbb{S}_{z_0}$.

Шаг 2. Выполняем следующие действия для всех троек из $s \in 2^m$, $i = 0, 1$, $n \leq m$, по очереди.

Положим $\sigma = s^\frown i$. Определим временный кортеж $\widetilde{\vartheta}_\sigma^n$ так. Напомним, что T_0 вынуждает Φ, следовательно, то же самое верно для $\widetilde{U}_\sigma$. в частности, $\widetilde{U}_\sigma$ вынуждает $\widehat{f}_n : 2^\omega \to 2^\omega$. Значит, существует дерево $U \in \mathbb{S}_{z_0}$, $U \subseteq \widetilde{U}_\sigma$ и кортеж $\vartheta \in 2^{<\omega}$ с $\mathtt{lh}\, \vartheta > m$ и, если $n < m$ строго (т. е. кортеж ϑ_s^n определен) то $\mathtt{lh}\, \vartheta_s^n < \mathtt{lh}\, \vartheta$, и, кроме того, U вынуждает $\vartheta \subset \widehat{f}_n(\underline{a})$. Пусть $\widetilde{\vartheta}_\sigma^n$ будет одним из таких ϑ, а связанное с ним дерево U будет «новым» значением $\widetilde{U}_\sigma$.

Это определение, очевидно, выполняет (2), последнее утверждение из (4), и также (6).

Шаг 3. Чтобы обеспечить (5), делаем следующее для всех троек из числа $n \leq m$ и кортежей $\sigma \neq \tau$ в 2^{m+1}.

Рассуждая, как описано выше (шаг 2), и используя (B), мы находим деревья $U, U' \in \mathbb{S}_{z_0}$, $U \subseteq \widetilde{U}_\sigma$, $U' \subseteq \widetilde{U}_\tau$, и кортежи $\vartheta, \vartheta' \in 2^{<\omega}$ с $\widetilde{\vartheta}_\sigma^n \subset \vartheta$ и $\widetilde{\vartheta}_\tau^n \subset \vartheta'$, такие, что U вынуждает $\vartheta \subset \widehat{f}_n(\underline{a})$, U' вынуждает $\vartheta' \subset \widehat{f}_n(\underline{a})$, и (вот где работает (B)!) для некоторых $k < \mathtt{lh}\, \vartheta, \mathtt{lh}\, \vartheta'$ и $i \neq j$ мы имеем $\vartheta(k) = i$ и $\vartheta'(k) = j$.

Последнее условие влечет $\subseteq$-несравнимость кортежей ϑ, ϑ'.

Пусть ϑ будет «новым» $\widetilde{\vartheta}^n_\sigma$, ϑ' будет «новым» $\widetilde{\vartheta}^n_\tau$, U будет «новым» $\widetilde{U}_\sigma$, U' будет «новым» $\widetilde{U}_\tau$.

Переходим к следующей тройке из $n \leq m$ и $\sigma \neq \tau$ в 2^{m+1}. И т. д.

Шаг 3 – завершение. После обработки всех троек из $n \leq m$ и кортежей $\sigma \neq \tau$ в 2^{m+1}, мы определяем U_σ как последнее дерево $\widetilde{U}_\sigma$, и пусть ϑ^n_σ будет как последним кортежем $\widetilde{\vartheta}^n_\sigma$ — для всех $n \leq m$ и $\sigma \in 2^{m+1}$.

Шаг 4 – заключение. Нетрудно заметить, что эта конструкция дает систему деревьев U_s и кортежей r_s, vt^n_s удовлетворяющих условиям (1)–(6). На этом доказательство утверждения (C) заканчивается.

Для использования построенной системы (C), мы, **продолжая рассуждать в $\mathbf{L}[z_0]$**, рассмотрим дерево

$$U = \{r \in 2^{<\omega} : \exists\, s \in 2^{<\omega} (r \subseteq r_s)\};\ \text{тогда } U \subseteq U_{\langle\rangle} \subseteq T_0 \text{ по построению.}$$

Это дерево U – совершенное согласно (5) (по отношению к r_s, r_t). Кроме того, $U \in \mathbf{L}[z_0]$, поскольку построение системы кортежей r_s выполнено в $\mathbf{L}[z_0]$. Значит, $U \in \mathbb{S}_{z_0}$. Докажем два утверждения в связи с этим U.

(D) $\mathbb{S}_{z_0}$ вынуждает, над $\mathbf{L}[z_0]$, что «каждая функция $\widehat{f}_n$ является 1–1 на множестве X_U всех точек $x \in [U]$, $\mathbb{S}_{z_0}$-генерических над $\mathbf{L}[z_0]$».

В самом деле, **рассуждая в $\mathbb{S}_{z_0}$-генерическом расширении $\mathbf{L}[z_0, a]$ класса $\mathbf{L}[z_0]$**, рассмотрим любое $n < \omega$ и любую пару точек $x \neq y$ из X_U. По определению U и согласно (3) мы имеем $[U] = \bigcap_m \bigcup_{s \in 2^m} [U_s]$. Раз $x \neq y$, существуют число $m > n$ и кортежи $s \neq t$ in 2^m, для которых $x \in [U_s]$ и $y \in [U_t]$. Тогда кортежи ϑ^n_s и ϑ^n_t $\subseteq$-несравнимы согласно (5). С другой стороны, из (6) следует, что $\vartheta^n_s \subset f_n(x)$ и $\vartheta^n_t \subset f_n(y)$. Мы заключаем, что $f_n(x) \neq f_n(y)$, что и требовалось.

(E) $\mathbb{S}_{z_0}$ вынуждает, над $\mathbf{L}[z_0]$, что «(a) множество X_U из (D) несчетно, и (b) X_U состоит из попарно $\mathscr{L}$-смежных точек».

Действительно, пункт (a) немедленно следует из леммы 9.

Чтобы доказать (b), отметим, что если точки $x, y \in 2^\omega$ являются $\mathbb{S}_{z_0}$ генерическими над $\mathbf{L}[z_0]$, то $\mathbf{L}[z_0, x] = \mathbf{L}[z_0, y]$ согласно пункту (ii) предложения 8. Однако по построению $U \subseteq T_0$ и, следовательно, любая точка $z \in [U]$ удовлетворяет $z_0 \in \mathbf{L}[z]$. Следовательно, равенство

$\mathbf{L}]z_0, x] = \mathbf{L}[z_0, y]$ влечет $\mathbf{L}[x] = \mathbf{L}[y]$, а значит и $x \mathscr{L} y$, при условии что точки $x \neq y$ принадлежат $[U]$, что и требовалось.

Таким образом, мы заключаем на основании утверждений (D) и (E), что в модели $\mathbf{L}[z_0, a_0]$ леммы 10 выполнено: множество $X \subseteq 2^\omega$ несчетно и состоит из $\mathscr{L}$-смежных элементов, причем каждая функция f_n является 1–1 на X. Следовательно, если $x_0 \in X$ фиксировано, то любая точка $x \neq x_0$ в X удовлетворяет $x = f_n(x_0)$ или $x_0 = f_n(x)$ для какого-то n. Это означает, что множество X является счетным из-за инъективности каждой функции f_n на X. Полученное противоречие с несчетностью множества X завершает доказательство леммы 10. □

5 Граф взаимной конструктивности в модели Соловея

Здесь мы докажем теорему 1. Следующее определение уточняет ту форму модели Соловея, с которой мы имеем дело в этой теореме.

Определение 11. Пусть $\Omega \in \mathbf{L}$ – недостижимый кардинал в классе $\mathbf{L}$ всех конструктивных множеств. Следуя [5], [16], гл. 26, или [18], гл. 8], мы рассматриваем $\mathsf{Coll}(\omega, <\Omega)$-генерическое расширение $\mathfrak{N}$ класса $\mathbf{L}$ по Леви – Соловею; это модель теории **ZFC**. □

В следующем предложении представлено несколько хорошо известных свойства модели Соловея, которые мы будем использовать при доказательстве теоремы 1 ниже.

Предложение 12 (см. [5, 16, 18, 19, 20]) *Следующие утверждения выполнены в модели $\mathfrak{N}$ определения 11*:

(i) *если множества $X_0, X_1, X_2, \ldots$ вещественно-ординально определимы* (для краткости: ROD)*, то последовательность $\langle X_k \rangle_{k<\omega}$ также принадлежит* ROD;

(ii) *если $z \in 2^\omega$ и множество $X \subseteq \mathbf{L}[z]$ является* $\mathrm{OD}(\{z\})$ (ординально определимо с дополнительным параметром z) *то $X \in \mathbf{L}[z]$*;

(iii) *если $a \in 2^\omega$ и* $\mathrm{OD}(\{a\})$ *множество $X \subseteq \omega^\omega$ счетно то $X \in \mathbf{L}[a]$*;

(iv) *если $z, a \in 2^\omega$ и множество $X \subseteq \omega^\omega$ есть* $\mathrm{OD}(\{z\})$ *то множество $X' = X \cap \mathbf{L}[z, a]$ принадлежит $\mathbf{L}[z, a]$ и является* $\mathrm{OD}(\{z\})$ *в $\mathbf{L}[z, a]$*;

(v) *если* $X \subseteq 2^\omega$ *есть* ROD*, то либо* X *не более чем счетно, либо* X *содержит совершенное подмножество, и тогда* X *имеет мощность континуума* $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$;

(vi) *если* $z \in 2^\omega$ *то множество* $\mathbf{L}[z] \cap 2^\omega$ *счетно* (*в модели* $\mathfrak{N}$). $\square$

Доказательство теоремы 1. Мы пропускаем хорошо известные части теоремы. В частности, локальная счетность графа следует из предложения 12(vi). Сосредоточимся на ключевом утверждении о счетной непорожденности графа $\mathscr{L}$. *Мы рассуждаем в модели* $\mathfrak{N}$ *определения 11.*

Предположим противное: данный граф $\mathscr{L}$ порожден семейством $F = \{f_n : n < \omega\}$ произвольных ROD функций $f_n : 2^\omega \to 2^\omega$. (Если какая-то f_n с самого начала имеет $\mathtt{dom}\, f_n = D \subsetneqq 2^\omega$, то мы продолжаем ее через $f_n(x) = x^-$ для $x \notin D$, где $x^-(k) = 1 - x(k)$ для всех k.)

Заметим, что вся последовательность $S = \langle f_n \rangle_{n<\omega}$ является ROD (в модели $\mathfrak{N}$) по предложению 12(i), следовательно, существует точка $z_0 \in 2^\omega$, для которой S будет $\mathrm{OD}(\{z_0\})$. Зафиксируем такую z_0.

Продолжая рассуждать в $\mathfrak{N}$, фиксируем точку $a_0 \in 2^\omega$, генерическую по Саксу над $\mathbf{L}[z_0]$. Согласно пункту (iv) предложения 12, каждая функция $f'_n = f_n \cap \mathbf{L}[z_0, a_0]$ принадлежит $\mathbf{L}[z_0, a_0]$ и является $\mathrm{OD}(\{z_0\})$ в $\mathbf{L}[z_0, a_0]$. Более того, вся последовательность $S' = \langle f'_n \rangle_{n<\omega}$ принадлежит $\mathbf{L}[z_0, a_0]$ и является $\mathrm{OD}(\{z_0\})$ в $\mathbf{L}[z_0, a_0]$.

С другой стороны, если $x \in \mathbf{L}[z_0, a_0] \cap 2^\omega$, то $f_n(x) \in \mathbf{L}[z_0, a_0]$ и $f_n^{-1}(x) \subseteq \mathbf{L}[z_0, a_0]$ (так как прообраз $f_n^{-1}(x)$ должен быть счетным) согласно соответственно пунктам (ii) и (iii) предложения 12. Отсюда следует, что $f'_n = f_n \restriction (2^\omega \cap \mathbf{L}[z_0, a_0])$, а потому в модели $\mathbf{L}[z_0, a_0]$ истинно, что $\mathrm{OD}(z_0)$-последовательность S' порождает $\mathscr{L}$. Но это противоречит лемме 10! Этим вывод основного утверждения теоремы 1 закончен.

Для доказательства дополнительного утверждения теоремы 1, достаточно сослаться на лемму 3, которая применима к графу $\mathscr{L}$ поскольку тот по определению является иррефлексивной частью отношения эквивалентности по взаимной конструктивности. Именно, по уже доказанному и лемме 3, граф $\mathscr{L}$ не имеет счетной ROD-раскраски в $\mathfrak{N}$. Значит, $\chi_{\mathrm{ROD}}(\mathscr{L}) \geq \aleph_1$. Однако известно, что $\mathfrak{c} = \aleph_1$ в модели Соловея $\mathfrak{N}$. $\square$

6 Пример счетно-непорожденного $\mathbf{\Pi}^1_2$ графа

Доказательство теоремы 2 использует модель теории множеств, ранее построенную в [6], в которой существует ROD-неуниформизуемое плос-

кое Π^1_2-множество со счетными вертикальными сечениями. Для удобства читателя мы приводим здесь эту конструкцию, не вдаваясь в технические подробности, а затем показываем, как преобразовать ее в пример для теоремы 2 в той же модели.

Начиная с $\mathbf{L}$ в качестве исходной модели, мы определили в [6], § 9 последовательность $\langle \mathbb{P}_\xi \rangle_{\xi<\omega_1} \in \mathbf{L}$ форсингов $\mathbb{P}_\xi$. Каждый из форсингов $\mathbb{P}_\xi$ состоит из совершенных деревьев $T \subseteq 2^{<\omega}$ и близок по структуре и свойствам к минимальному-Δ^1_3-форсингу Йенсена, подробно рассмотренному, например, в [16], § 28.A и в [21].

Затем произведение с конечной поддержкой $\mathbb{P} = \prod_{\xi<\omega_1} \prod_{k<\omega} \mathbb{P}_{\xi k} \in \mathbf{L}$ определено в [6], где каждый множитель $\mathbb{P}_{\xi k}$ тождественен $\mathbb{P}_\xi$. Следующие утверждения в связи с форсингом $\mathbb{P}$ доказаны в [6].

(1) $\mathbb{P}$ имеет свойство CCC в $\mathbf{L}$, и потому сохраняет $\mathbf{L}$-кардиналы;

(2) $\mathbb{P}$ добавляет генерический массив $X = \langle x_{\xi k} \rangle_{\xi<\omega_1,\, k<\omega}$ точек $x_{\xi k} \in 2^\omega$;

(3) каждая точка $x_{\xi k}$ является $\mathbb{P}_\xi$-генерической над $\mathbf{L}$, и обратно, каждая точка $x \in \mathbf{L}[X] \cap 2^\omega$, $\mathbb{P}_\xi$-генерическая над $\mathbf{L}$, совпадает с одной из точек $x_{\xi k}$, $k < \omega$;

(4) бинарное отношение $\mathrm{Gen}(\xi, x) :=$ «$\xi < \omega_1$ и точка $x \in 2^\omega$ является $\mathbb{P}_\xi$-генерической над $\mathbf{L}$» имеет класс Π^{HC}_1 в $\mathbf{L}[X]$, где HC = все наследственно счетные множества;

(5) согласно теории произведений форсингов с конечной поддержкой, если $A \in \mathbf{L}$, $A \subseteq \omega_1 \times \omega$, и $\langle \xi, k \rangle \notin A$, то $x_{\xi k} \notin \mathbf{L}[X \restriction A]$, где $X \restriction A = \langle x_{\xi k} \rangle_{\langle \xi, k \rangle \in A}$; и более того, $x_{\xi k} \notin \mathrm{OD}(X \restriction A)$ в $\mathbf{L}[X]$.

Эти свойства $\mathbb{P}$-генерических моделей $\mathbf{L}[X]$ были использованы в [6] для доказательства того, что множество $W = \{\langle \xi, x_{\xi k} \rangle : \xi < \omega_1 \wedge k < \omega\}$ является ROD-неуниформизуемым Π^{HC}_1-множеством со счетными сечениями $W_\xi = \{x_{\xi k} : k < \omega\}$ в $\mathbf{L}[X]$.

Как показано в [6], это множество W легко преобразуется в Π^1_2-множество $W' \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ в $\mathbf{L}[X]$ с теми же свойствами. Именно, обозначим через $\mathbf{WO} \subseteq 2^\omega$ стандартное Π^1_1-множество кодов для счетных ординалов, и если $w \in \mathbf{WO}$ то пусть $|w| < \omega_1$ будет тем ординалом, который кодируется посредством w. Тогда, в $\mathbf{L}[X]$, множество

$$W' = \{\langle w, x_{\xi k} \rangle : w \in \mathbf{WO} \wedge |w| = \xi \wedge k < \omega\}$$

оказывается ROD-неуниформизуемым множеством класса Π^1_2 со счетными сечениями.

Похожая конструкция форсинга, однако в виде более простого произведения $\prod_{\xi<\omega_1} \mathbb{P}_\xi$, использована в статье [22] для других целей.

Доказательство теоремы 2. Мы рассуждаем в $\mathbb{P}$-генерической модели $\mathbf{L}[X]$. Если пары $p = \langle w, x_{\xi k}\rangle$ и $q = \langle w', x_{\xi' ,n}\rangle$ принадлежат W' то определим $p\ G\ q$ в случае, когда $w = w'$, $\xi = \xi'$, и $k \neq n$. Таким образом, в модели $\mathbf{L}[X]$ выполнено: G – локально счетный граф класса Π^1_2, множество вершин которого есть $|G| = W'$.

Для доказательства теоремы 2 осталось проверить, что G не порождается счетным семейством $F = \{f_n : n < \omega\}$ ROD функций $f_n : W' \to W'$ в $\mathbf{L}[X]$. *Пусть напротив, граф G порожден таким семейством F.*

Рассуждая в $\mathbf{L}[X]$, для любого n имеется точка $u_n \in 2^\omega$, для которой функция f_n является $\mathrm{OD}(\{u_n\})$. Согласно утверждению (1) выше в этом параграфе, существует счетное множество $A_n \subseteq \omega_1 \times \omega$, вида $A_n = \alpha_n\omega$, $\alpha_n < \omega_1^{\mathbf{L}}$, для которого $u_n \in \mathbf{L}[X \restriction A_n]$. Супремум $\alpha = \bigcup_n \alpha_n$ также удовлетворяет $\alpha < \omega_1^{\mathbf{L}}$ согласно тому же (1), так что множество $A = \alpha \times \omega = \bigcup_n A_n$ принадлежит $\mathbf{L}$ и счетно в $\mathbf{L}$. Возьмем произвольный ординал ξ, $\alpha < \xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$, и любые $k \neq j \in \omega$. Берем код $w \in \mathbf{WO} \cap \mathbf{L}$ с $|w| = \xi$. Соответствующие пары $p = \langle w, x_{\xi k}\rangle$ и $q = \langle w, x_{\xi j}\rangle$ из W' тогда удовлетворяют $p = f_m(q)$ или $q = f_m(p)$ для какого-то m по предположению противного выше.

Пусть, скажем, $p = f_m(q)$. Тогда точка $x_{\xi k}$ есть $\mathrm{OD}(\{w, x_{\xi j}, u_m\})$ в $\mathbf{L}[X]$ ибо f_m есть $\mathrm{OD}(\{u_m\})$. Поэтому $x_{\xi k}$ является $\mathrm{OD}(\{x_{\xi j}, X \restriction A\})$, так как $w \in \mathbf{L}$, а это противоречит утверждению (5) поскольку $\langle \xi, k\rangle \notin A \cup \{\langle \xi, j\rangle\}$. Этим вывод основного утверждения теоремы 2 закончен.

Для доказательства дополнительного утверждения теоремы 2, достаточно сослаться на лемму 3, как в конце доказательства теоремы 1. Равенство $\mathfrak{c} = \aleph_1$ в модели $\mathbf{L}[X]$ выполнено, поскольку соответствующий форсинг $\mathbb{P}$ в статье [6] имеет мощность $\aleph_1$ и свойство счетности антицепей в исходной модели $\mathbf{L}$. □

7 Заключительные замечания

Наша теорема 2 решает в положительном направлении проблему существования локально счетных графов класса Π^1_2 не порождаемых счетными семействами определимых функций. Два отдельных результата

получены для $\mathbf{\Sigma}^1_2$ графов в § 3. Два результата о непорождаемости по Σ^1_2 графу взаимной конструктивности $\mathscr{L}$ (Лемма 10 и теорема 1) получены в §§ 4 и 5. Мы ожидаем, что эти результаты и разработанные методы найдут дальнейшее применение в современных исследованиях в области дескриптивной теории множеств и форсинга.

В заключение мы рассмотрим следующие проблемы, вытекающие из нашего исследования.

Проблема 1. Существует ли локально счетный $\mathbf{\Pi}^1_1$ граф в модели Соловея $\mathfrak{N}$ (как в определении 11), который не порождается никаким счетным семейством ROD функций?[2]

Возможный план решения этой проблемы состоит в следующем. Используя униформизацию Новикова-Кондо-Аддисона, мы начнем с $\mathit{\Pi}^1_1$-множества $U \subseteq (2^\omega)^3$, униформного в смысле $(2^\omega \times 2^\omega) \times 2^\omega$, и такого, что $x \mathscr{L} y \iff \exists\, p\, U(x,y,p)$. Рассмотрим $\mathit{\Pi}^1_1$-граф $\mathcal{H}$ с областью $|\mathcal{H}| \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$, определенный таким образом, что $\langle x,p\rangle \mathcal{H} \langle y,q\rangle$ когда $p = q$ и $U(x,y,p) \vee U(y,x,p)$. (Дизъюнкция введена для симметризации определения по предложению рецензента.) Требуется доказать, что граф $\mathcal{H}$ является локально счетным но не порождается счетным семейством ROD функций в модели Соловея $\mathfrak{N}$. Этого нам пока не удалось.

Проблема 2. Верна ли лемма 10 для точек a_0 генерических по Коэну или случайных по Соловею (или любого другого популярного типа)?

Проблема 3. Найти более простое доказательство теоремы 1, не использующее лемму 10.

Может быть предложено такое рассуждение. *Пусть напротив*, граф $\mathscr{L}$ порожден семейством $F = \{f_n : n < \omega\}$ ROD функций $f_n : 2^\omega \to 2^\omega$ в модели Соловея $\mathfrak{N}$. По общим свойствам модели Соловея, найдется совершенное дерево $T_0 \subseteq 2^{<\omega}$ такое, что все $f_n \restriction [T_0]$ непрерывны. Далее, по свойствам канторова дисконтинуума, найдется совершенное дерево $T \subseteq T_0$ такое, что каждая $f_n \restriction [T]$ – либо 1–1 либо константа. Случай константы отвергается локальной счетностью графа $\mathscr{L}$ в модели Соловея $\mathfrak{N}$, а потому считаем, что все $f_n \restriction [T]$ – инъективны.

Существует точка $z_0 \in 2^\omega$, для которой как T так и подходящая последовательность кодов для непрерывных $f_n \restriction [T]$ принадлежат $\mathbf{L}[z_0]$.

[2] Jason Zesheng Chen сообщил авторам о положительном решении этой проблемы.

Теперь для вывода противоречия как в доказательстве теоремы 1 выше, было бы достаточно найти $\mathbf{L}[z_0]$-несчетное множество $X \subseteq [T]$ из $\mathscr{L}$-связанных элементов, в $\mathbf{L}[z_0]$ или в сохраняющем $\mathbf{L}[z_0]$-несчетность генерическом расширении модели $\mathbf{L}[z_0]$. Это представляется возможным в случае, когда z_0 сохраняет $\mathbf{L}$-несчетность, однако в общем случае остается интересным открытым вопросом.

Проблема 4. Возвращаясь к неравенствам (†) в § 2, можно спросить, существует ли модель теории **ZFC**, в которой каждое неравенство из (†) будет строгим $<$, для $\mathscr{L}$ или какого-нибудь другого графа.

Проблема 5. В свете результатов леммы 7 и теоремы 1, можно спросить, существует ли модель теории **ZFC**, в которой $\chi_{\text{ROD}}(\mathscr{L}) = \aleph_0$.

Для χ_{BOR} этот вопрос скорее всего имеет отрицательный ответ.

Благодарность. Авторы выражают признательность анонимному резензенту за ценные замечания и исправления, несомненно улучшившие качество изложения.

Список литературы

[1] A. S. Kechris, S. Solecki, and S. Todorcevic. Borel chromatic numbers. *Adv. Math.*, 141(1):1–44, 1999.

[2] Adrian Rettich and Luke Serafin. Projective chromatic numbers, 2026. arXiv 2604.21813.

[3] Michael S. Payne. Unit distance graphs with ambiguous chromatic number. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 16(1): article no 31, Nov. 2009.

[4] Assaf Rinot. Same graph, different universe. *Archive for Mathematical Logic*, 56(7):783–796, 2017.

[5] Robert M. Solovay. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. *Ann. Math. (2)*, 92:1–56, 1970.

[6] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Counterexamples to countable-section Π^1_2 uniformization and Π^1_3 separation. *Ann. Pure Appl. Logic*, 167(3):262–283, 2016.

[7] Anton Bernshteyn. Descriptive combinatorics and distributed algorithms. *Notices of the American Mathematical Society*, 69(9):1496–1507, 2022.

[8] Di Prisco, C. A. and Todorcevic, S. Basis problems for Borel graphs. In Curilic, M. and Todorcevic, S., editors, *Selected topics in combinatorial analysis. Zbornik radova 17 (25)*, pages 33–51. Math. Inst. SANU, Beograd, 2015.

[9] Benjamin D. Miller. The graph-theoretic approach to descriptive set theory. *Bull. Symbol. Log.*, 18(4):554–575, 2012.

[10] Noam Greenberg, Dominique Lecomte, Dan Turetsky, and Miroslav Zeleny. Topology, forcing, and graph colourings, 2026. arXiv 2604.05554.

[11] Andrew Marks. A determinacy approach to Borel combinatorics. *J. Amer. Math. Soc.*, 29:579–600, 2016.

[12] Andrew S. Marks. Measurable graph combinatorics. In Dmitry Beliaev and Stanislav Smirnov, editors, *International Congress of Mathematicians 2022, Vol. 3*, pages 1488–1502, Berlin, Germany, 2023. EMS.

[13] Assaf Rinot. Chromatic numbers of graphs – large gaps. *Combinatorica*, 35(2):215–233, 2015.

[14] Alexander Soifer and Saharon Shelah. Axiom of choice and chromatic number: examples on the plane. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 105(2):359–364, 2004.

[15] Alexander S. Kechris. *Classical descriptive set theory.* Springer-Verlag, New York, 1995.

[16] Thomas Jech. *Set theory.* Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, The third millennium revised and expanded edition, 2003. Pages xiii + 769.

[17] Stefan Geschke and Sandra Quickert. On Sacks forcing and the Sacks property. In Benedikt Löwe, Boris Piwinger, and Thoralf Räsch, editors, *Classical and New Paradigms of Computation and their Complexity Hierarchies*, pages 95–139, Dordrecht, 2004. Springer Netherlands.

[18] Ralf Schindler. *Set Theory: Exploring Independence and Truth.* Springer International Publishing, Cham, 2014.

[19] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. Генерическое свойство множества Σ по Соловею. *Сиб. матем. журн.*, 58(6):1302–1305, 2017.

[20] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. Абсолютность множества Σ по Соловею. *Сиб. матем. журн.*, 60(6):1286–1290, 2019.

[21] Sy-David Friedman, Victoria Gitman, and Vladimir Kanovei. A model of second-order arithmetic satisfying AC but not DC. *J. Math. Log.*, 19(1):1–39, 2019. Article No 1850013.

[22] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. Неуниформизуемые множества второго проективного уровня со счетными сечениями в виде классов Витали. *Известия РАН, серия математическая*, 82(вып. 1):65–96, 2018. English transl. in *Russian Mathematics, Izvestiya*, 2018, vol. 82 (1).