Алгебра и логика, 29, № 1(1990), 15-28

УДК 510.67:512.55

МОДЕЛЬНАЯ ПОЛНОТА ТЕОРИИ И ОЦЕНКА ФОРМУЛ

В.А.ЛЮБЕЦКИЙ

А.Макинтайр в [I] рассматривает специальные модельно полные теории, которые он определяет тем условием, что приводящая E-формула не содержит отрицаний (такие теории он назвал позитивно модельно полными). Например, такова теория полей, в которой $x \neq 0$ можно заменить на $\exists z\,(x \cdot z = 1)$. Для языка теории колец это по существу единственный пример. Вероятно поэтому автор работы [I], приводя основную теорему из [I] также в [2, с. 175], делает это только для теории полей.

В [I, с. 88] говорится: "Мы хотели бы увидеть расширение вышеуказанного метода на некоммутативные бирегулярные кольца". В [2] эта задача расширяется следующим образом: "Будут ли иметь модельный компаньон теории некоторых естественных булевых расширений?...булево расширение является структурой сечений пучка над булевым пространством". Булево пространство - это вполне несвязный компакт (стоуново пространство).

В этой заметке приводятся некоторые ответы на вопросы А.Макинтайра, устанавливается связь между некоторыми традиционными вопросами теории алгебраических систем и гейтинговозначным (нестандартным в широком смысле) анализом.

В [I] параллельно с языком теории колец рассматривается и общий язык 1-го порядка, включающий язык теории колец, а также и общие пучки (накрывающие пространства) над стоуновыми пространствами X. При этом, естественно, на атомарные предикаты этого более широкого языка в той или иной форме налагаются условия, делающие их похожими на предикат =, а от выбора пучка мало что зависит. В этой заметке мы ограничимся языком теории колец и соответственно пирсовским пучком для произвольного кольца (ассоциативного и с 1). Аналогично только что упомянутому обобщению в [I] наши результаты также переносятся на общие языки и пучки над X, в том числе на пучки над не стоуновым пространством. В таком виде они появятся в другой работе автора.

Напомним, что любое кольцо K изоморфно кольцу (и далее отождествляется с ним) всех глобальных непрерывных сечений пучка $\mathcal{F}$, определенного на топологии $\mathcal{T}$ стоунова пространства $X=X(K)$ булевой алгебры $\mathcal{B}=\mathcal{B}(K)$ всех центральных идемпотентов кольца K (вместо $\mathcal{B}$ пишут и $\mathcal{J}dc\,K$). При этом слой (локализация) K_p пучка $\mathcal{F}$ (соответственно кольца K) над точкой $p\in X$ (p - простой идеал в $\mathcal{B}$) определяется как $K/\bar{p}$, где $\bar{p}\leftrightharpoons p\cdot K$. Запись $\{K_p\}\models\varphi$ означает общезначимость φ во всех слоях (локализациях) кольца K. При желании здесь и далее можно не упоминать о пучках, говоря только о кольце K и семействе его фактор-колец K_p, также как можно не упоминать о топологии $\mathcal{T}$ и пространстве $X(K)$, оперируя только в терминах, относящихся к $\mathcal{B}(K)$.

Прежде всего еще раз сформулируем задачу. Пусть T - теория в языке колец, включающая аксиомы колец и аксиому $0\neq 1$ и имеющая модельный компаньон T^*. Хотя это не существенно, но удобнее считать, что $T\subseteq T^*$. Образуем $\mathcal{K}=\{K\mid\{K_p\}\models T\}$ и $\mathcal{K}^*=\{K\mid\{K_p\}\models T^*,\ K\models\Phi_1\wedge\ldots\wedge\Phi_m\}$, где $m\geq 0$ и формулы $\Phi_1,\ldots,\Phi_m$ зависят только от класса $\mathcal{K}$. Ограничимся здесь случаем, когда $m=3$ и $\Phi_1=\forall k\exists e_0\forall t\forall e\exists t_1\exists t_2\,(e_0^2=e_0\wedge e_0t=te_0\wedge(e^2=$

$$=e\wedge et_1=t_1e\wedge ek=0\Rightarrow e\leq e_0)\wedge(e^2=e\wedge et_2=t_2e\wedge e\leq e_0\Rightarrow ek=0))$$

- хорнова формула, выражающая свойство "нормальности" кольца K, $\Phi_2=\forall e\exists t\times$

$$\times\exists e_0\forall t_1\,(e^2=e\wedge et=te\Rightarrow e_0^2=e_0\wedge e_0t_1=t_1e_0\wedge(e_0=0\Rightarrow 0=1)\wedge(e_0=e\Rightarrow 0=1)\wedge$$

$\wedge(e=0\vee e_0\cdot e=e)$- формула, выражающая безатомность кольца K (или, что то же самое, безатомность булевой алгебры $\mathcal{B}(K)$ или отсутствие изолированных точек в $X(K)$). Эта не хорнова формула может быть заменена эквивалентным ей списком хорновых формул, так как класс $\{K\mid K\models\Phi_2\}$ замкнут относительно фильтрованных произведений. Наконец, $\Phi_3=\forall e\forall t(e^2=e\Rightarrow et=te)$ - хорнова формула, выражающая абелевость кольца K. Мы покажем (следствие "6" к предложению 2), что каждая аксиома класса $\mathcal{K}^*$ вида $\{K_p\}\models\varphi$, где $\varphi\in T^*$, эквивалентна аксиоме вида $K\models\varphi'$, где φ'- хорнова формула. Поэтому класс $\mathcal{K}^*$ аксиоматизируем и, более того, хорнов. При одном условии на класс $\mathcal{K}^*$ он модельно полон (теорема 2), т.е. его теория $Th\,\mathcal{K}^*$ модельно полна. При одном условии на теорию T^* класс $\mathcal{K}$ вложим в класс $\mathcal{K}^*$, т.е. $\forall K\in\mathcal{K}\exists L\in\mathcal{K}^*,\ K\subseteq L$ (теорема 3). Поэтому класс $\mathcal{K}^*$- хорнов модельный компаньон для класса $\mathcal{K}$. (Естественно, класс $\mathcal{K}^*$ называется модельным компаньоном для класса $\mathcal{K}^*$, если эти классы взаимно вложимы и класс $\mathcal{K}^*$ модельно полон, т.е. $\forall K,L\in\mathcal{K}^*,\ K\subseteq L\Rightarrow$ $\Rightarrow K\preccurlyeq L$). Поэтому если класс $\mathcal{K}$ аксиоматизируем, то $Th\,\mathcal{K}^*$ - хорнов модельный компаньон для теории $Th\,\mathcal{K}$ (теорема 4). В этой же теореме для любого (не обязательно аксиоматизируемого) класса K указывается плотный хорново аксиоматизируемый подкласс, определяемый как класс всех моделей теории T' (которая канонически определяется по произвольной исходной теории T), для которого класс $\mathcal{K}^*$ - модельный компаньон, т.е. класс $\mathcal{K}^*$ - модельный компаньон класса $Mod\,T'$ или, другими словами, теория $Th\,\mathcal{K}^*$ - хорнов модельный компаньон для теории T'.

Запасемся двумя формулами: $\Phi_4 = \forall e(e^2=e \Rightarrow e=0 \vee e=1)$ - "без идемпотентов" и $\Phi_5 = \forall e \exists t(e^2=e \wedge et=te \Rightarrow e=0 \vee e=1)$ - "неразложимое".

В заключение постановки задачи заметим, что указанный способ задания класса $\mathcal{K}$ основан на традиционном подходе к изучению алгебраических систем, в рамках которого алгебраическая система рассматривается с точки зрения семейства всех ее локализаций. С этой точки зрения такой способ задания класса универсален.

Упомянутое выше условие на $\mathcal{K}^*$ таково (соответствующий термин, как и приводимые ниже другие термины, условен и относится только к этой заметке). Класс колец $\mathcal{R}$ назовем булево абсолютным, если для любого $K \in \mathcal{R}$ выполняется $\forall L \in \mathcal{R}(K \subseteq L \Rightarrow \forall e_1 \in B(L)(e_1 \neq 0 \Rightarrow \exists p_1 \in e_1, (p_1 \cdot L) \cap K \subseteq (p_1 \cap K) \cdot K)$, т.е. на плотном в $X(L)$ множестве точек p_1 выполняется $\overline{p}_1 \cap K = \overline{p_1 \cap K}$. Смысл этого условия можно пояснить так. Мы собираемся рассматривать расширения $K \subseteq L$, $K, L \in \mathcal{R}$, т.е. на языке накрывающих пространств рассматривать сюръективную непрерывную функцию $f: X(L) \to X(K)$, $f(p_1) = p = p_1 \cap B = p_1 \cap K$ и семейство гомоморфизмов $\overline{f}_{p_1}: K_p \to L_{p_1}$, $\overline{f}_{p_1}([k]_p) = [k]_{p_1}$. Вложению K в L соответствует вложение накрывающих пространств $(X(K), E(K)) \rightarrowtail (X(L), E(L))$ вида $\langle f, \{\overline{f}_{p_1} \mid p_1 \in X(L)\}\rangle$. Ядро гомоморфизма $\overline{f}_{p_1}$ для произвольной точки $p_1 \in X(L)$ равно $\{[k]_p \mid k \in K,\ k \in \overline{p}_1\}$ и наше условие означает в точности, что плотное по p_1 множество гомоморфизмов $\overline{f}_{p_1}$ состоит из мономорфизмов. Иными словами, в булево абсолютном классе вложение K в L индуцирует вложения K_p в L_{p_1} для плотного множества точек p_1, где $p = f(p_1)$, $p_1 \in X(L)$.

Например, если $\mathcal{R}$ - класс бирегулярных колец, т.е. $\forall k \exists e \in B(K)(\langle k \rangle = e \cdot K)$, то $\mathcal{R} = \{K \mid \{K_p\} \models$ - "простое кольцо"; при этом K - заведомо нормальное кольцо, а $\mathcal{R}_0$ - булево абсолютный класс (здесь $\langle k \rangle$ - главный идеал). Причем в качестве соответствующего плотного множества точек p_1 можно выбрать все $X(L)$.

Второе упомянутое выше условие (на T^*) состоит в том, что T^* - вполне закрытая теория. Обозначим $X_1(K)$ множество всех собственных идеалов в $B(K)$. Отметим, что $\overline{q} = q \cdot K$ - идеал в K для любого $q \in X_1(K)$, и можно положить $K_q \leftrightharpoons K \mid \overline{q}$, $X(K) \subseteq X_1(K)$. Теорию T назовем закрытой, если любая ее модель вкладывается в такую ее модель F, что $\{F_p\} \models T$.

Вполне (тотально) закрытой назовем закрытую теорию T, для которой выполняется еще одно условие $F \models \Phi_1 \wedge \Phi_5$ (соответственно для любой ее модели F выполняется $\{F_q \mid q \in X_1(F)\} \models T$). Например, если $T \vdash \Phi_4$, то теория T вполне закрытая и тотально закрытая; если $T \vdash \Phi_5$, то T - тотально закрытая. Теорию T назовем нормально (абелево) закрытой, если она закрытая и соответствующее F обладает свойством $F \models \Phi_1$ (соответственно $F \models \Phi_3$). Например, даже условие $T \vdash \Phi_4$ выполняется для класса $\mathcal{R}$ строго риккартовых колец, который задается в виде $\mathcal{R} = \{K \mid \{K_p\} \models \forall k, t\,(k\cdot t = 0 \Rightarrow k = 0 \vee t = 0), K \models \Phi_1\}$. Для другого класса $\mathcal{R}$ абелевых регулярных колец, который задается в виде $\mathcal{R} = \{K \mid \{K_p\} \models$ "тело"$\}$, выполняются сразу оба условия: это булево абсолютный класс и $T \vdash \Phi_4$. Напомним, что строгая риккартовость характеризуется условием $\forall k \exists e \in B(K),\ k^* = e\cdot K$, где k^* - правый аннулятор элемента k кольца K; абелевость - это свойство Φ_3, а регулярность понимается по Нейману.

Напомним основное в гейтинговозначном анализе определение оценки (для случая языка колец и топологии $\mathcal{T}$ в $X(K)$): $[\![k=t]\!] = \cup\{e \in B(K) \mid e\cdot k = e t\} = \{p \in X(K) \mid k(p) = t(p)\}$ (отметим, что нормальность кольца K эквивалентна тому, что $[\![k=t]\!] \in B(K), \forall k, t \in K$). Далее, $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$ (также для $\wedge$ и $\cap$), $[\![\neg\varphi]\!] = {}^{o}C[\![\varphi]\!]$, где ${}^{o}C$ - внутренность дополнения, $[\![\exists x\varphi]\!] = \cup\{[\![\varphi(k)]\!] \mid k \in K\}$, $[\![\forall x\varphi]\!] = {}^{o}\cap\{[\![\varphi(k)]\!] \mid k \in K\}$, где ${}^{o}\cap$ - внутренность пересечения. Ясно, что $[\![\varphi(k_1,\dots,k_n)]\!] \in \mathcal{T}$ (параметры всегда из K). Конечно, у разных колец разные оценки. Аналогично определяется оценка для языка ZF, при этом параметры пробегают $V^{\mathcal{T}}$. Можно везде заменить $\mathcal{T}$ на произвольную гейтингову алгебру Ω. В напоминание об Ω иногда пишут $[\![\cdot]\!]_\Omega$, а в напоминание о K иногда пишут $[\![\cdot]\!]_K$. Связь языков теории колец и языка ZF и соответствующих им оценок выражается в следующем. По K определяется объект $K' \in V^{\mathcal{T}}$ и перевод формул φ языка теории колец с параметрами k_i из K в формулы $\varphi^\vee$ языка ZF с параметрами P_{k_i} из K' (в смысле $[\![P_{k_i} \in K']\!] = 1$), при котором $[\![\varphi(k_1,\dots,k_n)]\!]_K = [\![\varphi^\vee(P_{k_1},\dots,P_{k_n})]\!]_{\mathcal{T}}$. А именно, $P_k : K \to \mathcal{T}$, $P_k(t) = [\![k=t]\!]$, где t пробегает K; $K' : \{P_k \mid k \in K\} \to \{1\}$, $+' : \{<P_k, P_t, P_{k+t}>^{\Omega} \mid k, t \in K\} \to \{1\}$ (аналогично определяется $\cdot'$). Теперь перевод $\varphi \mapsto \varphi^\vee$ ясен: $k \mapsto P_k$, $+ \mapsto +'$, $\cdot \mapsto \cdot'$, $x \mapsto (x \in K')$. Все это подробнее см., например, в [3], а также ниже в предложении 5. Обычно P_k обозначают просто k и $^\vee$ опускают, т.е. вместо $[\![\varphi^\vee(P_{k_1},\dots,P_{k_n})]\!]_{\mathcal{T}}$ пишут $[\![\varphi(k_1,\dots,k_n)]\!]_{\mathcal{T}}$. Напомним, что $\hat{f}^{\Omega} = \{g \in V^{\Omega} \mid [\![g \in f]\!]_\Omega = 1\}$, где 1 - единица в Ω [3].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если* K *- нормальное кольцо и* $\{K_\rho\} \models T$, *где* T *- модельно полная теория, то для любой формулы* φ *выполняются два свойства:* $[\![\varphi(k_1,\dots,k_n)]\!]_K = \{\rho \in X(K) \mid K_\rho \models \varphi(k_1(\rho),\dots,k_n(\rho))\}$ *и* $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_K$ *- открыто-замкнутое множество, где* $k_1,\dots,k_n \in K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для атомарной формулы $[\![k=t]\!] = e_0$, где e_0 из определения нормальности для элемента $k-t$. Для связок $\vee$, $\wedge$, $\neg$ все очевидно. Для связки $\exists$ заметим $[\![\exists x\varphi]\!] = \{\rho \in X \mid K_\rho \models \exists x\varphi\}$. Используя модельную полноту для формулы $\neg\exists x\varphi$, получаем приводящую E-формулу и по нормальности кольца оценка $[\![\exists x\varphi]\!]$ открыто-замкнута. Для связки $\forall$ заметим $[\![\forall x\varphi]\!] \subseteq \{\rho \in X \mid K_\rho \models \forall x\varphi\} \subseteq \bigcap\{[\![\varphi(k)]\!] \mid k \in K\}$ и учтем, что $\{\rho \in X \mid K_\rho \models \exists x \neg\varphi\}$ открыто-замкнуто.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* T *- позитивно модельно полная теория, то* K *- нормальное кольцо (т.е. условие нормальности в предложении 1 можно опустить для такой* T *).*

Это следствие по существу отмечается в [1]. Без специальных предположений о теории T равенство из предложения 1 неверно даже в форме $[\![\varphi]\!] = 1 \iff \{K_\rho\} \models \varphi$. Поэтому оценка является инструментом, не сводящимся к рассмотрению множества $\{\rho \in X(K) \mid K_\rho \models \varphi\}$. Однако нам понадобится следующее

СЛЕДСТВИЕ 2. *Пусть* φ *в предваренной нормальной форме. Если* $[\![\varphi]\!]_K = 1$, *то* $\{K_\rho\} \models \varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для бескванторной φ проверим более сильное: $\rho \in [\![\varphi]\!] \Rightarrow K_\rho \models \varphi$. По определению, $\rho \in [\![k=t]\!] \Rightarrow K_\rho \models k(\rho)=t(\rho)$ и $\rho \in [\![k \neq t]\!] \Rightarrow K_\rho \models k_\rho \neq t(\rho)$. Для связок $\vee$, $\wedge$ очевидно. Для $\exists$ используем достижимость (т.е. в сущности компактность X, а для $\forall$ - вялость пучка (т.е. в сущности эпиморфность $K \to K_\rho$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно заменить 1 на любое открыто-замкнутое множество. Нормальность формулы φ состоит в том, что отрицания находятся только при атомарных формулах. Если K - нормальное кольцо, то для бескванторной формулы, как бы не располагались отрицания, верно $[\![\varphi]\!] = \{\rho \in X \mid K_\rho \models \varphi\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть* $\varphi(k_1,\dots,k_n)$ *- любая формула в предваренной дизъюнктивной форме в языке колец, а* $\varphi'(k_1,\dots,k_n)$ *получается из* φ *переносом кванторной приставки* Q, *имеющейся в* φ, *а затем приписыванием*

$$\exists \bar{e}_s \forall t \forall e_0 \exists t_1 [e_1^2 = e_1 \wedge e_1 t = t e_1 \wedge \dots \wedge \prod_s (1-e_s) = 0 \wedge e_1 k_1 = e_1 t_1 \wedge \dots \wedge (e_0^2 = e_0 \wedge e_0 t_1 = t_1 e_0 \wedge e_0 k_2 = e_0 t_2 \Rightarrow e_0 \leq 1 - e_1) \wedge \dots]$$

. Тогда $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_K = 1 \iff K \models \varphi'(\bar{k})$, *где* $\bar{k} \subseteq K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы считаем, что бескванторная часть φ вида $\bigvee_s \psi_s$. Тогда равенство $\bigcup_s [\![\psi_s(\bar{k})]\!]_K = 1$ эквивалентно существованию такого набора $\{e_s\} \subseteq \mathcal{B}(K)$, что $e_s \leqslant [\![\psi_s(\overline{k})]\!]_K$ и $\bigcup_s e_s = 1$. Последнее и записано вышеуказанной формулой (где $k_1 = t_1$ - одно из равенств, а $k_2 \neq t_2$ - одно из неравенств, входящих в ψ_1). Если Q начинается с $\exists$, то используем достижимость на открыто-замкнутом множестве. Случай, когда Q начинается с $\forall$, очевиден.

ЗАМЕЧАНИЕ. В предложении 2 можно 1 заменить на любое открыто-замкнутое множество, а от пучка и $\mathcal{F}$ в сущности нужна только достижимость. Такое же предложение верно и для других языков. Семантика связки $\vee$ обычно вызывает наибольшие трудности - предложение 2 сводит ее к хорновой формуле. Тип φ' легко описывается по типу φ . Выразимость этого и ряда других предикатов (см. в частности предложение 6 ниже) означает, что теория вынуждения выражается внутренним образом в языке колец, что дает обычные следствия этой теории.

Переход $T \longmapsto T'$, где по определению $T' = \{\varphi' \mid \varphi \in T\}$, часто бывает полезен. Аксиомы теории T' легко выписываются по аксиомам теории T.

С л е д с т в и е. а) *Если произвольная теория описана с помощью любого набора суждений вида* $[\![\varphi(\overline{k})]\!]_K = 1$ *, то она аксиоматизируема и даже хорнова.*

б) *Если* $\mathcal{K} = \{K \mid \{K_p\} \models T, K \models \varphi_1\}$, *где* T *модельно полна, то класс* $\mathcal{K}$ *хорново аксиоматизируем, а именно* $\mathcal{K} = \{K \mid K \models T', K \models \varphi_1\}$ *. В частности, класс* $\mathcal{K}^*$ *хорново аксиоматизируем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. б) В одну сторону используем предложение 1, а в обратную - следствие 2 к предложению 1.

ТЕОРЕМА 1. *Если* $\mathcal{K} = \{K \mid \{K_p\} \models T, K \models \varphi_1\}$ *, где* T *- АЕ-теория (или при отсутствии условия* $K \models \varphi_1$ *АЕ - позитивная теория), то класс* $\mathcal{K}$ *хорново аксиоматизируем, а именно* $\mathcal{K} = \{K \mid K \models T', K \models \varphi_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [3, с. 368] , что при этих условиях соотношение $\{K_p\} \models \varphi$ эквивалентно $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{F}} = 1$. Затем пользуемся предложением 2. Отсюда получается и следствие "б" к предложению 2, так как модельно полная теория - это АЕ-теория.

Расширяет теорему А.Макинтайра, о которой говорилось в начале заметки, следующая

ТЕОРЕМА 2. *Если* $\mathcal{K}^*$ *- булево абсолютный класс, то он модельно полон.*

ЛЕММА. *Для любого* $K \in \mathcal{K}^*$ *и любой примитивной формулы* ψ *с параметрами из* K *существует формула* ψ_1 *с теми же параметрами, эквивалентная* $\neg\psi$ *в любом расширении* $L \supseteq K$ *,* $L \in \mathcal{K}^*$ *, которая имеет вид* $\psi_1 = \exists \overline{k} \vee \forall e_0 \psi_0$ *, где блок* $\overline{k}$ *пробегает* L *, после него может встречаться дизъюнкция (о чем говорит знак* $\vee$ *), а* e_0 *- специальная переменная по* $\mathcal{B}(L)$ *и* ψ_0 *- конъюнкция атомарных формул и формул, являющихся импликацией двух атомарных формул.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в [1] , по ψ образуем ψ_e -подформулы ψ , содержащие все равенства из ψ и одно неравенство из ψ (можно считать, что ψ среди неравенств содержит и $0\neq 1$). В [1] по существу доказано, что при условии нормальности и безатомности L выполняется (далее везде с учетом предложения 1): $(L\models\psi)\Leftrightarrow(\forall\ell([\psi_\ell]_L\neq\emptyset\wedge\bigcup_\ell[\psi_\ell]_L=X)$. Поэтому $(L\models\neg\psi)\Rightarrow(\exists\ell[\psi_\ell]_L=0)\vee(\bigcup_\ell[\psi_\ell]_L<1)$, где вместо $\emptyset$ и X пишем 0 и 1.

Первый дизъюнктивный член можно переписать эквивалентным образом последовательно так: $\exists\ell([\neg\psi_\ell]=1)$, по модельной полноте теории T^* найдется E-формула ψ'_ℓ с бескванторной частью $\bigvee_s\psi_{es}$, эквивалентная $\neg\psi_\ell$ в моделях для T^*, т.е. $\exists\ell([\psi'_\ell]=1)$, по достижимости $[\cdot]$ на открыто-замкнутом множестве получаем $\exists\ell\exists\bar{k}(\bigcup_s[\psi_{\ell s}]=1)$, с учетом абелевости $\exists\bar{k}\exists\bar{e}_{\ell s}\bigvee_\ell\forall e_0[e_{\ell 1}^2=e_{\ell 1}\wedge\ldots\wedge\prod_s(1-e_{\ell s})=0\wedge e_{\ell 1}\cdot k_1=e_{\ell 1}t_1\wedge\ldots\wedge(e_0k_2=$ $=e_0t_2\Rightarrow e_0\leq 1-e_{\ell 1})\wedge\ldots]$, где $k_1=t_1$ – одно из равенств, а $k_2\neq t_2$ – одно из неравенств, входящих в $\psi_{\ell 1}$.

Аналогично, для второго дизъюнктивного члена: $\exists p\in X\forall\ell(p\notin[\psi_\ell]$, $\exists p\in X$ $(p\in[\bigwedge_\ell\neg\psi_\ell])$, $[\bigwedge_\ell\neg\psi_\ell]>0$, $\exists e\in B(e\neq 0\wedge[\bigwedge_\ell\neg\psi_\ell]\geq e)$, по модельной полноте T^* найдется E-формула ψ_1 с бескванторной частью $\bigvee_s\psi_{1s}$, для которой $\exists e\in B$ $(e\neq 0\wedge[\psi_1]\geq e)$, по достижимости $[\cdot]$ на открыто-замкнутом множестве получаем $\exists\bar{k}\exists e\in B(e\neq 0\wedge\bigcup_s[\psi_{1s}]\geq e)$, по абелевости $\exists\bar{k}\exists e\bigvee_s\forall e_0[e^2=e\wedge e\neq 0\wedge ek_1=$ $=et_1\wedge\ldots\wedge(e_0k_2=e_0t_2\Rightarrow e_0\leq 1-e)\wedge\ldots]$, где $k_1=t_1$ и $k_2\neq t_2$ из ψ_{11}.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Пусть $K\subseteq L$, $K,L\in\mathcal{K}^*$. Мы хотим перенести $\neg\psi$ из K в L. По лемме $\neg\psi$ в K и в L эквивалентны одной и той же формуле (с теми же параметрами) ψ_1. Поэтому достаточно перенести ψ_1 из K в L, т.е. перенести $\forall e_0\psi_0$, точнее перенести импликацию. Это требует усилия, так как $B(L)$ может быть шире $B(K)$; за счет абелевости $B(K)\subseteq B(L)$. Дано, что $K\models\forall e_0(e_0k=0\Rightarrow$ $\Rightarrow e_0\leq e)$, где $k,e\in K$. Нужно доказать $L\models\forall e_0(e_0k=0\Rightarrow e_0\leq e)$. Допустим, что $e_0k=0$, $e_0\in B(L)$ и $e_0\cap(1-e)\neq 0$. По условию выберем $p_1\in e_0\cap(1-e)$, для которого $\bar{p}_1\cap K\subseteq\bar{p}$, где $p=p_1\cap K$. Тогда $(1-e_0)\cdot k=k$ и $k=e_1k$, где $e_1\in p$. Поэтому $(1-e_1)\notin p_1$ и $(1-e_1)\cdot k=0$, $(1-e_1)\in B(K)$, т.е. $(1-e_1)\leq e$, $e\in p_1$ и $(1-e)\in p_1$. Противоречие.

Теперь рассмотрим условия, обеспечивающие вложимость класса $\mathcal{K}$ в класс $\mathcal{K}^*$.

ТЕОРЕМА 3. *а) Если* T^* *нормально закрыта, то* $\mathcal{K}$ *вкладывается в* $\{K\mid\{K_p\}\models T^*,\ K\models\varphi_1\wedge\varphi_2\}$.

б) Если теория T^* *вполне закрыта, то* $\mathcal{K}$ *вкладывается в* $\mathcal{K}^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K \in \mathcal{K}$ и, следовательно, K-подпрямое произведение в $\prod_p K_p$, где все K_p - модели теории T. По условию каждое K_p вкладывается в какое-то F^p, где $F^p \models T^*$. В качестве F^p выберем именно те модели для T^*, о которых говорится в определении закрытой теории.

Обозначим X_0 канторовский дисконтинуум (вполне несвязный, сепарабельный, метризуемый компакт без изолированных точек). В каждом F^p фиксируем дискретную топологию. Мы проверим, что все кольца $\overline{F^p} = C(X_0, F^p)$ принадлежат тому классу, в который нужно вложить K. Эти кольца состоят из всех кусочно постоянных F^p-значных функций на X_0.

В соответствии со следствием к предложению 2 все упомянутые в проверяемой теореме классы хорновы, а потому замкнуты относительно произведений. Поэтому $\prod_p \overline{F^p}$ принадлежит нужному классу и $K \rightarrowtail \prod_p K_p \twoheadrightarrow \prod_p F^p \rightarrowtail \prod_p \overline{F^p}$, что и требуется доказать.

Итак, рассмотрим кольцо $\overline{F} = C(X_0, F)$, где $F \models T^*$ и F обладает свойством из определения закрытой теории. Верно, что $B(\overline{F}) = C(X_0, B(F))$ и $\langle x_0, \rho_0 \rangle = \{f \in B(\overline{F}) \mid f(x_0) \in \rho_0\}$ - простой идеал в $B(\overline{F})$ для любых $x_0 \in X_0$ и $\rho_0 \in X(F)$. Любая точка из $X(\overline{F})$ имеет такой вид, т.е. символически $X(\overline{F}) = X_0 \times X(F)$, так как для $\rho \in X(\overline{F})$ существует $x_0 \in X_0$, для которого $\rho_0 = \{f(x_0) \mid f \in \rho\}$ не содержит единицу из $B(F)$ (иначе $\{\{x_0 \in X_0 \mid f(x_0) = 1\} \mid f \in \rho\}$ - открытое покрытие X_0, а подпокрытие приводит к таким $f_1, \ldots, f_n \in \rho$, что $f_1 \vee \ldots \vee f_n \in \rho$ и $f_1 \vee \ldots \vee f_n \equiv 1$ - противоречие). Такое ρ_0 - простой идеал в $B(F)$. Поэтому $\rho \subseteq \langle x_0, \rho_0 \rangle$, в силу максимальности ρ это возможно только, если $\rho = \langle x_0, \rho_0 \rangle$.

Далее, $\overline{\langle x_0, \rho_0 \rangle} = \{f \in \overline{F} \mid f(x_0) \in \overline{\rho_0}\}$, где $\overline{\rho_0} = \rho_0 \cdot F$, а $\overline{\langle x_0, \rho_0 \rangle} = \langle x_0, \rho_0 \rangle \overline{F}$. Поэтому $(\overline{F})_{\langle x_0, \rho_0 \rangle} = \overline{F} | \overline{\langle x_0, \rho_0 \rangle} = F | \overline{\rho_0} = F_{\rho_0}$, где ρ_0 пробегает $X(F)$. По условию для всех F_{ρ_0} выполняется $F_{\rho_0} \models T^*$, отсюда $\{(\overline{F})_{\langle x_0, \rho_0 \rangle}\} \models T^*$. Проверим нормальность $\overline{F}$. Если $f \in \overline{F}$, то положим $e_0(x) = 1$, если $f(x) = 0$, и $e_0(x) = e_i$, где e_i - элемент из F, соответствующий в силу нормальности F элементу $f(x) \neq 0$ из F; такое e_0 удовлетворяет определению нормальности для f в $\overline{F}$. Допустим, f - атом в $\overline{F}$. Хотя бы одна "ступенька" для f, например $f(x_0)$, отлична от 0. Эта ступенька над открыто-замкнутым множеством, содержащим хотя бы две различные точки. Удаляя одну из них вместе с ее окрестностью, получаем, что f не атом. (Абелевость $\overline{F}$ сразу вытекает из абелевости F.)

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически в теореме 3 от модельной полноты T^* использовались только два свойства: замкнутость относительно произведений и модельная вложимость T в T^*.

Соединяя теоремы 2 и 3, получаем следующую теорему. Пусть аксиомы T пишутся в предваренной дизъюнктивной форме. Напомним, что $T'=\{\varphi' \mid \varphi\in T\}$ (φ' явно строится по φ согласно предложению 2). Такое T' - хорнова теория. По следствию 2 к предложению 1 $[\![\varphi]\!]=1 \Rightarrow \{K_p\}\models \varphi$, т.е. любая модель теории T' содержится в $\mathcal{K}$. С учетом предложения 1 получаем

$$T'\subseteq Th\,\mathcal{K}^* \quad \text{и} \quad \mathcal{K}^*\subseteq Mod(T')\subseteq \mathcal{K}.$$

ТЕОРЕМА 4. *Если* $\mathcal{K}^*$ *- булево абсолютный класс и теория* T^* *вполне закрыта, то* Th $\mathcal{K}^*$ *- хорнов модельный компаньон для теории* T *и (в случае аксиоматизируемости класса* $\mathcal{K}$ *) для теории* Th $\mathcal{K}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если* $\mathcal{K}$ *- аксиоматизируемый подкласс класса всех бирегулярных колец и* T^* *абелево закрыта, то* Th $\mathcal{K}^*$ *- хорнов модельный компаньон для* Th $\mathcal{K}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $\mathcal{K}$ *- аксиоматизируемый подкласс класса абелевых регулярных колец, то* Th $\mathcal{K}^*$ *- хорнов модельный компаньон для* Th $\mathcal{K}$.

В [1] рассматривается как раз случай, когда $\mathcal{K}$ - класс всех коммутативных регулярных колец (это и есть аксиомы для Th $\mathcal{K}$); такие кольца, конечно, абелевы регулярные кольца. Тогда ясно, что T - теория полей, а T^* - теория алгебраически замкнутых полей. Чтобы по указанной выше методике выписать аксиомы для Th $\mathcal{K}^*$, нужно заметить, что абелевость и нормальность обеспечиваются уже "специальными аксиомами" $\{K_p\}\models T^*$. Поэтому остаются Φ_2 (безатомность) и еще переводы для двух аксиом "поле" и "алгебраически замкнутое". В соответствии с предложением 2 образуем φ' и получаем соответственно в точности "регулярное" и "алгебраически замкнутое". Это и есть аксиомы для теории Th $\mathcal{K}^*$, указанные в [1] и ряде других работ. Таким образом, мы указываем общий способ вычисления соответствующих аксиом. Отметим, что можно явно указать, в какой класс формул мы попадаем при переходе $T\longmapsto T'$ для многих T.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Если* $\mathcal{K}$ *- аксиоматизируемый подкласс класса всех строго риккартовых колец, а* $\mathcal{K}^*$ *- булево абсолютный класс, то* Th $\mathcal{K}^*$ *- хорнов модельный компаньон для* Th $\mathcal{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае все слои без делителей нуля и, следовательно, бех идемпотентов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Класс $\mathcal{J}=\{K_p \mid K\in\mathcal{K},\ K\models \Phi_1\wedge\Phi_2\wedge\Phi_3,\ p\in X(K)\}$, где $T\vdash \Phi_4$, аксиоматизируется теорией T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению класса $\mathcal{K}$ выполняется $K_p\models T$. Если $F\models T$, то кольцо $\bar{F}=C(X_0,F)$ имеет все слои, изоморфные F, т.е. $\bar{F}\in\mathcal{K}$. Кроме того, $\bar{F}$ - нормальное, безатомное и абелево. Поэтому $F\in\mathcal{J}$. (Аналогичное верно для случая $T\vdash\Phi_5$.)

Приведем критерий вложимости класса $\mathcal{K}=\{K \mid \{K_p\}\models T\}$ в какой-то класс

$\mathcal{X}_1=\{K \mid \{K_\rho\}\models T_1\}$, не предполагающий модельную полноту теории T_1. Напомним, что объект K' определялся перед предложением 1. Существенное замечание состоит в том, что для нормального кольца K объект $K'\in V^{\mathcal{B}}$ и, следовательно, $K'\in(V^{\mathcal{B}}\cap V^{\mathcal{T}}_{\mathcal{B}})$, где $\mathcal{B}=\mathcal{B}(K)$ - дедекиндово пополнение $\mathcal{B}=\mathcal{B}(K)$. Такое $\mathcal{B}$ можно отождествить с алгеброй регулярных открытых множеств в $X(K)$. Это такие множества $\mathcal{O}\in\mathcal{T}(K)$, для которых $\mathcal{O}=\alpha(\mathcal{O})$, где α - операция, состоящая в вычислении внутренности замыкания, т.е. $\alpha=\neg\neg$, где $\neg={}^\circ C$ - псевдодополнение. Поэтому можно судить о свойствах K и с точки зрения $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$, и с точки зрения $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$. В принципе пара $<\mathcal{T},\mathcal{B}>$ соответствует гёделевскому негативному переводу формул. Изложим это подробнее.

Пусть две полные гейтинговы алгебры Ω_1 и Ω_2 сравнимы в том смысле, что $\mathcal{B}\subseteq\Omega_1\subseteq\Omega_2$ или $\mathcal{B}\subseteq\Omega_2\subseteq\Omega_1$. Будем писать $\Omega_1\preceq\Omega_2$, если $u\vee_{\Omega_1}v=u\vee_{\Omega_2}v$, $u\wedge_{\Omega_1}v=u\wedge_{\Omega_2}v$ и $\neg_{\Omega_1}u=\neg_{\Omega_2}u$, $\bigvee_{\alpha\Omega_1}u_\alpha\leq\bigvee_{\alpha\Omega_2}u_\alpha$, $\bigwedge_{\alpha\Omega_1}u_\alpha\leq\bigwedge_{\alpha\Omega_2}u_\alpha$. А также писать $\Omega_1\leqq\Omega_2$, если $\Omega_1\preceq\Omega_2$ и для связки $\neg$ выполняется более сильное $\neg_{\Omega_1}u=\neg_{\Omega_2}u$.

Например, $\mathcal{T}(K)\leqq\mathcal{B}(K)$ (хотя $\mathcal{B}(K)\subseteq\mathcal{T}(K)$) и, кроме того, в этом случае $\bigwedge_{\alpha\mathcal{B}}=\bigwedge_{\alpha\mathcal{T}}$. Другой содержательный пример таков. Хорошо известно, что для любой полной гейтинговой алгебры Ω определяется такая полная булева алгебра $\mathcal{B}(\Omega)$, для которой $\Omega\subseteq\mathcal{B}(\Omega)$ и $\Omega\preceq\mathcal{B}(\Omega)$, кроме того, в этом случае $\bigvee_{\alpha\Omega}=\bigvee_{\alpha\mathcal{B}}$ (в стоуновой реализации алгебры Ω объявляются открытыми дополнения открытокомпактных множеств).

Если $\mathcal{B}\subseteq\Omega$ и Ω - полная гейтингова алгебра, то положим $[\![k=t]\!]_\Omega=\bigvee_\Omega\{e\in\mathcal{B}\mid e\cdot k=e\cdot t\}$. Эта оценка продолжается на класс всех формул $\varphi(k_1,\dots,k_n)$, где $k_1,\dots,k_n\in K$, точно так же, как в случае $\Omega=\mathcal{T}(K)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $\Omega_1\leqq\Omega_2$ и K - нормальное кольцо, а φ в предваренной нормальной форме, то $[\![\varphi]\!]_{\Omega_1}\leq[\![\varphi]\!]_{\Omega_2}$. В частности, $([\![\varphi]\!]_{\Omega_1}=1)\Rightarrow([\![\varphi]\!]_{\Omega_2}=1)$.*

Доказательство по индукции.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $\Omega_1\leqq\Omega_2$ и K нормальное, то для φ в предваренной форме выполняется то же утверждение. В частности, $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(K)}\leq[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}(K)}$, а для бескванторной φ выполняется $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(K)}=[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}(K)}$.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если T - AE-теория и для нормального кольца K выполняется $\{K_\rho\}\models T$, то $[\![T]\!]_{\mathcal{B}(K)}=1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [3, с.388] получаем $[\![T]\!]_{\mathcal{T}}=1$ (этот переход при определенных условиях на пучок верен и для более общих теорий в роли T, что обсуждается в работе автора, упомянутой на с. 2), и применяем следствие к предложению 3.

Класс $\mathcal{X}$ назовем нормальным, если для любого $K\in\mathcal{X}$ существует $L\in\mathcal{X}$, для которого $K\subseteq L$, $L\models\Phi_1$. Итак, получаем искомое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть теория T модельно вложима в теорию T_1 (и это* *выводимо в* ZFC *). Если* T *-* AE *-теория и* T_1 *- тотально закрытая теория, а* $\mathscr{X}$ *- нормальный класс, то* $\mathscr{X}$ *вложим в* $\mathscr{X}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K \in \mathscr{X}$ и в силу нормальности класса $\mathscr{X}$ можно считать, что $K \models \Phi_1$. Пусть $\mathbb{B}$ - дедекиндово пополнение булевой алгебры $B(K)$. По предложению 4, $[\![T]\!]_{\mathbb{B}} = 1$, т.е. $[\![K' \models T]\!]_{\mathbb{B}} = 1$. По условию в ZFC выводимо $\forall x \exists f (x \models T \Rightarrow x \subseteq f \wedge f \models T_1)$. Отсюда по достижимости в $V^{\mathbb{B}}$ получим $[\![K' \subseteq f_1 \wedge f \models T_1]\!]_{\mathbb{B}} = 1$, где $f \in V^{\mathbb{B}}$. Обозначим $\hat{f}^{\mathbb{B}} = L$. Тогда $K \subseteq L$ и мы покажем, что $L \in \mathscr{X}_1$, что и требуется доказать.

Действительно, $\mathbb{B}$ вкладывается в $B(L)$ по правилу $b \mapsto b \cdot 1 + \neg b \cdot 0$, поэтому можно считать $\mathbb{B} \subseteq B(L)$. Обозначим $L_{(p_0)} = L/\bar{p}_0$, где p_0 - точка стоунова пространства $S(\mathbb{B})$ булевой алгебры $\mathbb{B}$. Легко проверить, что $L_{(p_0)}$ совпадает с факторизацией L отношением эквивалентности $(k \sim t) \Leftrightarrow ([\![k = t]\!]_{\mathbb{B}} \notin p_0)$, а также, что $([\![f \models \varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathbb{B}} = 1) \Leftrightarrow \{L_{(p_0)}\} \models \varphi([k_1]_{p_0}, \ldots, [k_n]_{p_0})$, где p_0 пробегает $S(\mathbb{B})$ и $k_1, \ldots, k_n \in L$ (индукцией по длине φ). Итак, $\{L_{(p_0)}\} \models T_1$.

По любому $p \in X(L)$ образуем $p_0 = p \cap \mathbb{B} \subseteq \mathbb{B}$. При этом $p_0 \in S(\mathbb{B})$. Ясно, что $\bar{p}_0$ - идеал в L и $\bar{p}_0 \subseteq \bar{p}$ и $L_p = L/\bar{p} = (L/\bar{p}_0)/(\bar{p}/\bar{p}_0) = L_{(p_0)}/\overline{p|\bar{p}_0}$. Заметим, что $q = p|\bar{p}_0$ обладает свойствами: $q \subseteq B(L/\bar{p}_0)$ и q замкнуто относительно $\vee$ и не содержит $[1]_{\bar{p}_0}$: если $[1]_{\bar{p}_0} = [e]_{\bar{p}_0}$, где $e \in p$, то $1 - e = e_0 \cdot r,\ e_0 \in p_0$ и $1 = e + e_0 \cdot r = (e \vee e_0) \cdot 1,\ e \vee e_0 \in p$. Противоречие. Добавим к q все $[l]_{\bar{p}_0} \in B(L/\bar{p}_0)$, которые $\leqslant [e]_{\bar{p}_0} \in q$; полученное таким образом q_1 - собственный идеал в $B(L/\bar{p}_0)$ и $\bar{q}_1 = \overline{p|\bar{p}_0}$. Итак, $L_p = L_{(p_0)}/\bar{q}_1$, где $q_1 \in X(L_{(p_0)})$ и по условию получаем $L_p \models T_1$.

Класс $\mathscr{X}$ назовем безатомным, если $\forall K \in \mathscr{X} \exists L \in \mathscr{X} (K \subseteq L \wedge L \models \Phi_2)$. Класс $\mathscr{X}$ назовем вполне нормальным, если для любого $K \in \mathscr{X}$, $K \models \Phi_2$ существует $L \in \mathscr{X}$, $K \subseteq L$, для которого $L \models \Phi_1 \wedge \Phi_2$. Класс $\mathscr{X}$ назовем абелевым если для любого $K \in \mathscr{X}$, $K \models \Phi_1 \wedge \Phi_2$ существует $L \in \mathscr{X}$, $K \subseteq L$, для которого $L \models \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3$.

СЛЕДСТВИЕ. *Пусть* T *модельно вложима в теорию* T_1 *(и это выводимо в ZFC). Если* T *- AE-теория и* $T_1 \vdash \Phi_5$ *, а* $\mathscr{X}$ *- безатомный, вполне нормальный класс и класс* $\mathscr{X}_1$ *абелев, то* $\mathscr{X}$ *вкладывается в* $\{K \in \mathscr{X}_1 \mid K \models \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \Phi_3 F\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Учитывая явный вид аксиом φ' для $\mathscr{X}_1$, получаем, что нужно переносить на фактор только импликации вида $e_0 \cdot k = 0 \Rightarrow e_0 \in e$, что делается с помощью техники поднятия идемпотентов. Абелевость K с помощью поднятия идемпотентов позволяет получать абелевость L . Тогда условие абелевости класса $\mathcal{X}_1$ можно опустить и заменить в определении тотально закрытой теории $q \in X_1(L_{(\varphi_0)})$ на $q \in X(L_{(\varphi_0)})$.

В сущности вариантом предложений 5 является следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *а) Если* $T \vdash \psi$, *то* $(T' + \varphi_1) \vdash (\psi_\neg)^0$, *где* $\psi_\neg$ *получается из* $\neg\psi$ *переходом к дизъюнктивной нормальной форме, а перевод* $\varphi \mapsto \varphi^0$ *определяется ниже.*

б) Если $T \vdash \psi$, *то* $(T' + \varphi_1) \vdash \psi^+$, *где перевод* $\varphi \mapsto \varphi^+$ *определяется ниже.*

Для доказательства предложения 6 нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1. *Если* K *нормально и* $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}(K)} = 1$, *то* $[\![\varphi_\neg(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $[\![\psi_\neg]\!]_{\mathcal{T}} \neq 0$, то по следствию к предложению 3 $[\![\psi_1]\!]_{\mathcal{B}} \neq 0$. Отсюда $[\![\neg\psi]\!]_{\mathcal{B}} \neq 0$, $[\![\psi]\!]_{\mathcal{B}} < 1$. Противоречие.

ЛЕММА 2. *Пусть* K *нормально и* $\bar{k} \subseteq K$.

а) Предикат $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{J}(k)} = 0$ *выразим в* K, *т.е. эквивалентен* $K \models \varphi^0(\bar{k})$, *где* φ *в дизъюнктивной нормальной форме.*

б) Предикат $[\![\psi_{\neg\neg}(\bar{k})]\!]_{\mathcal{J}(k)} = 1$ *выразим в* K, *т.е. эквивалентен* $K \models \psi^+(\bar{k})$, *где* $\psi_{\neg\neg}$ *получается из* ψ *в предваренной форме добавлением* $\neg\neg$ *перед каждой связкой* $\exists$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Бескванторную часть φ обозначим $\bigvee_s \psi_s$. Ясно, что $[\![\bigvee_s \psi_s]\!]_{\mathcal{T}} = 0 \Leftrightarrow \forall s \forall e \forall e_0 \forall t_1 \exists t [\![(e^2 = e \wedge et = te \wedge ek_1 = et_1 \wedge \ldots \wedge (e_0^2 = e_0 \wedge e_0 t_1 = t_1 e_0 \wedge e_0 k_2 = e_0 t_2 \Rightarrow e_0 \leq 1 - e) \wedge \ldots) \Rightarrow e \leq 0$. Итак, для бескванторной φ определен перевод φ^0. Для $\exists$ положим $(\exists k \varphi)^0 = \forall k \varphi^0$. Для $\forall$ положим $(\forall k \varphi)^0 = \forall e \exists t, k (e^2 = e \wedge et = te \wedge (e \leq [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}}) \Rightarrow e = 0)$. Здесь предикат $e \leq [\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}}$, в свою очередь, раскрывается по индукции (и, следовательно, также выразим в K): $e \leq [\![\exists x \varphi]\!]_{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \exists k (e \leq [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}})$ и $e \leq [\![\forall x \varphi]\!]_{\mathcal{T}} \Leftrightarrow \forall k (e \leq [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}})$, где $e \leq [\![\bigvee_s \psi_s]\!]_{\mathcal{T}}$ определяется аналогично предложению 2 (вместо $\prod_s (1 - e_s) = 0$ пишем $\prod_s (1 - e_s) \leq 1 - e$). Ясно, что $[\![\exists k \varphi]\!]_{\mathcal{T}} = 0 \Leftrightarrow \forall k ([\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}} = 0) \Leftrightarrow \forall k \varphi^0(k)$ и $[\![\forall k \varphi]\!]_{\mathcal{T}} = 0 \Leftrightarrow \forall e \exists t, k (e^2 = e \wedge et = te \wedge (e \leq [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}}) \Rightarrow e = 0) \Leftrightarrow (\forall k \varphi)^0$.

б) Для бескванторной ψ этот предикат выражается так же, как и $e \leq [\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}$ в предыдущем пункте. Кванторную приставку Q переводим следующим образом. Для пары связок $\exists\forall$ в ψ имеем: $[\![\neg\neg\exists x \forall y \psi_0]\!]_{\mathcal{T}} \geq e_0$, $e_0 \in \mathcal{B}(K)$ эквивалентно ($[\![\exists x \psi_0]\!]$ - открытое плотное в e_0 множество), далее преобразуем $\forall e \exists t \exists e_1 \forall t_1 \exists k \forall k_1 (e^2 = e \wedge et = te \wedge e \neq 0 \wedge e \leq e_0 \Rightarrow e_1^2 = e_1 \wedge e_1 t_1 = t_1 e_1 \wedge e_1 \neq 0 \wedge e_1 \leq e \wedge e_1 \leq [\![\psi_0(k, k_1)]\!]_{\mathcal{T}}$, где $e_1 \leq [\![\psi_0(k, k_1)]\!]_{\mathcal{T}}$ раскрывается по индукции. Для связки $\forall$ в начале Q имеем: $[\![\forall x \psi_0]\!]_{\mathcal{T}} \geq e \Leftrightarrow \forall k ([\![\psi_0]\!]_{\mathcal{T}} \geq e)$. Для связки $\exists$ в конце Q имеем частный случай пары связок $\exists\forall$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 6. а) Пусть в произвольном кольце K выполняется $K \models (T' + \Phi_1)$. Тогда $[\![T]\!]_{J(K)} = 1$. По следствию к предложению 3 $[\![T]\!]_{B(K)} = 1$. По условию $[\![\psi]\!]_{B(K)} = 1$ и по леммам 1, 2 $[\![\psi_\neg]\!]_{J(K)} = 0, K \models (\psi)^0_\neg$.

б) Пусть $K \models (T' + \Phi_1)$. Тогда $[\![T]\!]_{J(K)} = 1$. Обозначим $T_{\neg\neg}$ гёделевский негативный перевод всех формул из T (формулы из T в предваренной форме). В силу нормальности K получим $[\![T_{\neg\neg}]\!]_J = 1$. Так как $T_{\neg\neg} \vdash_H \psi_{\neg\neg}$, то $[\![\psi_{\neg\neg}]\!]_J = 1$, где $\psi_{\neg\neg}$ как раз такое, как сказано в лемме 2"б". По этой лемме $K \models \psi^+$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Аналогичное предложение выполняется и для других пар в роли $\langle J, \mathcal{B} \rangle$. Выразимость упомянутых предикатов имеет место и для других языков. Условие нормальности K можно ослабить, например, заменив его условием $\{[\![k = 0]\!]_{J(K)} \mid k \in K\} \subseteq \mathcal{B}(K)$.

Рассмотрим вопрос о переносе модельной полноты в "обратную сторону".

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Если* $\{K \mid \{K_p\} \models T_1, K \models (T_1)' + \Phi_1 + \Phi_2\} \subseteq \mathcal{X}_1 \subseteq \{K \mid \{K_p\} \models T_1\}$, *где* $T \vdash \Phi_5$ *и* $T \subseteq T_1$, *а* $\mathcal{X}_1$ *- модельный компаньон для* $\mathcal{X}$ *с условием* $\forall K \models T \, \forall L \in \mathcal{X}_1 \exists p_1 \in X(L)\ (K \subseteq L \Rightarrow \bar{p}_1 \cap K = \overline{p_1 \cap K})$, *то* T_1 *- модельный компаньон для* T.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F_1 \subseteq F_2$ - две модели для T_1 и ψ- примитивная над F_1 формула, $F_1 \models \neg\psi$. Кольца $\bar{F}_1 = C(X_0, F_1)$, $\bar{F}_2 = C(X_0, F_2)$ принадлежат $\mathcal{X}_1$ и $\bar{F}_1 \subseteq \bar{F}_2$. Для A-формулы $\neg\psi$ (как и для любой AF-формулы) в нормальном кольце $[\![\neg\psi]\!]_{\bar{F}_1} = 1$, а в соответствии с предложением 2 для перевода φ', соответствующего $\neg\psi$, выполняется $\bar{F}_1 \models \varphi'$. Тогда $\bar{F}_2 \models \varphi'$ и в силу "равномерности" (не отмеченной явно в предложении 2) $[\![\neg\psi]\!]_{\bar{F}_2} = 1$, т.е. $F_2 = (\bar{F}_2)_p \models \neg\psi$. Итак, T_1 - модельно полная теория.

Пусть F - модель T. Тогда F- слой соответствующего $\bar{F} \in \mathcal{X}$ и $\bar{F} \subseteq L \in \mathcal{X}_1$. За языке накрывающих пространств это означает, что $\bar{f}_{p_1} : (\bar{F}_p) \to L_{p_1}$, где p_1 - любая точка из $X(L)$. По условию одно из $\bar{f}_{p_1}$ - мономорфизм. Поэтому F вкладывается в L_{p_1} - одну из моделей для T_1.

СЛЕДСТВИЕ. *Класс всех абелевых регулярных колец не имеет модельного компаньона* $\mathcal{X}_1$ *вида, указанного в предложении 7, где* T_1 *включает аксиомы тела.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае T- теория всех тел, которая не имеет модельного компаньона.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно сформулировать условия, при которых произвольный компаньон имеет указанный вид (и ослабить условие $T \vdash \Phi_5$). Конечно, следствие относится и к подклассам, локализации элементов которых охватывают класс всех тел.

Можно привести много примеров, относящихся к теореме 4 и ее следствиям. Например, пусть T^* - модельно полная теория центральной алгебры над алгебраически замкнутым полем. Конкретно пусть, скажем, T^* - теория кватернионов. Тогда соответствующий класс $\mathcal{K}^*$ модельно полон. Иначе говоря, класс колец, у которых все локализации элементарно эквивалентны телу кватернионов, модельно полон.

Назовем 1-примитивной такую примитивную формулу, в которой не более одного отрицания.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Если теория T разрешает все 1-примитивные формулы, то* $\mathrm{Th}\,\{K \mid \{K_p\} \models T,\ K \models \Phi_2\}$ *разрешает все* E*-формулы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть K - произвольный элемент этого класса. Так как $K \models \Phi_1$, то $\forall \ell\, \forall p\, (K_p \models \psi_\ell) \Rightarrow L \models \psi$ и всегда $\exists \ell_0\ \forall p\, (K_p \models \neg \psi_{\ell_0}) \Rightarrow L \models \neg\psi$. По условию $T \models \psi_\ell$ для всех ℓ или $\exists_{\ell_0}\ (T \vdash \neg \psi_{\ell_0})$. Соответственно $\forall \ell\, \forall p$ $(K_p \models \psi_\ell)$ или $\exists \ell_0\, \forall p\, (K_p \models \neg \psi_{\ell_0})$.

СЛЕДСТВИЕ. *Если $\mathcal{K}^*$ - булево абсолютный класс, а T^* разрешает все 1-примитивные формулы, то* $\mathrm{Th}\,\mathcal{K}^*$ *- полная (и модельно полная) хорнова теория.*

Основные результаты заметки автор докладывал на семинаре под руководством проф. В.А.Смирнова весной 1984 г.

ПРИМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ. Условие абелевости Φ_3 по существу не используется в доказательствах, его можно заменить условием булевой правильности: $(K, L \in \mathcal{K}^* \wedge K \subseteq L) \Rightarrow B(K) \subseteq B(L)$; в частности, $\mathcal{K}_0$ - любой булево правильный подкласс.

Литература

1. A.MACINTYRE, Model-completeness for sheaves of structures, Fund. Math., 81 (1973), 73-89.

2. А. МАКИНТАЙР, Модельная полнота, в кн. "Справочная книга по математической логике, часть 1, Теория моделей", М., Наука, 1982, 141-182.

3. В.А.ЛЮБЕЦКИЙ, Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем, в кн. П.Джонстон, Теория топосов, М., Наука, 1986, 376-430.

Поступило 11 ноября 1987г.