МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ISSN 2411-1473

# Современные информационные технологии и ИТ-образование

Научный журнал

Том 2 (№ 11)

Москва
2015

**УДК [004:377/378](063)**
**ББК 74.5(0)я431+74.6(0)я431+32.81(0)я431**
**С 56**

**Современные информационные технологии и ИТ-образование. Т. 2 (№ 11), 2015. - 614 с. (ISSN 2411-1473)**

В данном выпуске журнала представлены доклады X Юбилейной международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование», прошедшей в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова 20-22 ноября 2015 года.

Журнал «Современные информационные технологии и ИТ-образование» включен в наукометрическую базу «Российский индекс научного цитирования» с размещением полнотекстовых версий в научной электронной библиотеке eLIBRARY.RU. URL: http://elibrary.ru/title_about.asp?id=52785

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант РФФИ № 15-07-20760_г)*

**Учредитель:**
Фонд содействия развитию интернет-медиа, ИТ-образования, человеческого потенциала «Лига интернет-медиа»

**Издатель:**
Фонд содействия развитию интернет-медиа, ИТ-образования, человеческого потенциала «Лига интернет-медиа»

**Адрес редакции:**
119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, стр. 52, факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, каб. 375. E-mail: sukhomlin@mail.ru, тел./факс (495) 939-46-26.

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-61433 от 10 апреля 2015 г.
Издается с 2005 года. Выходит 1 раз в год.



---

**Любецкий В.А.[1], Селиверстов А.В.[2]**

[1]ИППИ РАН, г. Москва, д.ф.-м.н., зав.лаб., lyubetsk@iitp.ru

[2]ИППИ РАН, г. Москва,к.ф.-м.н., в.н.с., slvstv@iitp.ru

# О РЕШЕНИИ ОДНОЙ NP-ПОЛНОЙ ЗАДАЧИ

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА**

*Задача о разбиении множества с весами, решение комбинаторной проблемы, недетерминированный полиномиальный алгоритм, NP-полная задача, поиск особых точек на кубике, единственное решение, теория поля комплексных чисел.*

**АННОТАЦИЯ**

*Предложен метод решения задачи о разбиении множества с весами как в смысле теории поля комплексных чисел, так и в смысле недетерминированного полиномиального алгоритма. Задача сводится к рекурсивному решению вопроса об особых точках на явно заданной кубике низкого ранга, в предположении, что решение единственное или отсутствует.*

Задача состоит в следующем. Дано $n$+1 чисел («весов»), которые могут повторяться, их можно считать целыми и строго положительными. Таким образом, дана последовательность $\alpha_0,\ldots,\alpha_n$. Нужно найти множество индексов, для которых суммарный вес равен точно половине суммы всех весов. Если упростить задачу, спросив, существует ли решение, то она будет NP-полной. Мы предполагаем её решить *при условии*: решений нет или решение единственное, которое при нашем подходе, по сути, повторяет указанное выше условие.

Понятие «решить» разбивается на два случая. Во-первых, можно искать две E-формулы полиномиальной длины в языке поля комплексных чисел: одна – «существует решение» и вторая – «не существует решения». Первая из них очевидна:

$$\exists x_0,..,x_n\left(\left(\alpha_0 x_0+\ldots+\alpha_n x_n\right)\wedge\left(..\,x_i^2=1..\right)\right).$$

Для второй формулы даже её существование совершенно не очевидно. Во-вторых, можно искать недетерминированный полиномиальный алгоритм, который говорит «решений нет» или предъявляет решение (вариант – говорит «решение есть»). Мы рассмотрим оба эти случая на основе, как нам кажется, необычного подхода, состоящего в сведении исходной комбинаторной задачи к исследованию особых точек ранга $n$+1 явно заданной кубической формы в $n$-мерной гиперплоскости $L$ в ($n$+1)-мерном комплексном линейном пространстве $\mathbb{C}^{n+1}$. Коэффициенты формы и гиперплоскости тесно связаны.

Приводимое ниже рассуждение, может быть, даже более естественно в комплексном проективном пространстве $P\left(\mathbb{C}^{n+1}\right)$, состоящем из прямых, проходящих через нуль в $\mathbb{C}^{n+1}$ (далее называемых *прямыми*). Но для простоты будем говорить о самом $\mathbb{C}^{n+1}$.

Форма и соответствующая ей гиперповерхность одинаково обозначаются. Нормаль – прямая, заданная градиентом.

Назовём *вершиной* последовательность длины $n$+1, состоящую из чисел $\pm 1$. Пара противоположных вершин соответствует разбиению множества на две части в исходной задаче.

*Обозначим* $L$ гиперплоскость в $\mathbb{C}^{n+1}$, заданную формой

$$L=\alpha_0 x_0+\ldots+\alpha_n x_n,$$

т.е. заданную уравнением $L=0$, её размерность $n$.

*Обозначим*

$$F=\alpha_0 x_0{}^3+\ldots+\alpha_n x_n{}^3$$

и соответственно $F_L$ сужение этой формы на $L$. Такое сужение $F_L$ – кубическая форма, определённая на $L$, ранга $n$+1, о которой говорилось выше, при постановки задачи. Она может иметь *особые точки*, т.е. точки, в которых градиент равен нулю. Точка нуль $<0,\ldots,0>$ здесь и далее исключается из рассмотрения. Очевидно, особая точка для $F_L$ лежит на прямой, состоящей сплошь из особых для $F_L$ точек; назовём её *особой прямой*. Таким образом, особые точки и особые прямые (всегда для $F_L$) можно не различать.

(1) Если вершина $x$ лежит в *L*, то $x$ – особая точка для $F_L$ в *L*. И наоборот, если $x$ – особая прямая в *L*, то на ней имеется пара противоположных вершин.

Доказательство. Пусть *x* – вершина в *L*, т.е. *L*(*x*)=0, то *F*(*x*)=0; градиенты от *L* и от *F* в *x* соответственно равны $<\alpha_0,\dots,\alpha_n>$ и $<3\alpha_0 x_0{}^2,\dots,3\alpha_n x_n{}^2>=<3\alpha_0,\dots,3\alpha_n>$, т.е. коллинеарны между собой. Производную $F'(x)$ можно разложить на компоненты в *L* и в нормали к *L*, поэтому первая из них равна 0 и равна $(F_L)'(x)$.

Пусть *x* – точка из *L* и $(F_L)'(x)=0$. Разложим $F'(x)$ по тем же компонентам. Тогда $F'(x)$ расположена на нормали к *L*, которая определяется вектором $<\alpha_0,\dots,\alpha_n>$, т.е. $<\alpha_0,\dots,\alpha_n>$ и $<3\alpha_0 x_0{}^2,\dots,3\alpha_n x_n{}^2>$ коллинеарны. Последнее означает $x_i{}^2=x_j{}^2$. На прямой, проходящей через нуль и эту точку *x*, имеется точка *x′* (положим у *x* первую координату равной 1), для которой $x_i{}^2=1$; эта *x′* – вершина в *L*.

(2) *Предположим*, что $F_L$ имеет не более одной особой прямой (в проективизации – особой точки). Это – частный случай указанного выше условия, о котором удобнее говорить. Назовём *нетривиальным* невырожденное линейное нескалярное (т.е. не вида $z\cdot E$) преобразование *J* в линейном пространстве $L$ над $\mathbb{C}$, сохраняющее множество нулей формы $F_L$. Последовательно применяя нетривиальные преобразования к уже полученным подпространствам, получим $L=L_1\oplus\dots\oplus L_p$, где $p\le n$ и каждое $L_i$ малой размерности, ограниченной сверху константой. Особая прямая, если она есть, лежит в одном из подпространств $L_i$. Отсутствие особой прямой для $F_{L_i}$ в каждом $L_i$ выражается условием: дискриминант не равен нулю [1]. В одномерном случае это условие можно заменить неравенством нулю всех частных производных в какой-то ненулевой точке. Суммарная длина полученной Е-формулы полиномиальная от *n*. В частности, бескванторная часть этой формулы включает условие нетривиальности каждого преобразования.

(3) Пошевелим базисы в $L_1,\dots,L_p$, чтобы базисы стали рациональными, получим подпространства $L_1',\dots,L_p'$. Новые подпространства можно выбрать со следующими свойствами: (*a*) ближайшая пара противоположных вершин единственна, обозначим её $\varepsilon(L_i')$; и (*b*) подпространство $L_i$ содержит особую прямую, если и только если $\varepsilon(L_i')$ – вершины, лежащие в гиперплоскости $L$. Недетерминированный шаг состоит в указании новых базисов.

*Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14–50–00150).*

## Литература

1. Морозов А.Ю., Шакиров Ш.Р. Новые и старые результаты в теории результатов // *Теоретическая и математическая физика*, 2010, том 163, № 2, стр. 222–257.