Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 517, 2022 г.

С. Ф. Адлай, Г. И. Малашонок, К. Ю. Малышев, А. В. Селиверстов, Ф. Г. Усков

ОБ АЛГОРИТМАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОЛНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

§1. Введение

Настоящая статья написана авторами в память об ушедшем товарище и старшем коллеге, Владимире Петровиче Гердте (21.01.1947–5.01.2021). В. П. Гердт сделал многое для развития и широкого применения методов компьютерной алгебры [1]. Некоторые из рассматриваемых в статье сюжетов неоднократно обсуждались на конференциях по компьютерной алгебре, в организации которых он принимал деятельное участие.

Развитие методов компьютерной алгебры и облачных вычислений позволяет эффективно решать многие вычислительные задачи. Сегодня доступ к некоторым ресурсам предоставляется бесплатно, что открывает возможность их широкого использования, в частности, в учебном процессе. При этом не требуется обязательно находиться в специально оборудованном учебном классе. Примером такого облачного сервиса служит MathPartner [2,3]. Свободный доступ к нему возможен по адресам `http://mathpar.com/` и `http://mathpar.ukma.edu.ua/`.

Большой интерес для развития цифровых технологий в образовании вызывают символьные вычисления и оценки вычислительной сложности [4, 5]. Однако символьные вычисления необходимо дополнять численными методами для вычисления специальных функций, что связано с некоторыми трудностями [6]. В частности, это справедливо при вычислении эллиптических интегралов [7–10]. Они применяются в различных задачах, включая вычисление периода математического маятника [7, 11], решение задач о тросовых конструкциях [12], вычисление длин дуг кривых [7,13], объёмов тел [14], свойств пористых материалов и плотности упаковки [15, 16], а также при моделировании

Ключевые слова: полный эллиптический интеграл, численные методы, компьютерная алгебра, MathPartner.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках проекта No. 19-29-14141.

кривых блеска экзопланет [17]. Решения многих краевых задач математической физики выражаются через эллиптические интегралы [18]. Так, потенциал простого слоя равномерно заряженного круглого диска может быть представлен при помощи полного эллиптического интеграла первого рода, [19, стр. 79, 433]. Задачи расчёта магнитного поля витков с током решаются при помощи полных эллиптических интегралов первого и второго родов [19, стр. 79, 80, 441]. В частности, эти вычисления можно выполнить, используя программы для работы с электронными таблицами [20]. Аналитические формулы для магнитных полей, содержащие эллиптические интегралы, используются как в вычислительных экспериментах [21], так и при разработке реальных экспериментальных установок [22]. Ниже приводится пример нестационарной задачи математической физики, решение которой выражается с помощью полного эллиптического интеграла первого рода, см. раздел 4. Разнообразие практических приложений полных эллиптических интегралов позволяет считать разработку и реализацию эффективных алгоритмов для их вычисления актуальной задачей.

§2. Арифметико-геометрическое среднее

В MathPartner доступно вычисление арифметико-геометрического среднего двух чисел, обозначаемого через $\mathrm{AGM}(a, b)$. Оно было использовано Гауссом (Johann Carl Friedrich Gauß). Для положительных вещественных чисел a и b значение $\mathrm{AGM}(a, b)$ вычисляется как предел каждой из двух последовательностей $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ и $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, где $a_0 = a$ и $b_0 = b$. Каждый раз выбирается положительное значение корня. Оно обладает свойствами $\mathrm{AGM}(a, b) = \mathrm{AGM}(b, a)$ и $\mathrm{AGM}(a, a) = a$. При $0 < x \leqslant 1$ функция одной переменной $\mathrm{AGM}(1, x)$ ограничена сверху линейной функцией $(x + 1)/2$ и быстро приближается к ней при $x \to 1$.

Практическое значение арифметико-геометрического среднего связано, в частности, с возможностью быстрого вычисления периода колебаний маятника [7, 11]. Обозначим длину маятника через ℓ, ускорение свободного падения через g, а угол максимального отклонения маятника от положения устойчивого равновесия через θ. Тогда период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\mathrm{AGM}(1, \cos(\theta/2))}\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

При малых колебаниях $\theta \to 0$ период стремится к величине

$$2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Если же максимальный угол θ стремится к π, то период колебаний маятника стремится к бесконечности. В пределе маятник будет бесконечно долго подниматься, приближаясь к вертикальному положению. При этом возможны два симметричных случая в зависимости от того, с какой стороны поднимается маятник. Следовательно, верхнее положение маятника одновременно служит положением неустойчивого равновесия и предельным положением маятника, движущегося в одном из двух возможных направлений.

В общем случае $\mathrm{AGM}(a, b)$ используется для быстрого вычисления полного эллиптического интеграла первого рода

$$I(a,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2\mathrm{AGM}(a,b)}.$$

В частном случае $a = b$ значение этого интеграла равно $\frac{\pi}{2a}$, что соответствует значению $\mathrm{AGM}(a, a) = a$. Доказательство этой формулы основано на соотношении, найденном Ланденом (John Landen) [23, 24]:

$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Для положительных вещественных чисел a и b, которые достаточно близки друг другу, легко показать квадратичную сходимость последовательности приближений к $\mathrm{AGM}(a, b)$. Пусть выполнены неравенства $0 < b < a$. Тогда на каждой итерации вычисления $\mathrm{AGM}(a, b)$ также выполнены неравенства $0 < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ и $a_n - b_n \leqslant 2^{-n}(a - b)$, гарантирующие монотонную сходимость. Поскольку функция $\mathrm{AGM}(a, b)$ однородная, достаточно рассмотреть случай, когда на очередной итерации $b_n = 1$ и $a_n = 1 + \varepsilon$, где $|\varepsilon| < 1$. На следующей итерации границы интервала, содержащего значение $\mathrm{AGM}(a, b)$, равны $b_{n+1} = 1 + \varepsilon/2$ и $a_{n+1} = \sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon/2 + O(\varepsilon^2)$. Ширина этого интервала ограничена сверху маленьким числом: $|a_{n+1} - b_{n+1}| = O(\varepsilon^2)$. Следовательно, для произвольно фиксированных положительных вещественных a и b, приближённое вычисление $\mathrm{AGM}(a, b)$ с ошибкой не выше 2^{-k}, где показатель $k \geqslant 2$, требует выполнения $O(\log_2 k)$ операций сложения, умножения, деления и извлечения квадратного корня над полем вещественных чисел.

Во многих случаях число итераций для достижения разумной точности может быть выбрано фиксированным и маленьким. Это очень удобно, поскольку такие вычисления проводятся очень быстро программой без ветвлений, более того, они могут выполняться маленькой микросхемой. Также известны быстрые алгоритмы для выполнения алгебраических операций [25]. Такие ограничения бывают важны для обработки сигналов в реальном времени, а также для маленьких автономных аппаратов. Но наш пример показывает, что иногда число необходимых итераций может быть больше. При этом сервис MathPartner будет работать быстро, но соответствующая программа без ветвлений должна стать длиннее.

§3. Геометро-гармоническое среднее

Новый вариант – это геометро-гармоническое среднее $\mathrm{GHM}(a,b)$, которое равно пределу каждой из последовательностей

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$$

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},$$

где $a_0 = a$ и $b_0 = b$. Так же как и в случае арифметико-геометрического среднего, эта последовательность быстро сходится к пределу для положительных вещественных значений аргументов.

Арифметико-геометрическое и геометро-гармоническое средние связаны соотношением $\mathrm{AGM}(a,b)\mathrm{GHM}(a,b) = ab$. Поэтому оно также позволяет вычислить значение полного эллиптического интеграла первого рода. В частности, выполнено равенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\gamma^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2}\mathrm{GHM}\left(1, \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\right).$$

Проверка равенства $\mathrm{AGM}(a,b)\mathrm{GHM}(a,b) = ab$ для независимо вычисленных значений $\mathrm{AGM}(a,b)$ и $\mathrm{GHM}(a,b)$ может служить для контроля ошибки вычисления, поскольку произведение вычисляется легко, следовательно, мало увеличивает ошибку.

Хотя вычисления над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$ реализованы в MathPartner, вычисление AGM и GHM происходит над множеством чисел с плавающей точкой, которое служит алгеброй `R` с делителями нуля. В этой алгебре существует машинный нуль `MachineEpsilonR` – это наименьшее положительное число. В частности, его квадрат тождественно равен нулю. Однако значение `MachineEpsilonR` пользователь может указать сам. Но поскольку в этой алгебре есть делители нуля, вычисления над алгеброй `R` принципиально отличаются от вычислений над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Теоретически можно было бы заменить корни непрерывными дробями [26]. Переходя к подходящим рациональным дробям, можно приблизить AGM и GHM рациональными функциями. Но в MathPartner это не реализовано.

При реализации вычислений в MathPartner важно, чтобы промежуточные вычисления проводились с высокой точностью. Для этого нужно использовать окружение `R`, задаваемое командой `SPACE` = `R[]`. Число десятичных знаков после запятой, которые выводятся на печать, задаётся константой `FLOATPOS`. Наименьшее положительное число, которое отличается от машинного нуля, задаётся константой `MachineEpsilonR`, равной по умолчанию 10^{-29}. Константа `ACCURACY` определяет число точных десятичных позиций после запятой для чисел в операциях умножения и деления. По умолчанию она равна 10^{-5}·`MachineEpsilonR`. Напротив, вычисления над множеством `R64` чисел с плавающей точкой (со стандартной 52-разрядной мантиссой и 11-разрядным полем для хранения порядка) приводит к быстрому накоплению ошибок.

§4. Пример

В качестве иллюстрации практического значения полных эллиптических интегралов первого рода мы рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения на плоскости, где $u = u(t, x)$ и $x \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} u_{tt} = \triangle u, & t > 0; \\ u(0, x) = 0; \\ u_t(0, x) = f(x). \end{cases}$$

Решение этой задачи даётся формулой Пуассона [27]:

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|x-y|<t} \frac{f(y)}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}}\, dy.$$

Перейдём в полярную систему координат (r, φ). Будем считать, что начальный импульс f не зависит от полярного угла φ, и для краткости обозначим начальный импульс через $f(r)$ вместо $f(r, \varphi)$. Тогда решение также не зависит от полярного угла, $u = u(t, r)$. Пусть $f(r) = 0$ при $r > r_0$. Формула Пуассона запишется в виде

$$u(t, R) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{r_0} f(r)\, r dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{t^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\varphi}}$$

при условии, что $t^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\varphi > 0$, которое выполнено при всех $\varphi \in [0, 2\pi)$, когда $t > r_0 + R$.

Для вычисления интеграла по углу φ можно использовать формулу

$$\int\limits_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{t^2 - R^2 - r^2 + 2Rr\cos\varphi}} = \frac{\pi}{\mathrm{AGM}\left(\sqrt{t^2 - (R - r)^2}, \sqrt{t^2 - (R + r)^2}\right)}.$$

§5. Эллиптические интегралы второго рода

Ещё одно среднее – это модифицированное арифметико-геометрическое среднее MAGM – возникает при вычислении эллиптических интегралов второго рода и длины дуги эллипса с данными полуосями. Чтобы определить $\mathrm{MAGM}(a, b)$, рассмотрим три последовательности чисел:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, \\ b_{n+1} &= c_n + \sqrt{(a_n - c_n)(b_n - c_n)}, \\ c_{n+1} &= c_n - \sqrt{(a_n - c_n)(b_n - c_n)}, \end{aligned}$$

где $a_0 = a$, $b_0 = b$ и $c_0 = 0$. Последовательности a_n и b_n монотонные при условии $0 < b < a$. Значение $\mathrm{MAGM}(a, b)$ равно числу, принадлежащему всем интервалам (b_n, a_n). Длины этих интервалов стремятся к нулю, поэтому $\mathrm{MAGM}(a, b)$ равно общему пределу двух последовательностей a_n и b_n. Как и при вычислении $\mathrm{AGM(a, b)}$, эти последовательности быстро сходятся при условии, что каждое выражение под знаком квадратного корня равно неотрицательному вещественному числу. Каждый раз выбирается неотрицательное значение корня. Это позволяет для $0 \leqslant \gamma < 1$ эффективно вычислить значение полного эллиптического интеграла второго рода [7, 12, 28]:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\gamma^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi \mathrm{MAGM}(1, 1-\gamma^2)}{2\mathrm{AGM}(1, \sqrt{1-\gamma^2})}.$$

Следовательно, длина эллипса равна

$$2\pi\frac{\mathrm{MAGM}(a^2, b^2)}{\mathrm{AGM}(a, b)},$$

где $a > 0$ и $b > 0$ обозначают большую и малую полуоси. При $a = b$ получаем, что длина окружности радиуса a равна $2\pi a$.

Существует другой путь для вычисления полного эллиптического интеграла второго рода [13]. Положим начальные значения $a_0 = \sqrt{1-\gamma^2}$, $b_0 = 1/a_0$, $c_0 = 0$, $r_0 = 1$ и $\rho_1 = 1$. Рассмотрим последовательности

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2},\\
b_{n+1} &= c_n + r_n,\\
c_{n+1} &= c_n - r_n,\\
r_{n+1} &= \sqrt{2(a_{n+1} - c_{n+1})r_n},\\
\rho_{n+1} &= \rho_n\frac{a_{n-1} - c_n}{a_n - c_n}.
\end{aligned}$$

Снова полный эллиптический интеграл второго рода принадлежит интервалам, длины которых стремятся к нулю, а границы $\frac{\pi}{2}\rho_n a_n$ и $\frac{\pi}{2}\rho_n a_{n-1}$ легко вычислить на каждой итерации.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-\gamma^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi}{2}\lim_{n\to\infty}\rho_n a_n,$$

где от параметра γ зависит начальное значение a_0.

§6. Вычисление числа π

Известно большое разнообразие методов вычисления числа π. Обычно для вычисления используют быстро сходящиеся степенные ряды

[29–31]. Однако асимптотические оценки скорости сходимости последовательностей частичных сумм линейные. Известны также последовательности, члены которых вычисляются по формулам с вложенными корнями [32]. Метод Гаусса–Эйлера [33] для вычисления числа π сводится к вычислению $\mathrm{AGM}(1,\sqrt{2})$ и $\mathrm{MAGM}(1,2)$. Здесь соответствующие выражения для приближённых значений AGM и MAGM также содержат вложенные квадратные корни [7].

$$\pi = \frac{(\mathrm{AGM}(1,\sqrt{2}))^2}{\mathrm{MAGM}(1,2)-1}.$$

Поскольку последовательности выражений с корнями к значениям AGM и MAGM сходятся с квадратичной скоростью, можно ожидать, что этот метод эффективнее, чем методы, основанные на сходимости степенных рядов. Хотя вычисления в MathPartner с точностью 190 десятичных знаков после запятой не выявили преимущества такого подхода, этот метод предпочтителен для достижения более высокой точности.

По аналогии с вычислением полных эллиптических интегралов второго рода, существует ещё один путь вычисления числа π. Полагаем начальные члены последовательностей $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$, $r_0 = \sqrt{2}$ и $\rho_1 = 1$. И снова определим по индукции $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = c_n + r_n$, $c_{n+1} = c_n - r_n$, $r_{n+1} = \sqrt{2(a_{n+1} - c_{n+1})r_n}$ и

$$\rho_{n+1} = \rho_n \frac{a_{n-1} - c_n}{a_n - c_n}.$$

Тогда на каждом шаге выполнены неравенства

$$\pi_- = \frac{2}{\rho_n^2(a_{n-1}-1)} < \pi < \frac{2}{\rho_n^2(a_n - 1)} = \pi_+,$$

где через π_- и π_+ обозначены нижняя и верхняя границы интервала, содержащего число π. Для $n = 1$ этот интервал широкий $\pi_+ - \pi_- = 2$. Для $n = 2$ получим $\pi_+ - \pi_- < 0.28$, для $n = 3$ интервал заметно уже $\pi_+ - \pi_- < 10^{-3}$, а для $n = 4$ он ещё уже $\pi_+ - \pi_- < 8 \cdot 10^{-9}$.

§7. Снова вычисление квадратного корня

Продолжая, можно бы определить арифметико-гармоническое среднее $\mathrm{AHM}(a,b)$ как предел каждой из двух последовательностей

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

$$b_{n+1} = \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n},$$

где $a_0 = a$ и $b_0 = b$. Однако для неотрицательных значений аргументов $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ значение $\mathrm{AHM}(a, b)$ совпадает со средним геометрическим $\sqrt{ab} \geqslant 0$. Действительно, выполнено равенство $\sqrt{ab} = \sqrt{AH}$, где через A и H обозначены среднее арифметическое $A = (a+b)/2$ и среднее гармоническое $H = 2ab/(a + b)$, соответственно. Следовательно, если последовательности a_n и b_n сходятся, то предел равен среднему геометрическому. Отметим, что для рациональных чисел a и b все члены последовательностей a_n и b_n тоже рациональные.

Если же оба аргумента отрицательные $a < 0$ и $b < 0$, то последовательность также сходится к отрицательному значению, что соответствует отрицательному значению корня $\sqrt{ab}$. Так получается новый метод вычисления квадратного корня, позволяющий получить как положительное, так и отрицательное значения. Та последовательность, которая сходится к $\mathrm{AHM}(a, b)$ для неотрицательных вещественных чисел, расходится для некоторых значений аргументов. В частности, если оба аргумента a и b вещественные и противоположных знаков, то члены последовательностей a_{n+1} и b_{n+1} тоже вещественные, следовательно, эти последовательности не приближают никакое из двух мнимых значений корня $\sqrt{ab}$.

§8. Заключение

Вычисление арифметико-геометрического среднего $\mathrm{AGM}(a, b)$, геометро-гармонического среднего $\mathrm{GHM}(a, b)$ и модифицированного арифметико-геометрического среднего $\mathrm{MAGM}(a, b)$ реализовано в MathPartner. Поэтому сервис MathPartner позволяет решать новые задачи по геометрии и физике. В частности, новые функции позволяют вычислять период математического маятника, используя арифметико-геометрическое среднее, а также длину эллипса. Возможность применения указанных функций для визуализации магнитных и других физических полей, выражаемых эллиптическими интегралами, представляет практический интерес.

Благодарности. Авторы благодарны Михаилу Дмитриевичу Сурначёву за обсуждение задачи для волнового уравнения на плоскости.

Список литературы

1. V. F. Edneral, *In memory of Vladimir Gerdt.* — Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science **29**, No. 4 (2021), 306–336.
2. G. I. Malaschonok, *MathPartner computer algebra.* — Programming and Computer Software **43**, No. 2 (2017), 112–118.
3. G. I. Malaschonok, A. V. Seliverstov, *Calculation of integrals in MathPartner.* — Discrete and Continuous Models and Applied Computational Science **29**, No. 4 (2021), 337–346.
4. M. D. Malykh, L. A. Sevastianov, Yu Ying, *On symbolic integration of algebraic functions.* — J. Symbolic Computation **104** (2021), 563–579.
5. A. V. Seliverstov, *Heuristic algorithms for recognition of some cubic hypersurfaces.* — Programming and Computer Software **47** (2021), 50–55.
6. R. Reynolds, A. Stauffer, *Definite integral of logarithmic functions and powers in terms of the lerch function.* — Ural Math. J. **7**, No. 1 (2021), 96–101.
7. S. Adlaj, *An eloquent formula for the perimeter of an ellipse.* — Notices Amer. Math. Soc. **.** **59**, No. 8 (2012), 1094–1099.
8. S. F. Adlaj, *Elliptic integrals, functions, curves and polynomials.* — Computer Assisted Mathematics No. 1 (2019), 3–8.
9. J. M. Borwein, P. B. Borwein, *The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions.* — SIAM Review **26**, No. 3 (1984), 351–366.
10. B. Sury, *The arithmetico-geometric mean of Gauss.* — Resonance **5**, No. 8 (2000), 72–83.
11. S. Adlaj, *An analytic unifying formula of oscillatory and rotary motion of a simple pendulum.* — In: Proceedings of International Conference “Geometry, Integrability, Mechanics and Quantization”, Varna, Bulgaria, 2014, June 6–11. Sofia: Avangard Prima, 2015, pp. 160–171.
12. С. Адлай, *Равновесие нити в линейном параллельном поле сил.* Mauritius: LAP LAMBERT, 2018.
13. S. Adlaj, *An explicit procedure for calculating the perimeter of an ellipse.* — In: 22nd Workshop on Computer Algebra in memory of Professor Vladimir Gerdt, Dubna, Russia (2021), pp. 5–6.
14. F. Lamarche, C. Leroy, *Evaluation of the volume of intersection of a sphere with a cylinder by elliptic integrals.* — Computer Physics Communications **59**, No. 2 (1990), 359–369.
15. N. J. Mariani, G. D. Mazza, O. M. Martinez, G. F. Barreto, *Evaluation of radial voidage profiles in packed beds of low-aspect ratios.* — Canadian J. Chemical Engineer. **78**, No. 6 (2000), 1133–1137.
16. B.-X. Xu, Y. Gao, M.-Z. Wang, *Particle packing and the mean theory.* — Physics Letters A **377**, Nos. 3–4 (2013), 145–147.

17. E. Agol, R. Luger, and D. Foreman-Mackey, *Analytic Planetary Transit Light Curves and Derivatives for Stars with Polynomial Limb Darkening.* — Astronom. J. **159**, No. 3 (2020), 123–159.
18. R. H. Good, *Elliptic integrals, the forgotten functions.* — European J. Phys. **22** (2001), 119–126.
19. Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, *Сборник задач по математической физике.* 4-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2004. 688 с.
20. F. Lamarche, *A calculation of the exact field near a loop of current.* — `http://frogolandia.50megs.com/MathDemos.html`
21. Ю. П. Ивочкин, Д. А. Виноградов, И. О. Тепляков, *Численный расчет магнитного поля с использованием технологии CUDA применительно к моделированию электровихревых течений.* — Математическое и программное обеспечение систем в промышленной и социальной сферах, No. 2 (2015), с. 13–18.
22. I. Teplyakov, D. Vinogradov, Y. Ivochkin, *Experimental study of the velocity of the electrovortex flow of In-Ga-Sn in hemispherical geometry.* — Metals **11**, No. 11 (2021), 1806.
23. J. Landen, *An investigation of a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom.* — Phil. Trans. **LXV** (1775), 283–289.
24. A. Cayley, *Note on Landen's theorem.* — In: The Proceedings of the London Mathematical Society, vol. XIII (1882), pp. 47–48.
25. С. Б. Гашков, И. С. Сергеев, *Умножение.* — Чебышевский сб. **21**, No. 1 (2020), 101–134.
26. É. Galois, *Analyse algébrique. Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques.* — Annalles de Mathématiques pures et appliquées **19** (1828–1829), 294–301.
27. V. S. Vladimirov, *Equations of Mathematical Physics.* Marcel Dekker, New York, 1971.
28. F. Lamarche, *Modified Arithmetic-Geometric Mean.* — `https://math.stackexchange.com/questions/391382/modified-arithmetic-geometric-mean` Дата обращения 27 июля 2022.
29. W. Chu, *Ramanujan-like formulae for* π *and* $1/\pi$ *via Gould–Hsu inverse series relations.* — Ramanujan J. **56** (2021), 1007–1027.
30. J. Guillera, *A method for proving Ramanujan's series for* $1/\pi$. — Ramanujan J. **52** (2020), 421–431.
31. D. Takahashi, *On the computation and verification of* π *using BBP-type formulas.* — Ramanujan J. **51** (2020), 177–186.
32. B. Edun, *Finite and infinite nested square roots convergent to unity.* — Ramanujan J. **51** (2020), 495–500.
33. L. Euler, *De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione* $y = \int (xx\,dx)/\sqrt{(1-x^4)}$ — Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae **1782** (1786), II, 34–61.

Adlaj S. F., Malaschonok G. I., Malyshev K. Y., Seliverstov A. V., Uskov F.G. On algorithms for calculating complete elliptic integrals.

Methods for calculating complete elliptic integrals of the first and second kind and their implementation in the MathPartner computer algebra system are considered.

Федеральный исследовательский центр
“Информатика и управление”
Российской академии наук,
Национальный исследовательский
технологический университет МИСиС,
Российский государственный университет
нефти и газа НИУ имени И. М. Губкина
E-mail: SemjonAdlaj@gmail.com

Поступило 2 декабря 2022 г.

Національний університет
Києво-Могилянська академія
E-mail: malaschonok@gmail.com

Московский государственный
университет имени М. В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт
ядерной физики имени Д. В. Скобельцына
E-mail: kmalyshev08102@mail.ru

Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук
E-mail: SLVSTV@iitp.ru

Сколковский институт науки и технологий,
Российский государственный университет
нефти и газа НИУ имени И. М. Губкина
E-mail: feelus.kov@gmail.com