

ИНТУИЦИОНИСТСКАЯ ТЕОРИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ГЕЙТИНГОВОЗНАЧНЫЙ АНАЛИЗ

В.А. ЛЮБЕЦКИЙ

В работе для кольца f с метрикой и формулы $\varphi \Rightarrow \psi$ в языке колец строится такой перевод $\varphi^+ \Rightarrow \psi^+$, что из (классической) истинности суждения $f \models (\varphi \Rightarrow \psi)$ (т.е. суждения $\varphi_f \Rightarrow \psi_f$) в классической теории множеств следует в определенном смысле (интуиционистская) истинность суждения $f \models (\varphi^+ \Rightarrow \psi^+)$ (т.е. суждения $(\varphi^+)_f \Rightarrow (\psi^+)_f$ в интуиционистской теории множеств. Вопрос о том, что такое "(интуиционистская) истинность в интуиционистской теории множеств", конечно, сложен и заведомо неоднозначен. С точки зрения интуициониста, это, возможно, вывод в формально-аксиоматической теории множеств Грейсона ZF'_I (см. [1]). С точки зрения классика, т.е. математика, ориентированного на использование интуиционистской логики для получения в конечном счете результатов в рамках обычной математики, это, например, гейтингова значимость. Напомним определение последней.

Формула φ в языке ZF с параметрами $x_1, \dots, x_n$ из класса всех множеств V называется гейтингово значимой (обозначение $sHa \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$), если для любой полной гейтинговой алгебры $\mathcal{Q}$ (сокращенно sHa) выполняется $[\varphi(\check{x}_1, \dots, \check{x}_n)]_{\mathcal{Q}} = 1$, где $[\cdot]_{\mathcal{Q}}$ - обычная оценка в языке ZF с множеством параметров $V^{\mathcal{Q}}$. Упоминаемые здесь и далее известные определения и результаты можно найти, например, в [2]. В существенном определение гейтинговой значимости появилось в [1]. Конечно, $(ZF'_I \vdash \varphi) \Rightarrow sHa \models \varphi$, а обратное неверно. (Иногда разумно специализировать предикат $sHa \models (\cdot)$, считая, что $\mathcal{Q}$ пробегает только все топологии или только все нульмерные компакты и т.д.) Даже для отдельно взятой sHa $\mathcal{Q}$ (если она не булева) не выполняется $[\varphi \vee \neg \varphi]_{\mathcal{Q}} = 1$, где φ - "почти лю-

бая" формула. Заметим, что наша дальнейшая работа с предикатом (семантикой) $sHa \models (\cdot)$ такова, что в тех случаях, когда мы утверждаем, что $sHa \models \varphi$, выполняется $ZF'_I \vdash (sHa \models \varphi)$. В этом смысле наша метаматематика может рассматриваться как строго интуиционистская. Семантика $sHa \models (\cdot)$ также сохраняет некоторые интуиционистские черты теории ZF'_I . Все это, быть может, позволяет рассматривать семантику $sHa \models (\cdot)$ в качестве интуиционистской семантики в теории множеств. В дальнейшем точка зрения на рейтинговую значимость как на разновидность интуиционистской истинности в теории множеств не обязательна, тогда ее можно считать только удобным средством при работе с интуиционистской логикой и в приложениях нестандартного анализа.

Если в определении предиката $sHa \models \varphi$ алгебра $\mathcal{A}$ пробегает только все полные булевы алгебры (сокращенно sBa), то получается новый предикат, который обозначим $sBa \models \varphi$. Конечно, если $ZFC \vdash \varphi$, то $sBa \models \varphi$.

Итак, в теореме 1 мы получим результат следующего вида. Если $sBa \models (\varphi_f \Rightarrow \psi_f)$, то $sHa \models ((\varphi^+)_f \Rightarrow (\psi^+)_f)$. Более подробно: на кольцо f , а точнее, на его описание формулой $\mathcal{A}$ в языке ZF накладываются некоторые ограничения, а затем в теореме 1 говорится: "Если $sBa \models \xi$, где $\xi \equiv \forall f (x(f) \Rightarrow \Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in f [\varphi_f(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow \psi_f(x_1, \dots, x_n)])$, то $sHa \models \xi^+$, где $\xi^+ \equiv \forall f (x(f) \Rightarrow \forall x_1, \dots, x_n \in f [(\varphi^+)_f(x_1, \dots, x_n) \Rightarrow (\psi^+)_f(x_1, \dots, x_n)])$ ". Эти ограничения на $\mathcal{A}$ содержатся в понятии " $\mathcal{A}$ - дедекиндова формула", которое в этой работе (см. ниже) существенно шире, чем в [2]. Итак, теорема 1 дает средство по любому результату вида ξ (подразумевается, что $ZFC \vdash \xi$) получить $sBa \models \xi$, затем $sHa \models \xi^+$, а отсюда $[\xi^+]_{\mathcal{A}} = 1$ для интересующей нас конкретной $sHa \mathcal{A}$.

Результаты вида $sHa \models \chi$ или, точнее, вида $ZF'_I \vdash (sHa \models \chi)$ и составляют в предлагаемом здесь смысле интуиционистскую теорию алгебраических систем.

Нестандартный анализ позволяет продолжить эту цепочку рассуждений (мы остановились на том, что $[\xi^+]_{\mathcal{A}} = 1$). Выберем любое такое $f \in V^{\mathcal{A}}$, что $[\mathcal{A}(f)]_{\mathcal{A}} = 1$, и получим

$$[(\varphi^+)_f]_{\mathcal{A}} \leq [(\psi^+)_f]_{\mathcal{A}}.$$

Здесь появляется еще одно "действующее лицо":

$$\hat{f}^{\mathcal{A}} \leq \{g \in V^{\mathcal{A}} \mid [g \in f]_{\mathcal{A}} = 1\}.$$

Причем так как $[f\text{-кольцо}]_{\mathcal{Q}} = 1$, то, положив $(t+v=s) \leq [t+v=s]_{\mathcal{Q}} = 1$ для любых $t, v, s \in \hat{f}^{\mathcal{Q}}$, а также для операций $-, \cdot$ и констант $0, 1$, получим, что $\hat{f}^{\mathcal{Q}}$ — также кольцо. Пусть выполняется такое условие на $\hat{f}^{\mathcal{Q}}$, которое обеспечивает $[(\psi^+)_f]_{\mathcal{Q}} = 1$ (часто это просто $\hat{f}^{\mathcal{Q}} = \psi^+$). Тогда получим $[(\psi^+)_f]_{\mathcal{Q}} = 1$, а затем $\hat{f}^{\mathcal{Q}} = \psi^+$ (последний шаг обычно имеет место, когда ψ хорнова). Иногда не получается $\hat{f}^{\mathcal{Q}} = \psi^+$, но получается $\hat{f}^{\mathcal{Q}} = (\psi^+)'$, где $(t)'$ — некоторое преобразование формулы t . Наконец, в ряде случаев из $\hat{f}^{\mathcal{Q}} = \psi^+$ удается вывести $\hat{f}^{\mathcal{Q}} = \psi$ с помощью рассуждений, уже не связанных с данной техникой. Таким образом, цель состоит в том, чтобы для таких f , что $[x(f)]_{\mathcal{Q}} = 1$, получать, грубо говоря, $\hat{f}^{\mathcal{Q}} = (\psi^+ \Rightarrow \psi^+)$.

Для случая, когда $\mathcal{Q}$ — полная булева алгебра, а $V^{\mathcal{Q}}$ — обычный булевозначный универсум (тогда перевод и все другие интуиционистские особенности не нужны), эта программа и некоторые соответствующие ей результаты получены Г.Такеути, автором, Е.И.Гордоном в 1977–80 гг. Естественно, узким местом этой программы является вопрос: что представляет собой кольцо $\hat{f}^{\mathcal{Q}}$? Оказывается, что именно в случае не булевых полных гейтингговых алгебр $\mathcal{Q}$ (и, следовательно, в случае интуиционистской специфики) в форме $\hat{f}^{\mathcal{Q}}$ представляются многие важные математические объекты. Например, так представимо кольцо всех непрерывных функций $C(Z, R)$, при этом $\mathcal{Q}$ должно быть равно $\mathcal{I}(Z)$ -топологии пространства Z . В этом случае в качестве f из $V^{\mathcal{Q}}$ берется поле вещественных чисел, понимаемое как пополнение поля $\mathbb{Q}$ дедеккиндовыми сечениями или фильтрами Коши. Конечно, ряд интересных объектов представляется в форме $\hat{f}^{\mathcal{Q}}$ и для булевой алгебры $\mathcal{Q}$. Перейдем к систематическому изложению.

Пусть везде Y — равномерно локально компактное пространство, $\mathcal{T}$ — его топология, а Σ — база симметрических открытых окружений. Обозначим через $\mathcal{Q}^{\mathcal{T}}$ множество всех $\text{сн}\mathcal{A}$ -морфизмов $\text{сн}\mathcal{A}^{\mathcal{T}}$ в $\text{сн}\mathcal{A}^{\mathcal{Q}}$. Обозначим через $\mathcal{Q}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{U}}$ множество всех $\mathcal{U}$ -морфизмов того же вида, а для $\rho \in \mathcal{F}_Y \leq \bigcup \{ \mathcal{Q}^{\mathcal{T}}_{\mathcal{U}} \mid \mathcal{U} \in \Sigma \}$ положим $\tilde{Y}(\rho) \leq \rho(Y)$ (см. [2]). Так как $\mathcal{F}_Y \leq V^{\mathcal{Q}}$ (с учетом отождествления α из $\mathcal{T}$ и α^V), то $\tilde{Y} \in V^{\mathcal{Q}}$. Там же показано, что $(\tilde{Y})^{\wedge \mathcal{Q}} \cong \mathcal{Q}^{\mathcal{T}}$ и $[\tilde{Y}]$ — множество всех содержащихся в $\tilde{Y}$ баз фильтров Коши для пространства $\langle \tilde{Y}, \mathcal{T}^V, \Sigma^V \rangle$, $[\tilde{Y}]_{\mathcal{Q}} = 1$, т.е. $\tilde{Y}$ — пополнение $\tilde{Y}$ в $V^{\mathcal{Q}}$. В [2] показано, что $\mathcal{Q}^{\mathcal{T}}$ изоморфно $C_1(X, Y)$, где X — стоуново пространство алгебры $\mathcal{Q}$; этот изоморфизм обозначим ψ , а его значение на классе эквивалентности $[f]$ обозначим через ρ_f , при этом $\rho_f(\alpha) \leq \hat{f}^{\mathcal{Q}}(\alpha)$, $\alpha \in \mathcal{T}$ (см. [2]). В $\mathcal{Q}^{\mathcal{T}}$ определяются предикаты

$$(p \bar{=} q) \Leftrightarrow [\exists \alpha \in \tilde{I} (\alpha \bar{\leq} \bar{\sigma} \wedge \alpha \in p \wedge \alpha \in q)]_{\Omega} = \bigvee_{\alpha \bar{\leq} \bar{\sigma}} ,$$

$$p(\alpha) \wedge q(\alpha) = 1 \text{ и } (p \# q) \Leftrightarrow [\exists \alpha, \beta \in \tilde{I} (\alpha \in p \wedge \beta \in q \wedge \alpha \bar{\wedge} \beta = \phi)]_{\Omega} = \bigvee \{p(\alpha) \wedge q(\beta) \mid \alpha \bar{\wedge} \beta = \phi\} = 1,$$

где $\bar{\wedge}$ обозначает дизъюнктивность. Назовем их соответственно $\bar{\sigma}$ -равенством (аналог ε -равенства) и отделимостью. Ясно, что $p_f \bar{=} q_g \Rightarrow \exists S - \Omega$ -плотное в X ($\forall x \in S (\langle f(x), g(x) \rangle \in \bar{\sigma})$), а $\exists S - \Omega$ -плотное в X ($\forall x \in S (\langle f(x), g(x) \rangle \in \bar{\sigma}) \Rightarrow p_f \bar{=} q_g$. В частности, $\forall \bar{\sigma} (p_f \bar{=} q_g) \Leftrightarrow [f] = [g]$, т.е. $\bar{\sigma}$ -равенство имеет обычный смысл ε -равенства. Ясно, что $p_f \# q_g \Leftrightarrow \exists S - \Omega$ -плотное в X ($\forall x \in S (f(x) \neq g(x))$). В частности, $p \# q \Rightarrow p \neq q$, т.е. интуиционистски отделимость - это усиление неравенства.

Известно, что по любой $\text{сНа } \Omega$ канонически строится $\text{сВа } B$, в которую Ω сНа -вкладывается. Отсюда возникает вложение: $\bigvee^{\Omega} \subseteq \bigvee^B$. При этом

$$[f = g]_{\Omega} \leq [f = g]_B, \quad [f \in g]_{\Omega} \leq [f \in g]_B,$$

$$[p \bar{=} q]_{\Omega} = [p \bar{=} q]_B, \quad [p \# q]_{\Omega} = [p \# q]_B,$$

а $\Omega_{\mu}^{\tilde{I}}$ вкладывается в $B_{\mu}^{\tilde{I}}$, включая операции, для любого $\mu \in \Omega$. Все это сразу следует из того, что Ω вкладывается в B . Важно, что

$$[\forall p, q \in \tilde{I} (p \neq q \Leftrightarrow p \# q)]_B = 1$$

(для оценки $[\cdot]_{\Omega}$ это неверно). Здесь и далее $\neq$ и $\bar{\sigma}$ обозначают и указанные выше формулы в языке ZF внутри оценок.

Конечно, если $p = q$ и $p \# q$, то возникает противоречие, откуда интуиционистски $p \# q$ влечет $p \neq q$. Пусть $[p \neq q]_B = 1$, т.е. $[p = q]_B = 0$, где $p, q \in B^{\tilde{I}}$. Упомянутый выше изоморфизм дает для элементов p и q представление функциями f и g вида $f, g : O \rightarrow Y$, O - открытое и плотное в $X(B)$ мно-

жество, где $X(B)$ - стоуново пространство для B , причем $[p = q]_B = j\{x | f(x) = g(x)\}^0$ (см. [2]). Поэтому $F \neq \{x | f(x) = g(x)\}$ нигде не плотно, как и $\bar{F}$, а $(C\bar{F}) \cap O$ - открытое и плотное в $X(B)$ множество, на котором $f \neq g$. Это множество является и B -плотным, откуда $[p \neq q]_B = 1$.

Идея следующего определения состоит в том, что $\bar{\epsilon}$ -равенство и отделимость в каком-то абстрактном f могут быть заданы как $\|k\|_{\bar{\epsilon}} = \|t\|$ или $\|k - t\|_{\bar{\epsilon}} = 0$ и аналогично $\|k\| \neq \|t\|$ или $\|k - t\| \neq 0$, где $k, t \in f$ и "метрика" $\|\cdot\|: f \rightarrow \hat{Y}$, где $\hat{Y}$ - пополнение Y фильтрами Коши. В [2] рассматривается другая "метрика" $\|\cdot\|: f \rightarrow R^d$, где R^d - дедекиндовы вещественные числа. В этом случае роль " $\bar{\epsilon}$ " и " $\neq$ " выполняют предикаты $\lambda^2 < \epsilon$ и $\lambda^2 > 0$, где $\lambda \in R^d$.

Кольцом с метрикой назовем структуру вида $\langle f, Y, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\| \rangle$, где $\langle f, +, -, \cdot, 0, 1 \rangle$ - кольцевая структура и $\|\cdot\|: f \rightarrow \hat{Y}$, а $\hat{Y}$ - пополнение фильтрами Коши равномерного пространства Y . Формулу $\mathcal{E}$ назовем дедекиндовой, если для всякого фиксированного Y выполняется:

- 1) $\text{снa} \vdash \forall f, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\| (\mathcal{E}(f, \check{Y}, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\|) \Rightarrow \langle f, \check{Y}, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\| \rangle - \text{кольцо с метрикой});$
- 2) $\forall \mathcal{D} ([\mathcal{E}(f, \check{Y}, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\|)]_{\mathcal{D}} \subseteq [\mathcal{E}(f, \check{Y}, \dots)]_B);$
- 3) $\forall \mathcal{D} ([\mathcal{E}(f, \check{Y}, \dots)]_{\mathcal{D}} \wedge f(k) \wedge f(t) \subseteq [k - t \Rightarrow \|k - t\| = \check{0}]_B),$

где f - экстенциональная функция в V^R , $\mathcal{D}(f)$ - замкнутое относительно всех операций множество, а $\check{0}$ - фиксированный элемент в Y ;

- 4) $\forall \mathcal{D} ([\mathcal{E}(f, \check{Y}, \dots)]_{\mathcal{D}} \wedge f(k) \wedge f(t) \subseteq ([\|k\|_{\mathcal{D}} = \|t\|_{\mathcal{D}}]_B \wedge [k +_{\mathcal{D}} t = k +_B t]_B \wedge \dots)),$ где ... означает такое

же условие для операций $-, \cdot, 0, 1$. Например, если Y - топологическое кольцо и $f \subseteq \check{Y}$, то можно положить $\|p\| \leq p, \forall p \in f$. Дедеккиндовой является формула " f - множество баз в $\check{Y}$ фильтров Коши, замкнутое относительно операций $+, -, \cdot, 0, 1$ в $\check{Y}$ ". К этой формуле с сохранением её дедеккиндовости можно добавить, например,

такие условия: быть полем, быть алгебраически или вещественно замкнутым полем и т.п.

Пусть далее φ, ψ - формулы в языке колец с тесными отрицаниями, т.е. φ, ψ без импликаций и с отрицаниями только у атомарных формул, а, кроме того, ψ - АЕ-формула. Определим "перевод в посылке" φ^+ заменой каждого $k \neq t$ на $\|k - t\| \neq 0$ и "перевод в заключении" ψ^+ заменой каждого $k \neq t$, как в посылке, и каждого $k = t$ на $\|k - t\| = 0$, причем переменная θ замыкается в виде $\forall \theta \in \Sigma$ в группе кванторов всеобщности в ψ . Итак, по $\varphi \Rightarrow \psi$ образуем $\varphi^+ \Rightarrow \psi^+$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{A}$ - дедекиндова формула и $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^+$ образованы, как и выше, по $\mathcal{A}, \gamma, \varphi$ и ψ . Если $\mathcal{C}\mathcal{B}\mathcal{A} \models \mathcal{Z}$, то $\mathcal{C}\mathcal{H}\mathcal{A} \models \mathcal{Z}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем любое $\gamma \in \gamma$, γ - равномерное пространство с базами $\mathcal{T}$ и Σ , а также любое экстенциональное $f \in V^{\Sigma}$ с соответствующей областью определения и любые $k_1, \dots, k_n \in \mathcal{D}(f)$, для которых $0 < u \leq [\mathcal{A}(f, \gamma, \dots)]_{\Sigma} \wedge f(k_1) \wedge \dots \wedge f(k_n) \wedge [(\varphi^+)_f(k_1, \dots, k_n)]_{\Sigma}$. Наша цель - показать, что $u \leq [(\psi^+)_f(\bar{k})]_{\Sigma}$, откуда и будет следовать справедливость теоремы. Индукцией по длине φ легко проверить, что

$$u \wedge [(\varphi^+)_f(\bar{k})]_{\Sigma} \leq [\varphi_f(\bar{k})]_B.$$

По условию получаем $u \leq [\psi_f]_B$, откуда $u \leq [\psi_f^+]_B$. Индукцией по длине ψ (по квантора $\forall$) легко проверить, что

$$u \wedge [\psi_f^+]_B \leq [\psi_f^+]_{\Sigma}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Чтобы установить $[\mathcal{Z}^+]_{\Sigma} = 1$, требуется условие $[\mathcal{Z}]_B = 1$ только для одной определенной алгебры B , канонически образуемой по алгебре Σ . Это также позволяет переходить от некоторого класса булевых алгебр к соответствующему классу гейтинговых алгебр. Теорема 1 сохраняет силу, если в ней дополнительно разрешить кванторы по стандартным множествам, например, по N, Q

и т.д., а также разрешить многоосновные алгебраические системы с носителями $f_1, \dots, f_r$.

Пусть Y - локально-компактное поле. Ясно, что $[\tilde{Y}]_B = 1$ как в $V^{\mathcal{Q}}$, так и в V^B . Будем обозначать объект $\tilde{Y}$ в $V^{\mathcal{Q}}$, как $\tilde{Y}_{\mathcal{Q}}$, а в V^B , как $\tilde{Y}_B$. Поле определяется условием $\forall x \in f(x \neq 0 \Rightarrow \exists y \in f(x \cdot y = 1))$. Легко проверить, что $[f \subseteq \tilde{Y} - \text{поле}] = 1$ как в $V^{\mathcal{Q}}$, так и в V^B . Действительно, если $\rho \in \mathcal{Q}_u^T$ и $u \subseteq \tilde{Y}(\rho) \wedge [\rho \neq 0]_{\mathcal{Q}}$, то существует $\mathcal{Q}$ -плотное $\delta \subseteq u$, на котором f (соответствующее ρ) отлично от 0. На δ определим функцию f^{-1} , которая задает $q \in \mathcal{Q}_u^T$. Это q -искомый обратный элемент.

Заметим, что $[f \subseteq \tilde{Y} \wedge f - \text{поле}]_{\mathcal{Q}} \leq [f \subseteq \tilde{Y}_{\mathcal{Q}} \wedge f - \text{поле}]_B$, так как

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{Q}(f)} f(x) \xrightarrow{\mathcal{Q}} \bigvee_{\rho} \tilde{Y}(\rho) \wedge [x = \rho]_{\mathcal{Q}} \leq [f \subseteq \tilde{Y}_{\mathcal{Q}}]_B$$

и

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{Q}(f)} f(x) \xrightarrow{\mathcal{Q}} ([x \neq 0]_{\mathcal{Q}} \xrightarrow{\mathcal{Q}} \bigvee_y f(y) \wedge [x \cdot y = 1]_{\mathcal{Q}}) \leq [f - \text{поле}]_B.$$

Кроме того, $[\tilde{Y}_{\mathcal{Q}} - \text{подполе } \tilde{Y}_B]_B = 1$, так как $\mathcal{Q}_u^T$ содержится в B_u^T . Поэтому $\mathcal{Q}(f) \leq "f \subseteq \tilde{Y} \wedge f - \text{поле}"$ - дедекиндова формула, которая задает семейство всех подполей в $\tilde{Y}_{\mathcal{Q}}$ в $V^{\mathcal{Q}}$ и некоторое семейство подполей в $\tilde{Y}_B$ в V^B . Отсюда свойства подполей в $\tilde{Y}_B$, а точнее, свойства подполей в $\tilde{Y}_{\mathcal{Q}}$ в V^B переносятся на подполя в $\tilde{Y}_{\mathcal{Q}}$ в $V^{\mathcal{Q}}$. Сейчас рассмотрим теорему Гильберта о нулях по несколько иной схеме: без участия $\mathcal{Q}$ и φ .

Пусть Y - локально-компактное поле и Y^a - любое алгебраически замкнутое и локально-компактное поле, содержащее Y . Тогда $[\tilde{Y}_{\mathcal{Q}} - \text{подполе в } \tilde{Y}_B \text{ и } \tilde{Y}_B - \text{подполе в } \tilde{Y}_B^a]_B = 1$ и $[\tilde{Y}_B^a - \text{алгебраически замкнутое поле}]_B = 1$. Поэтому в качестве расширения из теоремы Гильберта в V^B можно использовать $\tilde{Y}_B^a$. При этом

$$C(X, Y) \cong (\tilde{Y}_{\mathcal{Q}})^{\wedge \mathcal{Q}} \subseteq (\tilde{Y}_{\mathcal{Q}})^{\wedge B}.$$

$$1 = \bigvee_p \tilde{Y}_Q(p) \wedge [x=p]_Q \leq \bigvee_p \tilde{Y}_Q(p) \wedge [x=p]_B.$$

Отсюда

$$C_1(X, Y) \subseteq (\tilde{Y}_B^a)^{\wedge B} \cong C_1(X_B, Y^a),$$

где X_B - стоуново пространство для B . Для многочленов $h_1, \dots, h_r, h$ над $C_1(X, Y)$ посылка теоремы Гильберта в V^B начинается:

$$\forall x_1, \dots, x_n \in C_1(X_B, Y^a) ([h_1(\bar{x}) = 0]_B \wedge \dots \wedge [h_r(\bar{x}) = 0]_B \leq [h(\bar{x}) = 0]_B),$$

где $[f=g]_B = j\{x \in X_B \mid f(x)=g(x)\}^0$, а j^α - внутренность замыкания α (т.е. вычисление $[h_1(\bar{x})=0]_B$ и т.п. может происходить без участия оценки в V^B). Такое условие на многочлены $h_1, \dots, h_r, h$ над $C_1(X, Y)$ назовем согласованностью этих многочленов.

С чисто иллюстративной целью приведем следующий аналог теоремы Гильберта

ПРИМЕР 1. Пусть Y - локально-компактное поле, а Y^0 - алгебраически замкнутое и локально-компактное поле, содержащее Y . Пусть $h_1, \dots, h_r, h$ - любые согласованные многочлены над $C_1(X, Y)$, а Ω - гейтингова алгебра для стоунова пространства X . Если Ω -компактная и нульмерная алгебра, то для любого $\sigma \in \Sigma_Y$ существуют многочлены $g_1, \dots, g_r$ над $C_1(X, Y)$, для которых $h^\rho = \frac{1}{\sigma} g_1 \cdot h_1 + \dots + g_r \cdot h_r$. Здесь равенство многочленов понимается алгебраически, а ρ и степени многочленов $g_1, \dots, g_r$ определяются по степеням $h_1, \dots, h_r, h$; от σ зависят только коэффициенты многочленов $g_1, \dots, g_r$. Доказательство сразу следует из того, что сказано выше, и теоремы 1.

Наиболее простым примером упомянутой выше компактной и нульмерной алгебры Ω является $\Omega \cong \mathcal{T}(Z)$, где $\mathcal{T}(Z)$ - топология то-

топологического пространства Z , а Z - вполне несвязный компакт. В этом случае $V^{\mathcal{Q}}$ обладает свойством достижимости: для любой формулы φ если $[\exists x \varphi(x)]_{\mathcal{Q}} = 1$, то $[\varphi(g)]_{\mathcal{Q}} = 1$ для некоторого $g \in V^{\mathcal{Q}}$. В примере 1 от $\mathcal{Q}$ требуется только это свойство достижимости для атомарной формулы φ . В этом же примере можно заменить кольцо $C_1(X, Y)$ на кольцо $C(Z, Y)$ для любого вполне несвязного компакта Z ; например, для $Y \cong \mathbb{R}$. Это сразу следует из того, что кольца $C_1(X, \mathbb{R})$ и $C(Z, \mathbb{R})$ (и даже пучки соответствующих функций) изоморфны, см. ниже следствие.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{Q}$ - произвольная полная гейтингова алгебра. Обозначим через $R^{\mathcal{Q}}$ кольцо дедекиндовых сечений в $\mathcal{Q}$. Тогда кольцо $(R^{\mathcal{Q}})^{\wedge_{\mathcal{Q}}}$ изоморфно кольцу $C_1(X, \mathbb{R})$ с помощью отображения $\varphi: [f] \mapsto \langle \lambda, \lambda_1 \rangle$, где $\lambda(z) \cong j f^{-1/6}(z, \infty)$ и $\lambda_1(s) \cong j f^{-1/6}(-\infty, s)$, $z, s \in \mathcal{Q}$.

Пусть Z - любое топологическое пространство и $\mathcal{Q} \cong \mathcal{T}(Z)$. Хорошо известно, что в этом случае кольцо $(R^{\mathcal{Q}})^{\wedge_{\mathcal{Q}}}$ изоморфно $C(Z, \mathbb{R})$ с помощью отображения $h \mapsto \langle \lambda, \lambda_1 \rangle$, где $\lambda(z) \cong h^{-1/6}(z, \infty)$ и $\lambda_1(s) \cong h^{-1/6}(-\infty, s)$. Обратное к нему отображение - отображение вида $\langle \lambda, \lambda_1 \rangle \mapsto h$, где $h(z) \cong \sup\{z \in \mathcal{Q} \mid z \in \lambda(z)\}$, причем множество в фигурных скобках для любого z является нижним классом сечения в $\mathcal{Q}$, а λ, λ_1 всегда можно считать определенными на $\mathcal{Q}$. Будем обозначать через λ_h сечение, соответствующее $h \in C(Z, \mathbb{R})$. Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ. Кольца $C_1(X, \mathbb{R})$ и $C(Z, \mathbb{R})$ (и соответствующие им пучки функций) изоморфны. Кольца $R_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{Q}}$ и $\tilde{R}_{\mathcal{Q}}$ изоморфны в $V^{\mathcal{Q}}$ при любом $\mathcal{Q}$. Если Z - регулярное, бэровское пространство (а $\dot{Z}$ - его абсолюта), то этот изоморфизм имеет вид: $h \mapsto (h \circ x)'$, где $h \in C(Z, \mathbb{R})$ и $x: \dot{Z} \rightarrow Z$ - каноническое отображение, а $(\cdot)'$ обозначает однозначно определенное продолжение $h \circ x$ до непрерывной функции g_h на открытой $\mathcal{Q}$ -плотной в X окрестности S_h абсолюта $\dot{Z}$, а также и класс эквивалентности $[g]$ этой функции g в $C_1(X, \mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Вместо $\varphi([f])$ будем писать λ_f . Дедекиндово вещественное число (сечение в $\mathcal{Q}$) определяется как пара подмножеств в $\mathcal{Q}$, удовлетворяющая четырем условиям:

1) $\exists z, s (z \in \lambda \wedge s \in \lambda_1)$; 2) λ и λ_1 не пересекаются;
 3) $z \in \lambda \Leftrightarrow \exists s > z (s \in \lambda)$ и $s \in \lambda_1 \Leftrightarrow \exists z < s (z \in \lambda_1)$; 4) $z < s \Rightarrow$
 $\Rightarrow z \in \lambda \vee s \in \lambda_1$. Прямое вычисление оценок показывает, что
 $[\langle \lambda, \lambda_1 \rangle - \text{сечение в } \check{Q}]_{\mathcal{Q}} = 1$. Если g - новый представи-
 тель класса эквивалентности $[f]$, т.е. $f \sim g$ на $S_f \cap S_g$, то
 $(f^{-1^6}(z, \infty) \cap S_g) = (g^{-1^6}(z, \infty)) \cap S_f$ и $\varphi([f]) = \varphi([g])$.
 Итак, φ корректно определено. Это φ инъективно: если $f \not\sim g$,
 т.е. $f(x) \neq g(x)$, где $x \in S_f \cap S_g$, то существует окрестность
 точки x (где $u \in S_f \cap S_g$), для которой $f(u) > z$ и $g(u) < z$.
 Отсюда $u \in f^{-1^6}(z, \infty)$ и $u \notin g^{-1^6}(z, \infty) = \emptyset$, т.е. $[\lambda_f = \lambda_g]_{\mathcal{Q}} = 1$.
 Доказательство того, что φ сюръективно, более сложно.

Пусть $[\lambda \leq \langle \lambda, \lambda_1 \rangle - \text{сечение в } \check{Q}]_{\mathcal{Q}} = 1$. Можно считать,
 что λ, λ_1 определены на $\mathcal{Q}$. Образует по λ функцию $\rho(\alpha) \leq$
 $\leq [\exists z, s \in \check{Q} (z \in \lambda \wedge s \in \lambda_1 \wedge (z, s) \leq \check{\alpha})]_{\mathcal{Q}}$. Тогда $[\rho - \text{база фильтра}$
 $\text{Коши в } \check{X}]_{\mathcal{Q}} = 1$ и $\rho(\alpha) = [\check{\alpha} \in \rho]_{\mathcal{Q}} = \bigvee_{(z, s) \in \alpha} \lambda(z) \wedge \lambda_1(s)$,
 причем $\rho \in \mathcal{Q}^{\mathcal{J}}$. С помощью ψ^{-1} по ρ образуем $f \in C_1(X, R)$, т.е.
 $\rho(\alpha) = j(f^{-1}(\alpha))$. Отсюда $\rho^6(z, \infty) = j(f^{-1^6}(z, \infty))$, т.е. $\rho^6(z, \infty) =$
 $= \lambda_f(z)$, $\forall z \in \mathcal{Q}$. С другой стороны, $[(z, \infty) \in \rho \Leftrightarrow z \in \lambda]_{\mathcal{Q}} = 1$,
 т.е. $\rho^6(z, \infty) = \lambda(z)$. Итак, $[\lambda = \lambda_f]_{\mathcal{Q}} = 1$, т.е. $\varphi([f]) = \langle \lambda, \lambda_1 \rangle$. То,
 что φ - гомоморфизм, следует из очевидных формул $(f+g)^{-1^6}(z, \infty) =$
 $= \bigcup_{t < z+s} f^{-1^6}(z, \infty) \cap g^{-1^6}(s, \infty)$ и также для $f \cdot g$. Отметим еще
 равенства $[\lambda_h = \lambda_{h_1}]_{\mathcal{Q}} = \{z \in \mathbb{Z} \mid h(z) = h_1(z)\}^0 = [\lambda_f = \lambda_{f_1}]_{\mathcal{Q}} = j\{x \in$
 $\in X \mid f(x) = f_1(x)\}^0$, где h соответствует f , и $[\lambda = \mu]_{\mathcal{Q}} =$
 $= [\rho_\lambda = \rho_\mu]_{\mathcal{Q}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следствия. Сначала дополним теорему 2 од-
 ним замечанием. Пусть $\lambda \leq \lambda_f$ - сечение, полученное по $[f] \in$
 $\in C_1(X, R)$. Пусть $S_f \leq \mathcal{D}(f)$. Положим $S_g \leq \bigcup_{z, s} \lambda(z) \wedge \lambda_1(s)$, это
 открытое $\mathcal{Q}$ -плотное множество, и $g(x) \leq \sup\{z \in \mathcal{Q} \mid x \in \lambda(z)\}$, $x \in S_g$.
 Ясно, что множество $t \leq \{r \in \mathcal{Q} \mid x \in \lambda(r)\}$ непусто, ограничено
 сверху и транзитивно вниз и, в частности, g определена на S_g
 и выполняется $S_g \supseteq S_{f \cdot g}$ и $g = f$ на S_f . Действительно, если
 $x \in S_f$, то $x \in j f^{-1}(r, \infty) = \lambda(r)$ и аналогично $x \in \lambda_1(s)$

для некоторых r и s , т.е. $x \in S_g$. Пусть $x \in S_f$. Если $f(x) > r$, то $x \in \lambda(r)$. Отсюда $g(x) \geq f(x)$. Если $x \in \lambda(r)$, то $f(x) \geq r$ (отсюда и следует равенство), так как иначе $f(x) < r$. Отсюда $x \in jf^{-1}(-\infty, r)$, $x \in jf^{-1}(-\infty, r) \cap jf^{-1}(r, \infty) = \emptyset$.

Противоречие.

Мы не утверждаем, что в общем случае g непрерывна на S_g . Но если Ω -топология, то $\dot{Z} \subseteq S_g$ и g непрерывна на S_g . Действительно, S_g содержит абсолют $\dot{Z}$ потому, что S_g "в Z " совпадает со всем Z . Множество t обладает свойством $r \in t \Leftrightarrow \exists s > r, s \in t, \forall r \in \mathbb{Q}$, так как имеющее место свойство $[x \in \lambda \Leftrightarrow \exists s > x (s \in \lambda)]_{\dot{Z}} = 1$ означает $\lambda(r) = \bigcup_{s > r} \lambda(s)$. Отсюда выполняется $g(x) > s \Leftrightarrow x \in (\lambda(s) \cap S_g)$, т.е. $\dot{g}^{-1}(s, \infty)$ открыто в S_g и также для $g^{-1}(-\infty, r)$. Итак, g непрерывна на S_g .

Напомним, что $\dot{Z}$ состоит из всех ультрафильтров в $\mathcal{T}(Z)$, сходящихся к каким-то точкам из Z . С этого места будем считать, что точками стоунова пространства X алгебры $\mathcal{T}(Z)$ являются копростые фильтры, а не простые идеалы; тогда $\dot{Z} \subseteq X$. В $\dot{Z}$, как и в X , рассматриваются топологии Зарисского, при этом $\dot{Z}$ - плотное подпространство в X . Определяется отображение $x: \dot{Z} \rightarrow Z$, $x(x) \Leftarrow \lim x$ - неприводимое и совершенное отображение; $\dot{Z}$ - экстремально несвязное и регулярное пространство. Итак, мы доказали, что в любом классе эквивалентности $[f]$ содержатся такие элементы g , что $S_g \supseteq \dot{Z}$. Пусть снова $\lambda \Leftarrow \lambda_f$ -сечение, полученное по $[f]$, где $f \sim g$, а g указано выше. Образует $h_\lambda \in \mathcal{C}(Z, R)$ и $h_\lambda \circ x: \dot{Z} \rightarrow R$. Оказывается, что g не только продолжение f с S_f на S_g , но и продолжение $h_\lambda \circ x$ с $\dot{Z}$ на S_g , т.е. $g \upharpoonright \dot{Z} = h_\lambda \circ x$. Проверим это. Пусть $x \in Z$ и $\lim x = z$. Тогда $h_\lambda \circ x(x) = h_\lambda(z) \Leftarrow \sup \{v | x \in \lambda(v)\}$, а $g(x) \Leftarrow \sup \{v | x \in \lambda(v)\}$. Мы укажем плотное в Z множество D , на котором $h_\lambda \circ x$ совпадает с g ; отсюда $h_\lambda \circ x$ совпадает с g на всем $\dot{Z}$. Обозначим $F_g \Leftarrow \bigcup_v g^{-1}(\lambda(v)) \subseteq Z$, где $g^{-1}(\cdot)$ - граница множества. Это множество F_g тощее (т.е. счетное объедине-

ние нигде не плотных множеств). Его дополнение обозначим через G_δ . Так как по условию Z — бэровское пространство, то G_δ плотно в Z . Пусть $D \subseteq x^{-1}(G_\delta)$. Если $\bar{D} \neq \dot{Z}$, то $x(\bar{D})$ замкнуто в Z и $\bar{G}_\delta \subseteq x(\bar{D})$, $x(\bar{D}) = Z$, что противоречит неприводимости x . Для $x \in D$ выполняются $x \in \mathcal{N}(v) \iff x \in \mathcal{N}(v), \forall v \in Q$. Отсюда если g соответствует h (в том смысле, что $g \upharpoonright \dot{Z} = h \circ x$), то $[\lambda_g = \lambda_h]_\Omega = 1$, где $[g] \in G_1(X, R)$ и $h \in C(Z, R)$.

ПРИМЕР 2. Пусть K — произвольное кольцо. По его пирсовскому пучку $\mathcal{F}(\cdot)$ определяется такой объект $K' \in V^{\Omega}$, где Ω — топология стоунова пространства булевой алгебры всех центральных идемпотентов в K , что $(K')^{\wedge \Omega} \cong K$. Пучок $\mathcal{F}(\cdot)$ продолжается на B , канонически образованное по Ω . Это продолжение определяет объект $K'' \in V^B$ и $[K' \subseteq K'']_B = 1$. Свойства K' в V^B переносятся по теореме 1 на K' в V^{Ω} , а затем все они (не только хорновы) переносятся и на K (в форме $\varphi \mapsto \varphi'$, см. [2]). Иными словами, рассмотрим K' в V^B и образуем $L \subseteq (K')^{\wedge B}$. Такое L является ортогонально полным кольцом и обладает свойствами "ортогонально полного замыкания" кольца K . Свойства K' в V^{Ω} и K' в V^B тесно связаны указанным выше переводом.

Л и т е р а т у р а

1. R. GRAYSON, Heyting-valued models for intuitionistic set theory, in: Lecture Notes in Mathematics, 753, Berlin a.o., Springer, 1977, 402-414.

2. В.А. ЛЮБЕЦКИЙ, Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа, Успехи матем. наук, 44, вып. 4 (1989), 99-153.

Адрес автора:

Поступило 15 сентября 1989г.

ЛЮБЕЦКИЙ Василий Александрович,
Москва, 609,
Рублевское шоссе,
42, корп. 2, кв. 164.

П р и м е ч а н и е при корректуре (ноябрь 1990 года). В работе, по существу, доказано и следующее утверждение. Пусть φ, ψ - формулы в языке колец; в посылке любой импликации, входящей в φ , нет квантора $\forall$ и квантор $\exists$ не входит в область действия $\Rightarrow$; пусть T - теория из таких формул φ , а ψ - АЕ-формула, $\varphi = \forall \bar{k} (T(\bar{k}) \Rightarrow \psi(\bar{k}))$ и $\varphi' = \forall \bar{k} (T'(\bar{k}) = \psi'(\bar{k}))$; пусть специальная переменная K пробегает все (нормальные в заключении) кольца со счетным носителем. В следующих утверждениях посылка U понимается как $ZF \vdash U$, а заключение V понимается как $ZFI' \vdash V$ (если в посылке $Z \vdash U$, то в заключении $ZFI \vdash V$). Итак, 1) если $\forall K (\varphi)_K$, то $\forall K$ (неразложимое $\Rightarrow \varphi$) и $\forall K (\varphi')_K$; 2) если $\forall K (i' \Rightarrow \varphi)_K$, то $\forall K (i \Rightarrow \varphi')_K$, где $i \leftrightarrow i'$ - пары свойств из [2] (всегда выполняется: $i' \Rightarrow$ неразложимое); 3) если (интуиционистски) $\forall K$ [неразложимое $\wedge T \Rightarrow \varphi]_K$, то $\forall K$ [$T' \Rightarrow \psi']_K$; наконец, можно заменить T на теоретико-множественное условие $\mathcal{A}(K)$, где $\mathcal{A}$ - абсолютная формула.