Автоматика и телемеханика, № 12, 2018

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2018 г. К.Ю. ГОРБУНОВ, канд. физ.-мат. наук (gorbunov@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва),
В.А. ЛЮБЕЦКИЙ, д-р физ.-мат. наук (lyubetsk@iitp.ru)
(Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва;
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

ЛИНЕЙНЫЙ АЛГОРИТМ ПЕРЕСТРОЙКИ ГРАФА[1]

Предлагается линейный по времени и памяти алгоритм, который строит минимальную по суммарной цене последовательность операций, преобразующих любой данный ориентированный граф, у которого степень любой вершины не более двух, в любой данный такого же типа граф. Эта последовательность называется кратчайшей. Разрешены четыре стандартные операции переклейки графов с равной ценой и еще две дополнительные операции — вставки и удаления связного участка ребер, которые имеют равную между собой цену. Приводится доказательство того, что алгоритм находит минимум при этом ограничении на цены.

Ключевые слова: граф, цикл, цепь, преобразование графа, цена операции, комбинаторная задача, оптимизация на графах, линейный алгоритм.

DOI: 10.31857/S000523100002861-1

1. Введение и постановка задачи

Рассматривается *задача о преобразовании графов*: даны ориентированные графы a и b, у которых степень каждой вершины $\leqslant 2$, каждому ребру приписано имя — натуральное число; даны хорошо известные операции над графами, которые поддерживают это условие на степень вершины; и даны цены каждой операции. Такие графы называют *структурами*. Найти *кратчайшую* последовательность операций, которая преобразует a в b. Цена — строго положительное рациональное число; “кратчайшая” означает последовательность, которая имеет минимальную суммарную цену, назовем ее *минимальной ценой*. Упомянутые операции над такими графами: переклейка цепей и циклов в вершинах, которые называются *стандартными*, *вставка* и *удаление* связных участков ребер, которые называются *дополнительными*. Подробно эти операции описаны, например, в [1, рис. 1]; по существу, *двойная переклейка* состоит в разрезании двух вершин и отождествлении (склейке)

[1] Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150). Вычисления проводились на суперкомпьютере объединенного суперкомпьютерного центра РАН (JSCC RAS).

по-новому четырех образовавшихся краев. *Полуторная переклейка* состоит в таком же разрезании с последующей склейкой одного из образовавшихся краев с каким-либо свободным краем. *Разрез* состоит в разрезании вершины, *склейка* — обратная операция. *Удаление* — это удаление связного участка ребер, имена которых принадлежат исходной, но не принадлежат заключительной структуре; *вставка* состоит в подстановке вместо вершины связного участка ребер, имена которых принадлежат заключительной, но не принадлежат исходной структуре, или объявлении этого участка новой компонентой.

Задача имеет долгую историю и разнообразные приложения, ссылки на которые можно найти в [2–5], является NP-полной и потому не может быть решена в общем виде. Авторами данной статьи получены линейные по времени и памяти алгоритмы решения указанной задачи для случаев: (1) це́ны всех операций одинаковы [6]; (2) цены всех операций, кроме вставки, равны единице, а цена последней операции находится в отрезке от единицы до двух, [1]. В настоящей статье рассматривается случай (3): цена w вставки и удаления одинакова, но не превосходит одинаковых цен других операций. Для краткости изложения утверждение доказывается в предположении: w не превосходит половины одинаковых цен других операций (вторая половина утверждения будет проверена в следующей работе). Некоторые по существу очевидные, чисто технические выкладки доказательства приводятся на сайте http://lab6.iitp.ru/-/lagr17.

2. Определения

Для структур a и b *общий граф*, обозначаемый $a + b$, — неориентированный граф, состоящий из связных *компонент* — цепей (включая изолированные вершины) и циклов, включая петли. Подробно определение $a + b$ приведено в [1], но по существу $a + b$ описан далее. Условимся ребра в структурах a и b и в промежуточных от a к b называть *дугами*, а для ребер в $a + b$ сохранить обычный термин. Дуга называется *обычной*, если она представлена в a и в b, иначе она называется *особой*.

Вершины и ребра в $a + b$ могут быть *обычными* или *особыми*: обычная вершина — край дуги, представленной в a и в b, обычное ребро соединяет два края дуг, представленных в a и в b и склеенных в a или в b; особая вершина — связный максимальный участок из особых дуг в a или в b, особое ребро соединяет такой участок с соседним краем обычной дуги, т.е. соединяет особую вершину с обычной. *Петля* в $a + b$ соответствует циклу из особых дуг, т.е. соединяет особую вершину с собой.

Висячим называется ребро, инцидентное особой вершине степени 1; такое ребро располагается на краю цепи. Эта особая вершина называется *висячей*. Невисячие особые ребра присутствуют в $a + b$ парами — это ребра, инцидентные общей особой вершине. Любое ребро или особая вершина имеет источник в a или в b и соответственно называются a- или b-ребром, a- или b-вершиной. *Размером* компоненты в $a + b$ назовем сумму числа ее обычных ребер и половины числа ее особых невисячих ребер. Для изолированных обычных вершин и петель размер полагается равным нулю, для изолированных особых вершин (не петель) — равным минус единице. Общий граф называется финальным (*финального вида*), если каждая его компонента — изолированная обычная вершина или цикл без особых вершин размера (в данном случае то же самое — длины) два, одно из них a- и другое b-ребро; такие циклы назовем *финальными*. Циклы размера два назовем 2-циклами.

В [1] определены пять операций над общим графом: аналоги стандартных операций, которые называются также *стандартными*, и одна *дополнительная*. Последняя называется *удалением* и состоит в удалении особой вершины: удаляя ее, мы объединяем два инцидентных ей особых ребра в одно обычное. Аналоги стандартных операций над структурой называются также *разрезом*, *склейкой*, *полуторной* и *двойной* переклейками. Двойная переклейка состоит в следующем: удалить два одинаково помеченных ребра общего графа и соединить четыре образовавшихся конца двумя новыми неинцидентными ребрами с той же меткой. Разрез — удаление ребра из общего графа; склейка — добавление ребра в граф, полуторная переклейка — разрез с последующей склейкой одного из краев удаленного ребра с вершиной степени не больше единицы. Применение последних двух операций допустимо, если в полученном графе не возникает двух одинаково помеченных ребер, инцидентных обычной вершине. Если в результате одной из трех последних операций образуется ребро с особыми концами (оба a- или оба b-вершины), то оно заменяется одной особой вершиной. Разрез и удаление могут приводить к появлению изолированной вершины, если они применяются к концевому ребру или вершине. Наоборот, в случае структуры удаление происходит вместе с краями ребра.

Вырезание обычного ребра (скажем, с меткой a) из цикла размером строго больше двух состоит в следующем: заменить два соседних b-ребра на два других b-ребра; одно из них образует вместе с вырезанным ребром финальный 2-цикл, а другое соединяет два “дальних” конца замененных ребер. Очевидно, это — аналог двойной переклейки. Аналогично определяется вырезание из цепи некрайнего обычного ребра, а для крайнего ребра используется аналог полуторной переклейки. Инверсия — это двойная переклейка, сохраняющая участок на том же месте, но с обратным порядком ребер.

В [6, следствие к теореме 1] доказано: если цены всех операций равны, то преобразование a в b шестью операциями над структурами эквивалентно с той же суммарной ценой преобразованию $a + b$ пятью указанными операциями к финальному виду, где цены операций такие же, как над структурами, при этом цена удаления a-вершины равна цене удаления участка дуг, а цена удаления b-вершины — цене вставки такого участка. Это доказательство буквально сохраняется, если равны цены только всех стандартных операций, а цены удаления и вставки любые. Поэтому будем рассматривать приведение $a + b$ к финальному виду вместо приведения a к b.

Цепь нечетного (четного) размера назовем *нечетной* (*четной*); нуль считаем четным числом, а (-1) — нечетным. В [6] определяется понятие *типа* цепи общего графа, а именно: если в цепи нет обычных ребер, то $1a$ — нечетная цепь с одним висячим b-ребром, $2a$ — нечетная цепь с двумя висячими b-ребрами или изолированная особая b-вершина (во втором случае говорим о типе $2a'$), $3a$ — нечетная цепь без висячих ребер с крайними a-ребрами, 1_a —

четная цепь с одним висячим a-ребром, 2 — четная цепь с двумя висячими ребрами, 3 — четная цепь без висячих ребер. Аналогично определяются типы с заменой a на b. Тип 1 — объединение типов 1_a и 1_b, тип 0 — цепь без особых вершин. *Буквенным типом* цепи назовем букву в обозначении ее типа. Если в цепи имеются обычные ребра, то *тип цепи* равен типу такой цепи, которая получается после вырезания этих ребер [6, лемма 6].

3. Алгоритм автономного приведения, автономная цена и качество множества компонент графа

Пусть M — любое множество цепей, циклов и петель из данного общего графа $a+b$. *Автономным приведением* множества M к финальному виду назовем следующую последовательность действий, применяемую к каждому элементу из M независимо друг от друга: петля удаляется; из цепи и цикла вырезаются все обычные ребра, цепь строго положительного размера замыкается в цикл. Последнее выполняется склейкой концов для нечетной цепи и полуторной переклейкой с отрезанием крайней обычной вершины для четной; если такая вершина отсутствует, т.е. оба края цепи особые, то той же переклейкой удаляем предпоследнее невисячее ребро, а висячее ребро сохраняем. Затем цикл (уже только из особых ребер) разбиваем на 2-циклы, а именно: пусть, например, речь об участке $abba$ в каком-то большом цикле; двойной переклейкой удаляем слева и справа a-соседей особой вершины и заменяем их на два ребра, которые приводят к двум меньшим циклам, один из них — цикл abb. В цикле abb удаляем особую вершину и получаем финальный 2-цикл, больший цикл разбиваем аналогично; подробнее см. в [6, п. 2.2].

Автономной ценой $C(M)$ множества M назовем суммарную цену указанной последовательности действий. Для множества M используем *обозначения*: B — суммарное число особых вершин; S — сумма целых частей половин длин максимальных связных участков из обычных ребер (которые назовем *отрезками*), сложенная с числом крайних (на цепи) нечетных отрезков (т.е. состоящих из нечетного числа ребер), минус число циклических отрезков; D — сумма дефектов компонент, где *дефект* компоненты равен единице, если она является цепью типов $1a$, $1b$, $3a$, $3b$ или 3, и равен нулю в остальных случаях. *Качеством* M назовем число циклов в M (но не петель), сложенное с половиной числа четных цепей в M, см. [6, п. 3].

Лемма 1. *Пусть M — множество компонент (цепей, циклов, петель) общего графа G, d — суммарный размер компонент, f — число нечетных цепей в M и c — число циклов в M. Тогда суммарная цена автономного приведения всех компонент из M к финальному виду равна*

$$C(M) = (1-w)(0{,}5d + 0{,}5f - c) + w(B + S + D).$$

Доказательство. Для каждой компоненты K вычислим цену ее автономного приведения к финальному виду. Легко видеть (подробнее см. в [6]), что число требуемых операций равно $B+S+D$, где B, S, D определены перед формулировкой леммы 1 и вычисляются для K. Обозначим через U

и Q числа удалений особой вершины и стандартных операций и получим: $B+S+D=U+Q$, $U=B+S+D-Q$. Отсюда суммарная цена всех операций равна $Q+w(B+S+D-Q)=(1-w)Q+w(B+S+D)$.

При автономном приведении компоненты к финальному виду стандартная операция увеличивает качество общего графа на единицу, а удаление особой вершины не меняет его. Пусть d — размер компоненты. Финальный вид состоит для цикла из $0{,}5d$ финальных циклов, для нечетной цепи из $0{,}5(d+1)$ финальных циклов и для четной цепи из $0{,}5d$ финальных циклов и одной изолированной обычной вершины. Вычитая из качества конечного графа качество начального, получаем, что для цикла $Q=0{,}5d-1$, для нечетной цепи $Q=0{,}5(d+1)$, для четной цепи $Q=0{,}5d$. Напомним, что изолированная особая вершина считается нечетной цепью размера минус единица. Лемма 1 доказана.

4. Максимальная область в множестве цепей, описание основного алгоритма

Пусть L — множество цепей, состоящих из особых ребер. *Парой* в L назовем пару цепей из L, у которых следующие типы $\{2a,3b\}$, $\{2b,3a\}$, $\{1a,1b\}$, $\{1a,2b\}$, $\{1b,2a\}$, $\{1a,3b\}$, $\{1b,3a\}$; каждая пара типов привязана к одному определенному взаимодействию из списка 1–7, см. далее; запись в фигурных скобках назовем *типом* пары. Множество пар в L назовем *областью*, если пары не пересекаются. *Область* разбивается на *подобласти* с одинаковым типом пар. Ко всем парам из подобласти независимо друг от друга применяется одно соответствующее взаимодействие из семи указанных; тем самым выбор взаимодействия однозначно определяется типом подобласти. Итак, каждое из семи взаимодействий связано со своим типом: далее в их описании равенство соединяет типы двух аргументов в левой части с типом их значения в правой части. Знак + в списке взаимодействий 1–7 некоммутативен.

1. $2a+3b=1_b$: две цепи типов $2a$ и $3b$ заменить на цепь типа 1_b; для этого в $3b$-цепи удалить крайнее ребро и инцидентную ему особую (с внутренней стороны) b-вершину склеить с крайней b-вершиной в $2a$-цепи; во всех этих п. 1–7 образуется изолированная обычная вершина и применяется полуторная переклейка.

2. $2b+3a=1_a$: це́пи типов $2b$ и $3a$ заменить на цепь типа 1_a; для этого в $3a$-цепи удалить крайнее ребро и инцидентную ему a-вершину склеить с крайней a-вершиной в $2b$-цепи.

3. $1a+1b=1_b$: цепи типов $1a$ и $1b$ заменить на цепь типа 1_b; для этого удалить крайнее невисячее ребро в $1a$-цепи и инцидентную ему a-вершину склеить с крайней a-вершиной $1b$-цепи.

4. $1a+2b=2$: цепи типов $1a$ и $2b$ заменить на цепь типа 2; для этого в $1a$-цепи удалить крайнее невисячее ребро и инцидентную ему a-вершину склеить с крайней a-вершиной $2b$-цепи.

5. $1b+2a=2$: цепи типов $1b$ и $2a$ заменить на цепь типа 2; для этого в $1b$-цепи удалить крайнее невисячее ребро и инцидентную ему b-вершину склеить с крайней b-вершиной $2a$-цепи.

6. $1a + 3b = 3$: цепи типов $1a$ и $3b$ заменить на цепь типа 3; для этого в $3b$-цепи удалить крайнее невисячее ребро и инцидентную ему b-вершину склеить с крайней b-вершиной $1a$-цепи.

7. $1b + 3a = 3$: цепи типов $1b$ и $3a$ заменить на цепь типа 3; для этого в $3a$-цепи удалить крайнее невисячее ребро и инцидентную ему a-вершину склеить с крайней a-вершиной $1b$-цепи.

Качество взаимодействия $P(s)$ равно разности автономных цен $C(s)$ и $C(\{t\})$, где t — результат взаимодействия на его аргументе s, и от этой разности еще вычитается цена взаимодействия.

Далее приведены очевидные результаты вычисления качества $P(j)$ для каждого из взаимодействий j, $j = \overline{1,7}$. Величина d — суммарный размер компонент множества увеличивается на единицу при склейке и не меняется при полуторной или двойной переклейке.

1–2. $2a + 3b = 1_b$, $2b + 3a = 1_a$. Величины B и D уменьшаются на единицу, f уменьшается на два, $P(1) = P(2) = (1 - w) + 2w - 1 = w$.

3. $1a + 1b = 1_b$. Величина B уменьшается на единицу, f и D уменьшаются на два, $P(3) = (1 - w) + 3w - 1 = 2w$.

4–5. $1a + 2b = 2$, $1b + 2a = 2$. Величины B и D уменьшаются на единицу, f уменьшается на два, $P(4) = P(5) = (1 - w) + 2w - 1 = w$.

6–7. $1a + 3b = 3$, $1b + 3a = 3$. Величины B и D уменьшаются на единицу, f уменьшается на два, $P(6) = P(7) = (1 - w) + 2w - 1 = w$.

Используем, что, согласно приведенным вычислениям, P кратно w.

Рассмотрим множество L цепей вместе с его областью *суммарно максимального качества* взаимодействий по сравнению с любой другой областью для L. Такую область назовем *максимальной*. Поскольку в области пары не пересекаются, взаимодействия выполняются одновременно для всех пар области в произвольном порядке пар.

Опишем *основной алгоритм*, приводящий граф $a + b$ к финальному виду.

Алгоритм начинает работу с исходного общего графа $a + b$ и включает 4 этапа: 1) удалить все петли; 2) вырезать все обычные ребра, полученное множество цепей из особых ребер обозначим через L, а множество цепей и циклов обозначим через M; 3) для L получить максимальную область N и к $\langle L, N \rangle$ применить взаимодействия 1–7; к полученному множеству L_1 цепей добавить все циклы, которые присутствовали в M; и, наконец, 4) выполнить автономное приведение оставшихся компонент к финальному виду.

Алгоритм построения максимальной области N тривиальный: зададим линейный порядок на типах пар, определяемый п. 1–7, и затем для очередного типа последовательно добавляем в N пары из L этого типа без пересечения с предыдущими парами, пока это возможно (не существенно, из каких цепей данного типа составлена очередная пара).

Основной алгоритм описан.

Нетривиальным является обоснование этапа 3: для получения области N используется лемма 2, утверждение о точности алгоритма содержится в заключительной теореме этого раздела, которая использует лемму 1.

Обозначим через $T(G)$ суммарную цену операций в *финальной* последовательности, которую строит предлагаемый алгоритм, примененный к общему графу G. Докажем, что

$$T(G) = C(G) - P(G), \tag{1}$$

где $P(G)$ — суммарное качество взаимодействий для любой максимальной области $N(G)$ и указанного $L(G)$; обозначение $C(G)$ введено перед формулировкой леммы 1, где в качестве M берется множество связных компонент графа G. *Обозначим* через $T'(R)$ суммарную цену операций в финальной последовательности начиная от какого-то промежуточного R.

Равенство $T(R) = T'(R)$ следует из того, что $T(R)$ — минимальная цена для графа R, что будет доказано в теореме.

Итак, для выполнения (1) достаточно для всех графов R в финальной последовательности, которая предлагаемым алгоритмом приводит $a + b$ к финальному виду, проверить, что

$$C(R) - T'(R) = K'(R), \tag{2}$$

где $K'(R)$ — суммарное качество всех взаимодействий в этой последовательности начиная от R. Равенство (2) доказывается индукцией от конца последовательности. Базис очевиден. Для операций-невзаимодействий индуктивный шаг очевиден; для операций-взаимодействий он вытекает из определения качества взаимодействия (порядок для пар внутри одного типа произвольный). Заметим, что $K'(G) = P(G)$, и получим, что

$$T(G) = C(G) - P(G),$$

а используя лемму 1, получим

$$T(G) = (1 - w)(0{,}5d + 0{,}5f - c) + w(B + S + D) - P(G). \tag{3}$$

Л е м м а 2. *Для любого множества L цепей за линейное время строится максимальная область N.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть построена немаксимальная область N пар, включенная в некоторую максимальную область N'. Проверим, что любая пара l наименьшего типа, которая не пересекается ни с какой парой из N, такова, что $N \cup \{l\}$ также содержится в некоторой максимальной области N''. Для этого рассмотрим в качестве l пары всевозможных типов.

1–2. Пусть l типа $\{2a, 3b\}$ или $\{3a, 2b\}$. Рассмотрим первый случай. Если l содержится в N', полагаем $N'' = N'$. Иначе пусть S — множество напарников цепей из пар в $N' \setminus N$, если пара пересекается с l. *Напарник* цепи в паре — другая цепь в этой паре. Напарник помечается знаком $*$ в типе пары. Забегая вперед, заметим, что указываемые далее N'' имеют такое же качество взаимодействий, как N', и потому являются максимальными областями (первый и последний случаи, когда качество N'' строго больше качества N', невозможны, т.е. такой пары l не существует).

Если S пусто, то $N'' = N' \cup \{l\}$; если $S = \{3b^*\}$, то $N'' = \{N' \setminus \{2a, 3b^*\}\} \cup$ $\cup \{l\}$; если $S = \{1b^*\}$, то $N'' = \{N' \setminus \{1b^*, 2a\}\} \cup \{l\}$; если $S = \{2a^*\}$, то $N'' =$

$= \{N' \setminus \{2a^*, 3b\}\} \cup \{l\}$; если $S = \{1a^*\}$, то $N'' = \{N' \setminus \{1a^*, 3b\}\} \cup \{l\}$; если $S = \{3b^*, 2a^*\}$, то $N'' = \{N' \setminus \{2a, 3b^*\} \setminus \{2a^*, 3b\}\} \cup \{l\} \cup \{2a^*, 3b^*\}$; если $S = \{1b^*, 2a^*\}$, то $N'' = \{N' \setminus \{1b^*, 2a\} \setminus \{2a^*, 3b\}\} \cup \{l\} \cup \{1b^*, 2a^*\}$; если $S = \{3b^*, 1a^*\}$, то $N'' = \{N' \setminus \{2a, 3b^*\} \setminus \{1a^*, 3b\}\} \cup \{l\} \cup \{1a^*, 3b^*\}$; если $S = \{1b^*, 1a^*\}$, то $N'' = \{N' \setminus \{1b^*, 2a\} \setminus \{1a^*, 3b\}\} \cup \{l\} \cup \{1a^*, 1b^*\}$.

3. Пусть l типа $\{1a, 1b\}$. Рассуждение аналогично.

4–5. Пусть l типа $\{1a, 2b\}$. Ряд случаев невозможен: например, пересечение пар по $1a$ с напарником $1b^*$ и пересечение по $2b$ с напарником $3a^*$ соответствуют меньшему типу. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

6–7. Типы $\{1b, 2a\}$, $\{1a, 3b\}$ и $\{1b, 3a\}$ рассматриваются аналогично.

Линейное время работы этого алгоритма очевидно. Лемма 2 доказана.

Теорема. *Пусть w — цена вставки и удаления, $w \leqslant 0{,}5$, а цены остальных операций равны единице. Указанный предлагаемый алгоритм строит последовательность операций с минимальной суммарной ценой. Его время и используемая им память линейно зависят от суммарного размера исходных структур.*

Доказательство. Пусть $c(G)$ — минимальная суммарная цена последовательности операций, приводящей общий граф G к финальному виду.

Покажем, что $T(G) = c(G)$ для любого общего графа G. Достаточно проверить, что

$$T(G) \leqslant c(G). \tag{4}$$

Рассмотрим кратчайшую последовательность, приводящую G к финальному виду. Пусть в ней о — первая операция с ценой $c(\text{о})$, применяемая к G, и $\text{о}(G)$ — результат ее применения. Тогда $c(\text{о}(G)) < c(G)$ и можно вести индукцию по $c(G)$.

Далее будет *проверено* ключевое неравенство для любой операции о и любого G:

$$c(\text{о}) \geqslant T(G) - T(\text{о}(G)). \tag{5}$$

Из (5) вытекает (4). Действительно, по предположению индукции имеем: $T(\text{о}(G)) \leqslant c(\text{о}(G))$. Используя (5), получим, что $T(G) \leqslant T(\text{о}(G)) + c(\text{о}) \leqslant c(\text{о}(G)) + c(\text{о}) = c(G)$, т.е. (4).

Итак, перейдем к проверке неравенства (5), которая существенно использует равенство (3), и рассмотрим всевозможные операции о. Как уже упоминалось, P всегда кратна w. *Обозначим* через $T(G)_1$ и $T(G)_2$ первое и второе слагаемые в $T(G)$ из (3).

1. о — *удаление* особой вершины. При переходе от G к $\text{о}(G)$ величина B уменьшается на единицу. Рассмотрим случаи.

1.0. Удаляется изолированная особая вершина, которая считается цепью типа $2a$ или $2b$. При переходе от G к $\text{о}(G)$ величины S, D, c не меняются, d увеличивается на единицу, f уменьшается на единицу. Величина P не меняется или уменьшается на w; действительно, при удалении цепи P по определению не увеличивается, а уменьшаться больше, чем на w, не может, поскольку все пары, содержащие тип $2a$ или $2b$, имеют качество w. Таким образом, T не меняется или уменьшается на w.

1.1. Особая вершина удаляется из цикла или удаляется петля. При переходе от G к $\mathrm{o}(G)$ величина S не меняется (если оба отрезка, примыкающие к удаляемой вершине, четные или удаляемая вершина — единственная в цикле) или увеличивается на единицу, другие величины не меняются. Таким образом, T не меняется или уменьшается на w.

1.2. Из цепи удаляется внутренняя особая вершина, т.е. с обеих сторон от нее имеются другие особые вершины. Тип цепи не меняется: он определяется размером цепи, типами краев (висячие или невисячие) и (в случае невисячего края) длиной крайнего отрезка (если она нечетная, после его вырезания появляется висячее ребро; иначе не появляется). Далее повторяется рассуждение из п. 1.1.

Висячим краем назовем не только край цепи, оканчивающейся висячим ребром, но и край, инцидентный нечетному отрезку.

1.3. Из цепи удаляется висячая вершина. Рассмотрим случаи.

1.3.1. Удаляемая особая вершина — единственная особая вершина в цепи. Цепь может иметь тип $2a$, $2b$ или 1, поскольку после вырезания обычных ребер получается цепь с одной особой вершиной, висячей или изолированной. Поэтому P не меняется или уменьшается на w. Другие величины не меняются. Таким образом, T не меняется или уменьшается на w.

1.3.2. Удаляемая особая вершина не единственная особая вершина в цепи. Если при переходе от G к $\mathrm{o}(G)$ величина S не меняется (т.е. отрезок, примыкающий к висячему ребру, четный), то висячий край переходит в невисячий, и возможно одно из следующих изменений типа цепи: $1a \to 3a$, $1b \to 3b$, $2 \to 1$, $2a \to 1a$, $2b \to 1b$, $1 \to 3$. В первых трех случаях D не меняется, P не меняется или уменьшается на w. Действительно, P не может уменьшиться больше, чем на w, поскольку единственная пара $\{1a, 1b\}$, имеющая качество $2w$, при замене, скажем, $1a \to 3a$ превращается в пару с качеством w. В последних трех случаях D увеличивается на единицу, P не меняется или увеличивается на w (доказывается рассмотрением обратной замены). Другие величины не меняются. Таким образом, T не меняется или уменьшается на w. Если S увеличивается на единицу (т.е. отрезок, примыкающий к висячему ребру, нечетный), то висячий край остается висячим и тип цепи не меняется. Поэтому D и P не меняются. Таким образом, T не меняется.

1.4. Из цепи удаляется невисячая крайняя особая вершина, т.е. справа или слева от нее нет других особых вершин. Рассмотрим случаи.

1.4.1. Удаляемая вершина — единственная особая вершина в цепи. Цепь может иметь тип $3a$, $3b$, $2a$, $2b$ или 1, поскольку после вырезания обычных ребер получается цепь с одной особой вершиной. Величина P не меняется или уменьшается на w. Если цепь имеет тип $3a$ или $3b$, то S увеличивается на единицу (поскольку оба отрезка, примыкающие к удаляемой вершине, четные, а получившийся отрезок нечетный), D уменьшается на единицу. Таким образом, T не меняется или уменьшается на w. Если цепь имеет тип $2a$, $2b$ или 1, то D и S не меняются (в случае типов $2a$ или $2b$ два нечетных отрезка заменяются на один нечетный, в случае типа 1 четный и нечетный отрезки заменяются на один четный). Таким образом, T не меняется или уменьшается на w.

1.4.2. Удаляемая вершина не является единственной особой вершиной в цепи. Если при переходе от G к о(G) величина S не меняется (т.е. крайний отрезок нечетный, а следующий — четный), то висячий край переходит в невисячий, и возможно одно из следующих изменений типа цепи: $1a \to 3a$, $1b \to 3b$, $2 \to 1$, $2a \to 1a$, $2b \to 1b$, $1 \to 3$. Рассуждение совпадает с рассуждением из п. 1.3.2. Если S увеличивается на единицу, то тип цепи не меняется (тогда T не меняется) или (если оба примыкающие к удаляемой вершине отрезка четные) невисячий край переходит в висячий. Тогда возможно одно из следующих изменений типа цепи: $1a \to 2a$, $1b \to 2b$, $3 \to 1$, $3a \to 1a$, $3b \to 1b$, $1 \to 2$. В первых трех случаях D уменьшается на единицу, P не меняется или уменьшается на w. В последних трех случаях D не меняется, P не меняется или увеличивается на w. Таким образом, во всех случаях величина T не меняется или уменьшается на w.

2. о — *склейка* (добавление ребра).

2.1. Рассмотрим случай, когда склеиваются края одной и той же цепи, что возможно только для нечетных цепей. При этом d увеличивается на единицу, f уменьшается на единицу, c увеличивается на единицу или не меняется (последний случай имеет место, если цепь имеет тип $2a'$ или $2b'$, тогда в результате операции получается петля), так что $T(G)_1$ уменьшается на $1 - w$ или не меняется. Рассмотрим типы цепи. Для цепи типа 0 величина S уменьшается на единицу, поскольку нечетный отрезок переходит в циклический, на единицу большей длины. Таким образом, T уменьшается на единицу (напомним: сейчас $c(\text{о}) = 1$). Для цепи типа $1a$ или $1b$ величины B и S не меняются, D уменьшается на единицу, P не меняется или уменьшается на w или на $2w$. Таким образом, T меняется не более чем на единицу. Для цепи типа $2a$ или $2b$ величина D не меняется, P не меняется или уменьшается на w. Если с обоих краев цепи имеются висячие ребра, то при склейке их концов B уменьшается на единицу, S не меняется. Если хотя бы с одной стороны висячее ребро "заменено" нечетным отрезком, то B не меняется, S уменьшается на единицу. Если цепь имеет тип $2a'$ или $2b'$, то B и S не меняются. Во всех случаях T изменится не более чем на единицу. Для цепи типа $3a$ или $3b$ величины B и S не меняются, D уменьшается на единицу, P не меняется или уменьшается на w. Таким образом, T изменится не более чем на единицу.

2.2. Рассмотрим случай, когда склеиваются края разных цепей. В таблице приведен результат склейки концов невисячих ребер, помеченных a, или висячих ребер, помеченных b (таким образом, добавляемое ребро имеет метку b). Будем называть такие склейки *a-склейками* (симметрично — *b-склейками*). Результат b-склейки равен результату *симметричной* a-склейки, которая получается, если в склеиваемых цепях поменять местами метки a и b.

Обозначения типов краев: $0a$ — край нечетной цепи типа 0, 0 — край четной цепи типа 0, $1a$ — висячий край цепи типа $1a$, $1a'$ — невисячий край цепи типа $1a$, $2a$ — край цепи типа $2a$, $3a$ — край цепи типа $3a$, 1 — висячий край цепи типа 1, $1'$ — невисячий край цепи типа 1, 2 — край цепи типа 2, 3 — край цепи типа 3.

Таблица. Результаты склейки краев двух цепей

	$0a$	0	$1a$	$1a'$	$2a$	$3a$	1	$1'$	2	3
$0a$	(0) $[0]$ $0a$	(0) $[0]$ 0	(0) $[0]$ $1a$	(0) $[0]$ $1a$	(0) $[0]$ $2a$	(0) $[0]$ $3a$	(0) $[0]$ 1	(0) $[0]$ 1	(0) $[0]$ 2	(0) $[0]$ 3
0	0 $[0]$ 0	(1) $[0]$ $0b$	$(0,w,2w)$ $[0,-w,-2w]$ 3	$(0,w,2w)$ $[0,-w,-2w]$ 2	$(0,w)$ $[0,-w]$ 1	$(0,w)$ $[0,-w]$ 1	$(1,1-w)$ $[0,w]$ $3b$	$(1,1-w)$ $[0,w]$ $2b$	$(1,1-w,1-2w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(1,1-w,1-2w)$ $[0,w,2w]$ $1b$
$1a$	0 $[0]$ $1a$	$(0,w,2w)$ $[0,-w,-2w]$ 3	$(-2w,-w,0,w)$ $[0,-w,-2w,-3w]$ $3a$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ $1a$	$(-w,0)$ $[0,-w]$ $1a$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ $3a$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 3	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 1	$(-2w,-w,0)$ $[0,-w,-2w]$ 1	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 3
$1a'$	0 $[0]$ $1a$	$(0,w,2w)$ $[0,-w,-2w]$ 2	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ $1a$	$(-2w,-w,0,w)$ $[0,-w,-2w,-3w]$ $2a$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ $2a$	$(-w,0)$ $[0,-w]$ $1a$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 1	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 2	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 2	$(-2w,-w,0)$ $[0,-w,-2w]$ 1
$2a$	0 $[0]$ $2a$	$(0,w)$ $[0,-w]$ 1	$(-w,0)$ $[0,-w]$ $1a$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ $2a$	$(-w,0)$ $[0,-w]$ $2a$	$(w,0,-w)$ $[-w,0,w]$ $1a$	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 1	$(0,w)$ $[0,-w]$ 2	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 2	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 1
$3a$	0 $[0]$ $3a$	$(0,w)$ $[0,-w]$ 1	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ $3a$	$(-w,0)$ $[0,-w]$ $1a$	$(w,0,-w)$ $[-w,0,w]$ $1a$	$(-w,0)$ $[0,-w]$ $3a$	$(0,w)$ $[0,-w]$ 3	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 1	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 1	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 3
1	0 $[0]$ 1	$(1,1-w)$ $[0,w]$ $3b$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 3	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 1	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 1	$(0,w)$ $[0,-w]$ 3	$(1-w,1-2w)$ $[0,w]$ $3b$	$(1,1-w,1-2w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(1-w,1-2w,1-3w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(1-w,1-2w)$ $[0,w]$ $3b$
$1'$	0 $[0]$ 1	$(1,1-w)$ $[0,w]$ $2b$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 1	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 2	$(0,w)$ $[0,-w]$ 2	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 1	$(1,1-w,1-2w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(1-w,1-2w)$ $[0,w]$ $2b$	$(1-w,1-2w)$ $[0,w]$ $2b$	$(1-w,1-2w,1-3w)$ $[0,w,2w]$ $1b$
2	0 $[0]$ 2	$(1,1-w,1-2w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(-2w,-w,0)$ $[0,-w,-2w]$ 1	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 2	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 2	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 1	$(1-w,1-2w,1-3w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(1-w,1-2w)$ $[0,w]$ $2b$	$(1-2w,1-3w)$ $[0,w]$ $2b$	$(1-w,1-2w,1-3w)$ $[0,w,2w]$ $1b$
3	0 $[0]$ 3	$(1,1-w,1-2w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(-w,0,w)$ $[0,-w,-2w]$ 3	$(-2w,-w,0)$ $[0,-w,-2w]$ 1	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 1	$(-w,0)$ $[0,-w]$ 3	$(1-w,1-2w)$ $[0,w]$ $3b$	$(1-w,1-2w,1-3w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(1-w,1-2w,1-3w)$ $[0,w,2w]$ $1b$	$(1-2w,1-3w)$ $[0,w]$ $3b$

Перебираем возможные пары типов краев цепей. В каждой ячейке таблицы в круглых скобках приведены изменения T при переходе от G к $\mathrm{o}(G)$, где 0 означает "не меняется", $(-w)$ — "уменьшается на w", w — "увеличивается на w", $(1-w)$ — "увеличивается на $1-w$" и т.д.; другие изменения невозможны. В квадратных скобках приведены соответствующие изменения P с такими же обозначениями. В конце ячейки указан тип цепи, получающейся в результате склейки исходных цепей. Таблица симметрична относительно главной диагонали.

Проверим ячейку $(1a, 1a)$, остальные заполняются аналогично. Если обе исходные цепи четные, то $T(G)_1$ увеличивается на $1-w$, иначе не меняется. После склейки получается цепь типа $3a$. Если обе цепи содержали висячие ребра, B уменьшается на единицу, S не меняется. Если хотя бы в одной из исходных цепей вместо висячего ребра присутствует нечетный крайний отрезок, то, наоборот, B не меняется, S уменьшается на единицу. Величина D уменьшается на единицу, P не меняется или уменьшается на w, на $2w$ или на $3w$. Покажем, что P не может уменьшиться на $4w$ и более. Рассмотрим напарников двух цепей типа $1a$ в максимальной области. Единственный случай, когда сумма качеств двух пар равна $4w$, соответствует напарникам типа $1b$. Тогда один из них может спариться с "новой" цепью типа $3a$, что дает увеличение качества на w. Величина P не увеличится, иначе при обратной замене она бы уменьшилась, что невозможно, поскольку любой напарник цепи типа $3a$ спаривается с $1a$.

Итак, исходное утверждение для склейки следует из того, что согласно таблице T меняется не более чем на единицу.

3. o — *разрез*. Операция обратна склейке, так что результат следует из п. 2.

4. o — *полуторная переклейка*. Выделим три случая.

4.1. Операция применяется к одной цепи, т.е. склейка осуществляется с краем той же цепи, в которой сделана расклейка. Два случая.

4.1.1. Происходит инверсия крайнего участка цепи. Рассмотрим промежуточное состояние, когда разрез сделан, а склейка еще не сделана. Из этого состояния можно перейти в начальное состояние склейкой, а можно в конечное — склейкой с другим краем той же цепи. Обе склейки являются a- или b-склейками. В последнем случае рассмотрим симметричные b-склейкам a-склейки. Перебираем пары ячеек из таблицы, которые соседние по горизонтали и соответствуют паре упомянутых склеек (это пары столбцов, где один край цепи отличается "штрихом"), или пары совпадающих ячеек (где края цепи не различаются). Надо проверить невозможность случая, в котором модуль разности изменений T при переходе из промежуточного состояния в начальное и конечное превышает единицу.

Рассмотрим, например, пару ячеек $(1a, 1a)$ и $(1a, 1a')$, другие пары рассматриваются аналогично. При переходе в начальное состояние, соответствующее первой ячейке, изменение T равно $(-2w + iw)$, где $i = 0, 1, 2, 3$. При переходе в конечное состояние, соответствующее второй ячейке, изменение T равно $(-w + jw)$, где $j = 0, 1, 2$. Разность этих выражений (конечное минус начальное) равна $w - (i - j)w$. Соответствующая разность изменений P равна $0 + (i - j)w$. При рассматриваемой замене $3a \to 1a$ величина P не меняется или увеличивается на w. Отсюда $i - j = 0$ или $i - j = 1$. Тогда первое выражение равно w или нулю, что по модулю не превышает единицы.

4.1.2. Происходит зацикливание крайнего участка цепи. Оно является композицией двух операций: разреза исходной цепи на две цепи и замыкания одной из них в цикл или петлю склейкой. Рассмотрим промежуточное состояние, когда разрез сделан, а склейка еще не сделана. Из этого состояния можно перейти в начальное состояние склейкой, а можно в конечное — склейкой, зацикливающей цепь. Обе склейки являются a- или b-склейками. Далее аналогично предыдущему случаю.

4.2. Операция применяется к циклу (или петле) и цепи, т.е. происходит разрез цикла (или петли) и удлинение получившейся цепи. Эта операция обратна предыдущей, поэтому и здесь изменение T по модулю не превышает единицы.

4.3. Операция применяется к двум цепям: первая разрезаемая, вторая склеиваемая. Обозначим через C цепь, являющуюся той частью разрезанной цепи, которая склеивается со второй цепью, обозначенной C_2. Другую часть разрезаемой цепи обозначим C_1. При наличии трех цепей C, C_1, C_2 начальное состояние (до операции) достигается склейкой C с C_1, а конечное (после операции) — склейкой C с C_2. Чтобы показать, что T в начальном и конечном состояниях отличается не более чем на единицу, нужно проверить, что разность ее изменения при переходах по модулю не превышает единицы. Перебираем тройки типов склеиваемых краев. Поскольку обе склейки являются a- или b-склейками, то достаточно рассмотреть случай a-склеек.

Если в начальном и конечном состояниях значение величины P одно и то же, то утверждение следует из того, что при рассматриваемой полуторной переклейке $T(G)_1$ меняется не более чем на $1 - w$, а $T(G)_2$ — не более чем на w. В частности, это условие выполняется, если типы склеиваемых краев C_1 и C_2 совпадают. Осталось перебрать такие тройки краев цепей C, C_1, C_2, что последние два типа различны. Это означает, что нужно перебрать пары различных ячеек, находящихся в одной строке таблицы. Здесь строка соответствует краю цепи C, а два столбца — краям цепей C_1 и C_2. Для каждой *такой пары* рассмотрим разности изменения T и P (как в п. 4.1.2). Тип замены $\langle$тип в левой ячейке, тип в столбце правой$\rangle \to \langle$тип в правой ячейке, тип в столбце левой$\rangle$ ограничивает последнюю разность. Проверим: при этом ограничении первая разность по модулю не превосходит единицы.

Рассмотрим пару ячеек $(1a, 0)$ и $(1a, 1a)$, остальные пары рассматриваются аналогично. При переходе в начальное состояние (склейка по первой ячейке) изменение T равно $0 + iw$, где $i = 0, 1, 2$. При переходе в конечное состояние (склейка по второй ячейке), оно равно $(-2w + jw)$, где $j = 0, 1, 2, 3$. Разность этих выражений (конечное минус начальное) равна $(-2w - (i - j)w)$. Соответствующая разность изменений P равна $0 + (i - j)w$. Переходу из начального состояния в конечное соответствует замена $\{3, 1a\} \to \{3a, 0\}$. Поскольку типы 3 и 0 не участвуют во взаимодействиях, P не меняется или уменьшается на w. Отсюда $i - j$ равно нулю или минус единице. Тогда первая разность равна $(-2w)$ или $(-w)$, что по модулю не превышает единицы.

5. о — двойная переклейка. Выделим три случая.

5.1. Обе расклейки происходят в одной цепи или в одном цикле. Рассмотрим цепь, цикл рассматривается аналогично.

5.1.1. Инверсия участка в цепи. Величина $T(G)_1$ и размер цепи не меняются. Случай, когда в инвертируемом отрезке нет особых вершин, очевиден. Иначе рассмотрим две возможности.

1. Две особые вершины отождествляются, т.е. B уменьшается на единицу. Если обе расклейки внутренние (т.е. с обеих сторон от каждой расклейки есть особые вершины), то тип цепи не меняется, как и D и P. Вместо двух примыкающих к расклейкам отрезков (отсутствие отрезка считаем отрезком длины ноль) возникает один отрезок длины на единицу большей суммы длин исходных отрезков. Отрезки не крайние, поэтому S не меняется или увеличивается на единицу. Пусть одна расклейка внутренняя, а другая внешняя. Если четность крайнего отрезка не меняется, то проходит предыдущее рассуждение. Если четный крайний отрезок заменяется нечетным, то S увеличивается на единицу. Возможные варианты изменения типа цепи: $3a \to 1a$, $1 \to 2$, $1a \to 2a$, $3 \to 1$. В первых двух случаях D не меняется, P не меняется или увеличивается на w. В последних двух случаях D уменьшается на единицу, P не меняется или уменьшается на w. Если нечетный крайний отрезок заменяется четным, S не меняется. Возможные варианты изменения типа цепи: $1a \to 3a$, $2 \to 1$, $2a \to 1a$, $1 \to 3$. В первых двух случаях D не меняется, P не меняется или уменьшается на w. В последних двух случаях D увеличивается на единицу, P не меняется или увеличивается на w. Во всех случаях T меняется не более чем на w. Случай, когда обе расклейки внешние, невозможен при отождествлении особых вершин.

2. Не происходит отождествления двух особых вершин, т.е. B не меняется. Если обе расклейки внутренние, то тип цепи не меняется, как и D и P. Два отрезка, примыкающих к расклейкам, заменяются на два других отрезка той же суммарной длины, S меняется не более чем на единицу. Пусть одна расклейка внутренняя, а другая внешняя. Если четность крайнего отрезка не меняется, то проходит рассуждение из предыдущего случая (когда обе расклейки внутренние). Если четный крайний отрезок заменяется нечетным, то S не меняется или увеличивается на единицу. Возможные варианты изменения типа цепи: $3a \to 1a$, $1 \to 2$, $1a \to 2a$, $3 \to 1$. В первых двух случаях D не меняется, P не меняется или увеличивается на w. В последних двух случаях D уменьшается на единицу, P не меняется или уменьшается на w. Если нечетный крайний отрезок заменяется четным, то S не меняется или уменьшается на единицу. Возможные варианты изменения типа цепи: $1a \to 3a$, $2 \to 1$, $2a \to 1a$, $1 \to 3$. В первых двух случаях D не меняется, P не меняется или уменьшается на w. В последних двух случаях D увеличивается на единицу, P не меняется или увеличивается на w. Пусть обе расклейки внешние. Если оба крайних отрезка имели одинаковую четность и сохранили ее, то измениться может лишь S и не более чем на единицу. Если оба отрезка были четными, а стали нечетными, то S увеличивается на единицу. Возможные варианты изменения типа цепи: $3a \to 2a$, $3 \to 2$. Величина D уменьшается на единицу, P меняется не более чем на w. Если оба отрезка были нечетными, а стали четными, то S уменьшается на единицу. Возможные

варианты изменения типа цепи: $2a \to 3a$, $2 \to 3$. Величина D увеличивается на единицу, P меняется не более чем на w. Если один отрезок был четным, а другой нечетным и такое положение осталось, то не меняются никакие величины. Во всех случаях T меняется не более чем на w.

5.1.2. Разбиение цикла на два цикла или на цикл и петлю (вырезание цикла или петли из цикла): $T(G)_1$ уменьшается на $1-w$ или не меняется, $T(G)_2$ меняется не более чем на w, P не меняется. Поэтому T меняется не более чем на единицу.

5.1.3. Вырезание участка из цепи и его зацикливание: $T(G)_1$ уменьшается на $1-w$ или не меняется. Аналогично п. 5.1.1, хотя здесь возможен случай, когда две особые вершины отождествляются, а обе расклейки внешние. Тогда два крайних отрезка цепи сливаются в один, длина которого на единицу больше суммы длин исходных отрезков. Если оба отрезка четные, то S увеличивается на единицу, а цепь типа $3a$ или $3b$. Поэтому D уменьшается на единицу, P не меняется или уменьшается на w. Если один или оба отрезка нечетные, то S не меняется, а цепь типа $2a$, $2b$ или 1. Поэтому D не меняется, P не меняется или уменьшается на w. Таким образом, разность $T(G)_2 - P$ меняется не более чем на w, а T — не более чем на единицу.

5.2. Одна расклейка происходит в цепи, другая в цикле или петле, т.е. происходит разрыв цикла или петли и его вставка в цепь. Величина $T(G)_1$ увеличивается на $1-w$ или не меняется. Если не происходит отождествления двух особых вершин, то операция обратна к рассмотренной в п. 5.1.2. Иначе B уменьшается на единицу. Если расклейка в цепи внутренняя, то проходит рассуждение из п. 5.1.1, относящееся к случаю, когда обе рассматриваемые там расклейки внутренние. Если расклейка цепи внешняя, то проходит рассуждение из п. 5.1.1, относящееся к случаю, когда одна из рассматриваемых там расклеек внешняя.

5.3. Каждая расклейка происходит в своей цепи.

5.3.1. Обе расклейки внутренние. Как и раньше, $B+S$ меняется не более чем на единицу. Чтобы проследить за изменениями величин D и P, рассмотрим типы обеих цепей.

1. Обе цепи́ нечетные и обе a- или b-це́пи. Величина $T(G)_1$ не меняется. Если обе цепи типа $1a$, то единственная нетождественная смена типов — переход этой пары в пару цепей типов $2a$ и $3a$: величина D уменьшается на единицу. Тогда P не меняется или уменьшается на w или на $2w$. Любая другая пара типов исходных цепей (кроме $2a$ и $3a$, дающих обратный переход) приводит к тождественному результату. Тип $1b$ рассматривается аналогично.

2. Обе цепи́ нечетные и одна a-, а вторая b-це́пи. Если пара их типов $(1a, 1b)$, то при переклейке она переходит в пару $(1,1)$ или в пару $(2,3)$: $T(G)_1$ уменьшается на $1-w$. В первом случае D уменьшается на 2, P уменьшается на $2w$. Во втором случае D уменьшается на единицу, P уменьшается на $2w$. Если пара исходных типов $(1a, 2b)$, то при переклейке она переходит в пару $(1,2)$: $T(G)_1$ уменьшается на $1-w$, D уменьшается на единицу, P уменьшается на w или на $2w$. Аналогично рассматривается пара $(1a, 3b)$. Если пара исходных типов $(2a, 2b)$, то при переклейке она переходит в пару $(2,2)$: $T(G)_1$ уменьшается на $1-w$, D не меняется, P не меняется или уменьша-

ется на w или на $2w$. Аналогично рассматривается пара $(3a, 3b)$. Если такая пара $(2a, 3b)$, то при переклейке она переходит в пару $(1, 1)$: $T(G)_1$ уменьшается на $1 - w$, D уменьшается на единицу, P уменьшается на w. Аналогично пара $(3a, 2b)$.

3. Обе цепи́ четные: $T(G)_1$ не меняется. Единственный нетривиальный переход относится к парам $(1, 1)$ и $(2, 3)$, остальные переходы тождественные или обратные к рассмотренным в п. 2. При переходе пары $(2, 3)$ в пару $(1, 1)$ величина D уменьшается на единицу, P не меняется.

4. Одна цепь нечетная, а другая — четная: $T(G)_1$ не меняется. Если пара $(1a, 1)$ переходит в $(2a, 3)$, то D не меняется, P не меняется или уменьшается на w. Аналогично переход в пару $(3a, 2)$. Если пара $(1a, 2)$ переходит в $(2a, 1)$, то D уменьшается на единицу, P не меняется или уменьшается на w. Аналогично переход пары $(1a, 3)$ в $(3a, 1)$. Переход пары $(2a, 1)$ в $(1a, 2)$ обратный к рассмотренному выше. Для пары $(2a, 2)$ возможен лишь тождественный переход. Если пара $(2a, 3)$ переходит в $(3a, 2)$, то D не меняется, P меняется не более чем на w. Переходы $(2a, 3) \to (1a, 1)$, $(3a, 1) \to (1a, 3)$, $(3a, 2) \to (1a, 1)$ — обратные к рассмотренным выше. Для пары $(3a, 3)$ возможен лишь тождественный переход.

5.3.2. Хотя бы одна из расклеек внешняя: задача сводится к случаю полуторной переклейки или склейки. Будем называть упомянутую расклейку и тот край цепи, к которому она примыкает, *внешними*. Другую расклейку из о назовем *внутренней*, как и то ребро, которое она удаляет. Если внешняя расклейка находится не на крайнем ребре и не на соседнем к нему ребре, то удаляем два обычных ребра с внешнего края. При этом T уменьшится на единицу как в исходном графе, так и в получившемся в результате преобразования: $T(G)_1$ уменьшится на $1 - w$, $T(G)_2$ — на w. Поэтому достаточно рассмотреть случаи, когда внешняя расклейка находится на крайнем ребре цепи или на втором ребре с краю.

1. Внешняя расклейка находится на втором с краю ребре. Если оно обычное, удалим два крайних ребра вместе с внешней расклейкой, заменив двойную переклейку на полуторную. Тогда T уменьшится на единицу как в исходном графе, так и в получившемся, что сводит вопрос к рассмотренному с полуторной переклейкой. Если ребро с внешней расклейкой особое, то удалим крайнее ребро вместе с его концами, заменив нечетный крайний отрезок длины единица на висячее ребро (особая вершина становится концом висячего ребра). Снова заменим двойную переклейку полуторной с уменьшением на единицу величины T в обоих графах.

2. Внешняя расклейка находится на крайнем ребре и оно обычное. Если внутреннее ребро обычное или его особая вершина находится со стороны, склеиваемой с внешним краем, то сдвинем внешнюю расклейку за край цепи (т.е. сделаем ее “фиктивной”), а внутреннюю расклейку — на соседнее ребро в противоположную от возможной особой вершины сторону (а если это ребро отсутствует, то за край цепи). Таким образом, двойная переклейка заменяется полуторной (или соответственно тождественной операцией). Результат операции не изменится. Если особая вершина находится с другой стороны, то сдвинем внешнюю расклейку от края на соседнее ребро и соответствен-

но сдвинем на соседнее ребро внутреннюю расклейку. Результат операции не изменится, и вопрос сводится к расклейке, рассмотренной в п. 1.

3. Внешняя расклейка находится на крайнем ребре и оно особое. Если внутреннее ребро обычное или его особая вершина находится со стороны, склеиваемой с внешним краем, то рассуждаем так же, как в п. 2. Иначе сдвинем внешнюю расклейку за край цепи, а внутреннюю расклейку — на соседнее ребро в противоположную от особой вершины сторону (а если это ребро отсутствует, то за край цепи). Таким образом, двойная переклейка заменяется на полуторную переклейку или на склейку. Чтобы из результата второй операции (полуторной переклейки или склейки) получить результат первой операции (двойной переклейки), следует склеить две особые вершины, удалив разделяющее их обычное ребро, и добавить цепь из одного обычного ребра (в случае склейки), или добавить к цепи два крайних обычных ребра (если внутренняя расклейка сдвинулась на обычное ребро), или заменить висячее ребро крайним отрезком длины единица (если внутренняя расклейка сдвинулась на особое ребро). Во всех случаях преобразование не меняет T, что и завершает разбор случаев.

Линейность времени и памяти алгоритма очевидна. Теорема даказана.

5. Заключение

Описан алгоритм построения минимальной по суммарной цене последовательности фиксированных операций с заданными ценами, преобразующих один граф в другой. Такая последовательность называется кратчайшей. Относительно графов предполагается, что степень каждой вершины не больше двух; такие графы называются структурами. Поскольку задача NP-полная, она не может быть решена никаким даже полиномиальным алгоритмом без ограничений на цены операций. В статье получен линейный алгоритм решения задачи для случая, если цена c_2 операций вставки и удаления не превышает половины цены c_1 стандартных операций (двойной и полуторной переклеек, разреза и склейки). Подготовлена работа, в которой авторами получен линейный алгоритм решения этой задачи для случая $0{,}5c_1 \leqslant c_2 \leqslant c_1$, что вместе охватывает случай $c_2 \leqslant c_1$, и в настоящее время исследуется случай $c_1 \leqslant c_2$ (для случая $c_1 = c_2$ алгоритм ранее опубликован в [6]). Все алгоритмы сопровождаются строгими доказательствами того, что они находят минимумы в соответствующих оптимизационных задачах на графах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горбунов К.Ю., Любецкий В.А.* Линейный алгоритм кратчайшей перестройки графов при разных ценах операций // Информац. процессы. 2016. Т. 16. № 2. С. 223–236.
2. *Lyubetsky V.A., Gershgorin R.A., Seliverstov A.V., Gorbunov K.Yu.* Algorithms for Reconstruction of Chromosomal Structures // BMC Bioinformatics. 2016. V. 17. P. 40.1–40.23.
3. *Lyubetsky V.A., Gershgorin R.A., Gorbunov K.Yu.* Chromosome Structures: Reduction of Certain Problems with Unequal Gene Content and Gene Paralogs to Integer Linear Programming // BMC Bioinformatics. 2017. V. 18. P. 537.1–537.18.

4. *Braga M.D.V., Stoye J.* Sorting Linear Genomes with Rearrangements and Indels // IEEE/ACM Trans. on Computational Biology and Bioinformatics. 2015. V. 12. No. 3. P. 1–13.
5. *Yin Z., Tang J., Schaeffer S.W., Bader D.A.* Exemplar or Matching: Modeling DCJ Problems with Unequal Content Genome Data // J. Combinatorial Optimization. 2016. V. 32. No. 4. P. 1165–1181.
6. *Горбунов К.Ю., Любецкий В.А.* Линейный алгоритм минимальной перестройки структур // Пробл. передачи информации. 2017. Т. 53. Вып. 1. С. 60–78.

Статья представлена к публикации членом редколлегии П.Ю. Чеботаревым.

Поступила в редакцию 31.01.2017