Алгебра и логика, 30, № 6 (1991), 652-670

УДК 510.67:512.55

ПЕРЕХОД ОТ ВЫВОДИМОСТИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ К ВЫВОДИМОСТИ В ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ЯЗЫКА КОЛЕЦ

В.А.ЛЮБЕЦКИЙ

Настоящая работа непосредственно продолжает работу автора [6] и, в сущности, представляет собой развернутое изложение одного аспекта теоремы 1 из работы [6]. Мы покажем, что для широкого класса свойств в языке теории колец из их выводимости в классической теории множеств Цермело-Френкеля ZF вытекает их выводимость в интуиционистских теориях множеств ZFI или ZFI', сформулированных Р.Грейсоном [1]. Причем переход от первого вывода ко второму происходит финитно (примитивно-рекурсивной функцией), т.е. совершенно явным образом, и с линейным увеличением длины второго вывода по сравнению с длиной первого вывода.

Теория ZFI и (в меньшей степени) теория ZFI' обладают свойствами дизъюнктности и экзистенциальности. Напомним, что второе из этих свойств означает: если $ZFI\vdash\exists x\varphi(x)$, то явно определяется терм $t\leftrightharpoons\{y\,|\,\psi(y)\}$ в языке ZF, для которого $ZFI\vdash\varphi(t)$; причем $ZFI\vdash\exists!x(x=t)$. Для теории ZFI' это свойство означает то же самое, но при некоторых ограничениях на вид формулы φ. Поэтому можно представить себе такую "программистскую" схему: если $ZF\vdash\exists x\varphi(x)$, то $ZFI\vdash\exists x\varphi'(x)$ и отсюда $ZFI\vdash\varphi'(t)$, где t - соответствующий терм. Здесь $\varphi'=\varphi$ или φ' близко по смыслу к φ. Если формулу $\exists x\varphi(x)$ заменить на формулу $\forall\alpha\exists x\varphi(\alpha,x)$, то верна такая же схема, где теперь терм t будет зависеть от параметра α. Эта схема соединяет выразительную силу языка и теории ZF с определенной эффективностью (возможностью построения программы). Впрочем независимо от этого обстоятельства тема перехода от классической логики к интуиционистской, при котором в формуле φ не возникали бы "внесмысловые" вставки (т.е., например, связки $\neg\neg$ и релятивизации к классу стабильных множеств), давно и активно изучается, начиная с работы П.С.Новикова [2] . В этой работе П.С.Новиков доказал теорему, соответствующую указанной схеме, а также высказал гипотезу, что его теорема "верна при очень широких условиях". Автор думает, что эта гипотеза находит подтверждение, в частности, в настоящей работе.

Отметим еще связь нашей работы с принципом А.А.Маркова. Упомянутая теорема П.С.Новикова и другие теоремы на эту тему могут рассматриваться как обоснования частных случаев общего семантического принципа Маркова.

Далее везде метаматематикой нашей работы является выводимость в теории ZFI , если только специально не оговариваются две другие возможности: метаматематика суть выводимость в теории ZFI' или строго финитная метаматематика. Аналогично поступают и в работе [1] .

Пусть везде далее Ω - любая фиксированная полная гейтингова алгебра. В фундаментальной работе [1] определяются класс V^Ω (все его функции всюду определены) и оценка $[\![\cdot]\!]_\Omega$ для языка ZF с семейством параметров V^Ω . Подробнее определения и свойства, которые мы изложим сейчас (вплоть до предложения 1), см. в [1,3] .

Для указанной оценки выполняются свойства:

$$[\![f\in g]\!]_\Omega = \bigcup\{g(h)\wedge [\![f=h]\!]_\Omega \mid h\in \mathcal{D}(g)\},$$

$$[\![f=g]\!]_\Omega = \bigcap\{[\![h\in f]\!]_\Omega \leftrightarrow [\![h\in g]\!]_\Omega \mid h\in \mathcal{D}(f)\cup\mathcal{D}(g)\}. \qquad (1)$$

Обозначим через LEM схему аксиом закона исключенного третьего. Значение этой оценки на всех логических аксиомах интуиционистского исчисления предикатов и на специальных аксиомах теории ZF: объемности, пары, объединения, степени, бесконечности, выделения, ε-индукции (эквивалентной в присутствии LEM аксиоме фундирования) - равно единице 1 (из Ω). То же верно и для аксиомы подстановки и даже аксиомы собирания (collection), но метаматематикой в этом случае должна быть теория ZFI' .

Обозначим через $Ord(x)$ обычную формулу, говорящую " x - ординал". Определяется ранг множества как $rk(x) \leftrightharpoons \bigcup\{rk(y)^+ \mid y\in x\}$ и $V_\alpha \leftrightharpoons \bigcup\{\mathcal{P}(V_\beta)\mid \beta\in\alpha\}$, $V \leftrightharpoons \bigcup\{V_\alpha \mid Ord(\alpha)\}$, где $\mathcal{P}(x)$ - степень множества x . При этом выполняется:

$$Ord(rk(x)),\ \forall x;\ \forall x\,(Ord(x)\Rightarrow rk(x)=x);\ \forall x\,(x\in V_{rk(x)^+});$$

$$\alpha\subseteq\beta \Rightarrow V_\alpha\subseteq V_\beta;\ x\subseteq y\in V_\alpha \Rightarrow x\in V_\alpha;\ V_\alpha\cap On = rk(V_\alpha). \qquad (2)$$

Здесь α,β пробегают On - класс всех ординалов.

Определяется отображение $(\cdot)^\vee\colon V\to V^\Omega$ как $x^\vee\in V^\Omega_{rk(x)}$,

$$x(f) \leftrightharpoons \cup\{[\![f=y]\!] \mid y\in x\}, \text{ где } f\in V^{\Omega}_{<rk(x)}. \qquad (3)$$

Здесь и далее в понятных случаях индекс в обозначении этой и последующих оценок опускается.

Далее проверяются свойства:

1) $[\![f=g]\!]\wedge[\![\varphi(f)]\!]\leq[\![\varphi(g)]\!]$, где φ - любая формула с параметрами;

2) $[\![\forall x\in f\ \varphi(x)]\!]=\cap\{f(x)\to[\![\varphi(x)]\!]\mid x\in\mathcal{D}(f)\}$, $[\![\exists x\in f\ \varphi(x)]\!]=$

$=\cup\{f(x)\cap[\![\varphi(x)]\!]\mid x\in\mathcal{D}(f)\}$, где φ - любая формула с параметрами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $f\in V^{\Omega}$ называется экстенсиональной относительно оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega}$, если

$$\forall x,y\in\mathcal{D}(f)\ (f(x)\cap[\![x=y]\!]\leq f(y)). \qquad (4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если* f *- экстенсиональная функция, то* $\forall y\in\mathcal{D}(f)\ ([\![y\in f]\!]=f(y))$.

Доказательство очевидно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть K - любое ассоциативное с единицей кольцо. Обозначим через $B(K)$ булеву алгебру всех центральных идемпотентов кольца K, а через $\mathcal{T}(K)$ - полную гейтингову алгебру всех простых идеалов в $B(K)$. Класс $V^{\mathcal{T}(K)}$ назовем соответствующим кольцу K гейтинговозначным универсумом.

Обозначим через $A(K)$ нульмерную полную гейтингову алгебру всех J-операторов на алгебре $\mathcal{T}(K)$, а через $\mathcal{B}(K)$ - подрешетку в $A(K)$ всех стабильных элементов в $A(K)$. (Стабильным в A называется элемент u, для которого $\neg\neg u=u$, где $\neg$ вычисляется в A.) Такая решетка $\mathcal{B}(K)$ является полной булевой алгеброй. Все это подробнее см. в [4, 3]. Класс $V^{\mathcal{B}(K)}$ назовем соответствующим кольцу K булевозначным универсумом. Во всех этих и последующих обозначениях индекс K будем часто опускать.

Напомним, что $\mathcal{T}$ канонически вкладывается в $\mathcal{B}$ и поэтому

$$V^{\mathcal{T}}\subseteq V^{\mathcal{B}}.$$

Определим вспомогательную оценку:

$$[\![k=t]\!]\leftrightharpoons\{e\in B(K)\mid e\cdot k=e\cdot t\}\in\mathcal{T}(K).$$

Эта оценка, как и любая оценка, канонически продолжается на множество всех предложений соответствующего языка, в данном случае на множество всех предложений в языке колец с множеством параметров K. Одно такое продолжение получается для этой оценки со значениями в $\mathcal{T}(K)$ (его мы обозначим через $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$), а другое продолжение получается для этой же оценки со значениями в $\mathcal{B}(K)$ (его мы обозначим через $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$). Конечно, $[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}}=$ $=[\![k=t]\!]_{\mathcal{B}}, \forall k,t\in K$ Подробнее см. в [3] .

Заметим, что

$$K\in V^{\mathcal{T}}_{rk(K)},\ K:V^{\mathcal{T}}_{<rk(K)}\to\mathcal{T} \text{ и } \forall k\in K(k\in V^{\mathcal{T}}_{rk(k)}\wedge rk(k)\in rk(K)),\{k|k\in K\}\subseteq V^{\mathcal{T}}_{<rk(K)}.\quad (5)$$

И также для случая $V^{\mathcal{B}(K)}$.

1) Определим функцию P_k вида

$$P_k(\cdot):V^{\mathcal{T}}_{<rk(K)}\to\mathcal{T} \text{ как } P_k(f)\rightleftharpoons\cup\{[\![f=t]\!]_{\mathcal{T}}\cap[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}}|t\in K\}.$$

Конечно, $\{P_k|k\in K\}\subseteq V^{\mathcal{T}}_{rk(K)}$. Определим функцию $K'_{\mathcal{T}}:V^{\mathcal{T}}_{<rk(K)^+}\to\mathcal{T}$ как $K'(f)_{<rk(K)}\rightleftharpoons\cup\{[\![f=P_k]\!]_{\mathcal{T}}|k\in K\}$, где $f\in V^{\mathcal{T}}_{<rk(K)^+}=V^{\mathcal{T}}_{<rk(K)}\cup$ $\cup V^{\mathcal{T}}_{rk(K)}$. Конечно, $K'\in V^{\mathcal{T}}_{rk(K)^+}$.

2) Точно так же определим функцию $K'_{\mathcal{B}}$, заменив везде в определении $K'_{\mathcal{T}}$ алгебру $\mathcal{T}$ на алгебру $\mathcal{B}$.

3) Кольцо K назовем $\mathcal{T}$-кольцом, если $\forall k,t\in K$ $([\![k^{\vee}=t^{\vee}]\!]_{\mathcal{T}}\leq$ $\leq[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}}$), и назовем $\mathcal{B}$-кольцом, если $\forall k,t\in K$ $([\![k^{\vee}=t^{\vee}]\!]_{\mathcal{B}}\leq$ $\leq[\![k=t]\!]_{\mathcal{B}})$. Легко заметить, что $\mathcal{B}$-кольцо является и $\mathcal{T}$-кольцом.

4) Определим функцию $+':V^{\mathcal{T}}_{<\alpha}\to\mathcal{T}$ как $+'(f)\rightleftharpoons\cup\{[\![f=<P_r,P_s,$ $P_{r+s}>]\!]_{\mathcal{T}}|r,s\in K\}$, где α таково, что все тройки $<P_r,P_s,P_t>\in V^{\mathcal{T}}_{\alpha}$ для всех P_r,P_s,P_t из $V^{\mathcal{T}}_{rk(K)}$. Аналогично определяются $+'$, $-'$, $\cdot'$, а также $0'\rightleftharpoons P_0$, $1'\rightleftharpoons P_1$. Все эти штрихи подразумевают индекс $\mathcal{T}$, так как связаны с оценкой $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$. Заменяя эту оценку на оценку $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$, получаем определения функций $+'_{\mathcal{B}}$, $-'_{\mathcal{B}}$, $\cdot'_{\mathcal{B}}$, $0'_{\mathcal{B}}$, $1'_{\mathcal{B}}$. Как всегда, в понятных случаях индексы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{B}$ будут опускаться.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. а) *Функции* P_k *(для любого* $k\in K$ *) экстенсиональны относительно оценок* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$ *и* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$.

б) *Для* $\mathcal{T}$*-кольца* K *выполняется* $[\![P_k=P_\ell]\!]_{\mathcal{T}}=[\![k=\ell]\!], \forall k,\ell\in K.$ *Для* $\mathcal{B}$ *-кольца* K *выполняется* $[\![P_k=P_\ell]\!]_{\mathcal{B}}=[\![k=\ell]\!], \forall k,\ell\in K.$

в) *Выполняются соотношения:*

1) $[\![t_1=r]\!]\cap[\![t_2=s]\!]\leq[\![t_1+t_2=r+s]\!],\ \forall t_1,r,t_2,s\in K;$

2) $[\![<P_r, P_s, P_{r+s}> \in +']\!]_{\mathcal{T}} = 1, \forall r, s \in K.$ *И также для случая оценки* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$.

3) *Для* $\mathcal{T}$*-кольца* K *выполняется:* $[\![<P_r, P_s, P_\ell> \in +' \cap$ $\cap <P_r, P_s, P_t> \in +']\!]_{\mathcal{T}} \leq [\![P_\ell = P_t]\!]_{\mathcal{T}}, \forall r, s, \ell, t \in K$. *И также для* $\mathcal{B}$*-кольца* K *и соответственно оценки* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$.

4) *Для* $\mathcal{T}$*-кольца* K *выполняется:* $[\![+' : K'_{\mathcal{T}} \times K'_{\mathcal{T}} \to K'_{\mathcal{T}}]\!]_{\mathcal{T}} = 1.$ *И также для* $\mathcal{B}$*-кольца* K *и соответственно оценки* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Вычисляем $P_k(f) \cap [\![f=g]\!]_{\mathcal{T}} = \cup \{[\![f=t]\!]_{\mathcal{T}} \cap$ $\cap [\![k=t]\!] \cap [\![f=g]\!]_{\mathcal{T}} \mid t \in K\} \leq \cup \{[\![g=t]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![k=t]\!] \mid t \in K\} = P_k(g)$.

Точно так же вычисляем для случая оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$.

б) В силу экстенсиональности и предложения 1 левая часть вычисляется как $\cap \{P_k(f) \leftrightarrow P_\ell(f) \mid f \in V^{\mathcal{T}}_{<rk(K)}\}$. Сначала проверим неравенство в одну сторону: $[\![k=\ell]\!] \cap P_k(f) = \cup \{[\![f=t]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![k=t]\!] \cap$ $\cap [\![k=\ell]\!] \mid t \in K\} \leq \cup \{[\![f=t]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![\ell=t]\!] \mid t \in K\} = P_\ell(f)$. Отсюда $[\![k=\ell]\!] \leq (P_k(f) \leftrightarrow P_\ell(f))$, $[\![k=\ell]\!] \leq [\![P_k = P_\ell]\!]_{\mathcal{T}}$.

Теперь проверим неравенство в другую сторону: $[\![P_k = P_\ell]\!]_{\mathcal{T}} \leq$ $\leq \cap \{P_k(f) \to P_\ell(f) \mid f\}$ (в качестве f возьмем k и продолжим)

$\leq P_k(k) \to P_\ell(k) = (\cup \{[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![k=t]\!] \mid t \in K\}) \to (\cup \{[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}} \cap$

$\cap [\![\ell=t]\!] \mid t \in K\})$ (уменьшим посылку, оставив в ней только k-слагаемое, и продолжим) $\leq [([\![k=k]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![k=k]\!] = 1) \to (\ldots)] =$ $= \cup \{[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![\ell=t]\!] \mid t \in K\}$ (и по условию получим) $\leq \cup \{[\![k=t]\!] \cap$ $\cap [\![\ell=t]\!] \mid t \in K\} \leq [\![k=\ell]\!]$.

Точно так же для случая оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$.

в) Здесь: 1) если e принадлежит левой части, то $et_1 = er$, $et_2 = es$, отсюда $e(t_1+t_2) = e(r+s)$, т.е. e принадлежит правой части проверяемого включения;

2) очевидно: $I = +'(<P_r, P_s, P_{r+s}>) \leq [\![<P_r, P_s, P_{r+s}> \in +']\!]_{\mathcal{T}}$;

3) левая часть (этого неравенства)

$$\leq \bigcup_{f,g} \bigcup_{\substack{r1,s1 \\ r2,s2}} [\![f = <P_{r1}, P_{s1}, P_{r1+s1}> \cap$$

$\cap f=<P_r,P_s,P_\ell>\cap g=<P_{r2},P_{s2},P_{r2+s2}>\cap g=<P_r,P_s,P_t>]\leq$
$\leq \bigcup_{f,g,r1,s1,\ldots}[P_{r1}=P_{r2}\cap P_{s1}=P_{s2}\cap P_{r1+s1}=P_\ell\cap$
$\cap P_{r2+s2}=P_t]_{\mathcal{T}}$ (по п. "б" получим) $\leq \bigcup_{r1,s1,r2,s2}[r1=r2\cap s1$
$=s2\cap r1+s1=1\cap r2+s2=t]$ (по соотношению 1 этого пункта получим) $\leq \bigcup_{r1,s1,r2,s2}[r1+s1=r2+s2]\cap[r1+s1=1\cap r2+s2=t]\leq \bigcup$
$\bigcup[\ell=t]$ (снова по п."б" получим) $=[P_\ell=P_t]_{\mathcal{T}}$;

4) нужно проверить $[\forall f\in+'$ (f - тройка элементов из $K']_{\mathcal{T},\mathcal{B}}=1$ и $[\forall x,y\in K'\exists f\in+'(P^1(f)=x\cap P^2(f)=y)]_{\mathcal{T},\mathcal{B}}=$
$=[\forall f,g(P^1(f)=P^1(g)\cap P^2(f)=P^2(g)\Rightarrow P^3(f)=P^3(g))]_{\mathcal{T},\mathcal{B}}=1$, где P^i есть i-й член n-ки. Это делается обычным вычислением.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Определим интерпретацию формулы φ языка колец в языке теории множеств ZF индукцией по строению φ. Получаемую интерпретацию будем обозначать через $(\varphi)_K$. Формула $(\varphi)_K$ в языке ZF содержит для каждой свободной переменной x в φ свободную переменную P_x, а, кроме того, еще переменные $K,+,-,\cdot,0,1$. Итак, интерпретацией формулы $\varphi\leftrightharpoons(x=y)$ будет формула $(\varphi)_K\leftrightharpoons(P_x=P_y)$. (Заметим, что символ $=$ в левой и правой частях последнего равенства имеет различный смысл: слева - тождества, а справа - равнообъемности.) Если $\varphi\leftrightharpoons(t_1+t_2=y)$, то $(\varphi)_K\leftrightharpoons\exists u,v\in K[(t_1=u)_K\cap(t_2=v)\cap$
$\cap<u,v,P_y>\in+\ell$. Здесь $(t_1=u)_K$ означает, что формулу $(t_1=u)$ в языке колец интерпретировали в языке ZF и на место теоретико-множественной переменной P_u, соответствующей кольцевой переменной u, подставили теоретико-множественную переменную u, а $<\cdot,\cdot,\cdot>$ обозначает тройку. Аналогично определяется интерпретация термов с другими операциями. Затем пропозициональные связки проносятся, а $\varphi\leftrightharpoons(\exists x\varphi(x))$ интерпретируется как $\exists x\in K(\varphi)_K$. Аналогично определяется случай $\varphi\leftrightharpoons(\forall x\varphi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Фиксируем кольцо* K, *и пусть* $\bar{k}=<k_1,\ldots,k_n>\in K$, *а* $P_k\leftrightharpoons<P_{k1},\ldots,P_{kn}>$.

а) Пусть t *- терм со свободными переменными* $\bar{x}$ *, а* y *- переменная в языке колец и* $t(\bar{x})=y$ *- формула в языке колец. Пусть* $t(\bar{k})=\ell$ *- соответствующее предложение (где* $\bar{k},\ell\in K$ *). Тогда* $[\![(t(\bar{P}_k)=P_\ell)_{K'}]\!]_{\mathcal{T}} = [\![t(\bar{k})=\ell]\!]$ *, если* K *есть* $\mathcal{T}$*-кольцо, и* $[\![(t(\bar{P}_k)=P_\ell)_{K'}]\!]_{\mathcal{B}} = [\![t(\bar{k})=\ell]\!]$ *, если* K *есть* $\mathcal{B}$ *-кольцо.*

б) Пусть $\varphi(\bar{x})$*- формула со свободными переменными* $\bar{x}$ *в языке колец и* $\varphi(\bar{k})$ *- соответствующее предложение* $(\bar{k}\in K)$ *. Тогда* $[\![(\varphi(\bar{P}_k))_{K'_{\mathcal{T}}}]\!]_{\mathcal{T}} = [\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}$ *, если* K *есть* $\mathcal{T}$*-кольцо, и* $[\![(\varphi(\bar{P}_k))_{K'_{\mathcal{B}}}]\!]_{\mathcal{B}} = [\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}}$ *, если* K *есть* $\mathcal{B}$ *-кольцо.*

в) При тех же условиях, что в п. "б", выполняется: $[\![\langle K',+',-',\cdot',0',1'\rangle$ *- кольцо*$]\!]_{\mathcal{T}} = [\![\langle K',+',-',\cdot',0',1'\rangle$ *- кольцо*$]\!]_{\mathcal{B}} = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Индукцией по длине терма. Начальный шаг содержится в предложении 2 "б".

Рассмотрим случай, фигурирующий в определении 3:

$$[\![((t_1+t_2)(\bar{P}_k)=P_\ell)_{K'}]\!]_{\mathcal{T}} = \bigcup\{K'(u)\cap K'(v)\cap[\![(t_1=u)_{K'}\cap$$
$$\cap(t_2=v)_{K'}\cap\langle u,v,P_\ell\rangle\in+']\!]_{\mathcal{T}}\mid u,v\in\mathcal{D}(K')\}\leq\bigcup\{[\![u=P_s\cap$$
$$\cap v=P_r\cap(t_1=P_s)_{K'}\cap(t_2=P_r)_{K'}\cap\langle P_s,P_r,P_\ell\rangle\in+']\!]_{\mathcal{T}}\mid u,v\in V^{\mathcal{T}}_{\langle rk(K)},s,r\in K\}$$

(по предложению 2 "в" продолжим) $\leq\bigcup\{[\![u=P_s]\!]\cap[\![v=P_r]\!]\cap$ $\cap[\![(t_1=P_s)_{K'}]\!]\cap[\![(t_2=P_r)_{K'}]\!]\cap[\![P_\ell=P_{s+r}]\!]\mid u,v;\ s,r\in K\}$ (здесь $s+r$ вычисляется внешне, в кольце K , как и положено для оценок $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T},\mathcal{B}}$) $=\bigcup\{[\![u=P_s]\!]_{\mathcal{T}}\cap[\![v=P_r]\!]_{\mathcal{T}}\cap[\![t_1(\bar{k})=s]\!]\cap[\![t_2(\bar{k})=r]\!]\cap$ $\cap[\![\ell=s+r]\!]\mid u,v,s,r\}$ (опять учтем предложение 2 "в") $\leq\bigcup\{[\![u=P_s]\!]_{\mathcal{T}}\cap[\![v=P_r]\!]_{\mathcal{T}}\cap[\![t_1(\bar{k})+t_2(\bar{k})=\ell]\!]\mid u,v,s,r\}\leq$ $\leq[\![(t_1+t_2)(\bar{k})=\ell]\!]$. Теперь проверим противоположное неравенство: $[\![t(\bar{k})=\ell]\!]$ (где $t=t1+t2$) $=[\![t_1^0+t_2^0=\ell]\!]$ (где обозначено $t_1^0\leftrightharpoons t1(\bar{k})$ и $t_2^0\leftrightharpoons t2(\bar{k})$) $\leq[\![P_{t_1^0+t_2^0}=P_\ell]\!]_{\mathcal{T}}$ (причем $[\![(t1(\bar{P}_k)=P_{t_1^0})_{K'}]\!]_{\mathcal{T}}=1$, $[\![(t2(\bar{P}_k)=P_{t_2^0})_{K'}]\!]_{\mathcal{T}}=1$ и $[\![\langle P_{t_1^0},P_{t_2^0},P_{t_1^0+t_2^0}\in$

$\in']_{\mathcal{T}}=1$, отсюда) $\leq [\![<P_{t_1^0}, P_{t_2^0}, {}^{n}_{\iota}> \in +' \cap (t1(\bar{P}_k)=P_{t_i^0})_{K'} \cap$
$\cap (t2(\bar{P}_k)=P_{t_2^0})_{K'}]\!]_{\mathcal{T}} \leq [\![((t1+t2)(\bar{P}_k)=P_\ell)_{K'}]\!]_{\mathcal{T}}$, так как можно положить $u \leftrightharpoons P_{t_1^0}$ и $P_{t_2^0}$ и тогда $K'(u)=K'(v)=1$.

Точно так же рассматривается случай оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$.

б) Индукцией по длине формулы φ. Для атомарной формулы это доказано в п. "а". Для пропозициональных связок равенство очевидно. Случай кванторов: $[\![(\exists x\varphi)_{K'}]\!]_{\mathcal{T}} = \bigcup\{K'(x) \cap$
$\cap [\![\varphi(x,\bar{P}_k))_{K'}]\!]_{\mathcal{T}} \mid x \in \mathcal{D}(K')\} = \bigcup\{[\![x=P_t]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![\varphi(x,\bar{P}_k)]\!]_{\mathcal{T}} \mid x; t \in K\} =$
$= \bigcup\{[\![x=P_t]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![(\varphi(P_t,\bar{P}_k))_{K'}]\!]_{\mathcal{T}} \mid x,t\} = \bigcup\{[\![x=P_t]\!]_{\mathcal{T}} \cap [\![\varphi(t,\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}} \mid x,t\} =$
$= \bigcup\{(\{\bigcup [\![x=P_t]\!]_{\mathcal{T}} \mid x\}) \cap [\![\varphi(t,\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}} \mid t\} = [\![\exists\alpha\varphi(\alpha,\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}$. Аналогично рассматриваем квантор $\forall$: $[\![(\forall x\varphi)_{K'}]\!]_{\mathcal{T}} = \bigcup\{K'(x) \to [\![(\varphi(x,\bar{P}_k))_{K'}]\!] \mid x \in \mathcal{D}(K')\} =$

$= \bigcap\{K'(x) \to K'(x) \cap [\![(\varphi(x,\bar{P}_k))_{K'}]\!] \mid x\} = \bigcap\{K'(x) \to \bigcup\{[\![x=P_t]\!] \cap [\![(\varphi(x,\bar{P}_k)_{K'}]\!] \mid t \in K\}$

$\mid x\} = \bigcap\{K'(x) \to \bigcup\{[\![x=P_t]\!] \cap (\varphi(P_t,\bar{P}_k))_{K'}]\!] \mid t\} \mid x\} = \bigcap\{K'(x) \to \bigcup\{[\![x=P_t]\!] \cap$

$\cap [\![\varphi(t,\bar{k})]\!] \mid t\} \mid x\} \leq \bigcap \bigcup\{[\![P_\ell = P_t]\!] \cap [\![\varphi(t,\bar{k})]\!] \mid t\} \mid \ell \in K\} \leq \bigcap\{[\![\varphi(\ell,\bar{k})]\!] \mid \ell \in K\} =$
$= [\![\forall x\varphi(x,\bar{k})]\!]$. Обратное неравенство: достаточно проверить, что
$\bigcap\{[\![\varphi(\ell,\bar{k})]\!] \mid \ell \in K\} \cap K'(x) \leq \bigcup\{[\![x=P_t]\!] \cap [\![\varphi(t,\bar{k})]\!] \mid t \in K\}$.

Это следует из неравенства: $[\![x=P_r]\!] \cap [\![\varphi(r,\bar{k})]\!] \leq$ правой части.

Так же для случая оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. 1) Нормальное $\mathcal{B}$-кольцо назовем (*)-кольцом. Формулу " K - нормальное $\mathcal{B}$-кольцо" в языке ZF обозначим $*(K)$. Нормальным называется кольцо K, для которого выполняется $(\Phi_1)_{K'}$, где Φ_1 - формула в языке колец, естественным образом выражающая следующий факт: $\forall k \exists e0 \in B(K) \quad \forall e \in B(K)$ $(e \cdot k = 0 \Leftrightarrow e \leq e0)$. "Обычные" кольца являются нормальными.

2) Кольцо K назовем строго разрешимым или B-разрешимым, если его носитель - множество K-строго разрешимо или соответственно множество $B(K)$ разрешимо. Множество K называется строго разрешимым, если для любых $k,t \in K$ наследство $\{k,t\}^+$ множества $\{k,t\}$ (где $X^+ \leftrightharpoons \bigcup\{x^+ \mid x \in X\} \cup X$) обладает свойством: $\forall a,b \in \{k,t\}^+ (a=b \cup a \# b)$, где $a \# b \leftrightharpoons \exists z((z \in a \cap z \notin b) \cup (z \notin a \cap z \in b))$.

Произвольное множество X называется разрешимым, если $\forall x, y \in X$, $(x = y \cup x \neq y)$; для множества $B(K)$ это эквивалентно условию $\forall e \in B(K)$ $(e=0 \cup e \neq 0)$. Конечно, классически любое кольцо строго разрешимо и B-разрешимо. Интуиционистски, например, любое кольцо со счетным носителем строго разрешимо, а любое неразложимое кольцо B-разрешимо. Кольцо K называется неразложимым, если выполняется $(\Phi_3)_K$, где $\Phi_3 \rightleftharpoons \forall k (k^2 = k \cap \cap \forall t (kt = tk) \Rightarrow k = 0 \cup k = 1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. а) *Если кольцо* K B-*разрешимо, то оно является* $\mathcal{T}$-*кольцом.*

б) Если кольцо K *строго разрешимо (например, со счетным носителем), то оно является* $\mathcal{B}$-*кольцом.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обоих случаях нужно проверить неравенство $[\![k=t]\!] \leq [\![k=t]\!]$, где слева находится оценка в $\mathcal{T}$ или в $\mathcal{B}$.

В п. "а" нужно показать, что $[\![k=t]\!]_{\mathcal{T}} \subseteq [\![k=t]\!]_{\mathcal{T}}$. Пусть $e \in [\![k=t]\!]_{\mathcal{T}}$; при этом $e=0 \cup e \neq 0$. Если $e=0$, то e входит в правую часть. Пусть $e \neq 0$. Докажем ε-индукцией по первому аргументу оценки, что $(e \in [\![k=t]\!]_{\mathcal{T}}) \Rightarrow k=t$ (откуда сразу следует искомое включение). Пусть $x \in k$. Тогда $e \in (k(x) \to [\![x \in t]\!]) = [\![x \in t]\!]$, так как $x \in \mathcal{D}(k)$. Отсюда $e \in \cup\{t(g) \cap [\![x=g]\!] \mid g \in \mathcal{D}(t)\} = \cup\{[\![g=y]\!] \cap [\![x=g]\!] \mid g; y \in t\} \leq \cup\{[\![x=y]\!]_{\mathcal{T}} \mid y \in t\}$, $e = e1 + \ldots + en$, где $ei \in [\![x=yi]\!]$, $n \in N$. Индукцией по n получим, что одно из $ei \neq 0$. Поэтому $0 \neq ei \in [\![x=yi]\!]$, и по индуктивному предположению $x = yi \in t$. Если $y \in t$, то аналогично получим $e \in [\![y \in k]\!]$, $e = e1 + \ldots + en$, где $0 \neq ei \in [\![y = xi]\!]$, $xi \in k$. И так же по первому аргументу осуществляя спуск, получим $xi = y$, $y \in k$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $e \in [\![k=t]\!]_{\mathcal{T}} \Rightarrow ek = et$, $\forall e \in B(K)$, $\forall k, t \in K$, то K является $\mathcal{T}$-кольцом.

б) Сначала ε-индукцией по переменной b покажем: $a \notin b \Rightarrow [\![a \in b]\!]_{\mathcal{B}} = 0$ и $a \neq b \Rightarrow [\![a=b]\!]_{\mathcal{B}} = 0$, $\forall a, b \in \{k,t\}^+$, где k, $t \in K$. Если $a \notin b$, то

$[\![a \in b]\!]_{\mathcal{B}} = \cup\{b(f) \cap [\![a=f]\!] \mid f \in \mathcal{D}(b)\} = \cup\{[\![f=y]\!] \cap [\![a=f]\!] \mid f; y \in b\} \leq \cup\{[\![a=y]\!] \mid y \in b\}$, где $a \neq y$, $\forall y \in b$. По индуктивному предположению последняя сумма равна 0 и $[\![a \in b]\!]_{\mathcal{B}} = 0$. Если $a \neq b$, то пусть, например, $\exists x(x\in a \cap x\notin b)$. Тогда $[\![a=b]\!]_{\mathcal{B}}\leq(a(x)\to[\![x\in b]\!])=$ $=[\![x\in b]\!]\leq\bigcup\{[\![x=y]\!]\mid y\in b\}$, где $x\neq y$ $\forall y\in b$. По индуктивному предположению последняя сумма равна 0.

Наконец, $k=t$ или $k\neq t$. В первом случае $[\![k=t]\!]=1$. Во втором случае $[\![k=t]\!]_{\mathcal{B}}=0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Пусть* K *- любое* $\mathcal{B}$*-кольцо. Определим* h: $V_{\alpha}^{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}$, *где* $V_{\alpha}^{\mathcal{B}}$ *содержит все пары элементов из* $V^{\mathcal{B}}_{<rk(K)^{+}}$ *как* $h(f)\leftrightharpoons\bigcup\{[\![f=\langle k,P_k\rangle]\!]_{\mathcal{B}}\mid k\in K\}$. *Тогда*

а) $[\![h:K\to K'$ *- гомоморфизм "на"*$]\!]_{\mathcal{B}}=1$;

б) $[\![\{\ell\in K\mid h(\ell)=0\}=P_0]\!]_{\mathcal{B}}=1$;

в) $[\![h:K/P_0\cong K']\!]_{\mathcal{B}}=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Выполняется: $[\![h\subseteq K\times K']\!]_{\mathcal{B}}=1$ и $[\![\forall x\in K$ $\exists y\in K'(\langle x,y\rangle\in h]\!]_{\mathcal{B}}=1$, $[\![\forall y\in K'\exists x\in K\ (\langle x,y\rangle\in h)]\!]_{\mathcal{B}}=1$. Кроме того, $[\![\forall x,y\in h\,(P^1(x)=P^1(y)\Rightarrow P^2(x)=P^2(y))]\!]_{\mathcal{B}}=1$, так как $[\![k=t]\!]_{\mathcal{B}}\leq$ $\leq[\![k=t]\!]_{\mathcal{B}}=[\![P_k=P_t]\!]_{\mathcal{B}}$. Наконец, проверяется, что равна 1 оценка следующей формулы:

$$\forall f,g,\ell\in h\,\forall x,y\in K^{\vee}[\![(\langle x,y,P^1(f)\rangle\in+\cap P^1(g)=x\cap$$
$$\cap P^1(\ell)=y)\Rightarrow\langle P^2(g),P^2(\ell),P^2(f)\rangle\in+']\!],$$

так как $[\![f=\langle k,P_k\rangle]\!]\cap$

$$\cap[\![g=\langle m,P_m\rangle]\!]\cap[\![\ell=\langle n,P_n\rangle]\!]\cap[\![x=r]\!]\cap[\![y=s]\!]\cap[\![\langle x,y,P^1(f)\rangle\in+\cap$$
$$\cap P^1(g)=x\cap P^1(\ell)=y]\!]\ (\text{где } k,m,n,r,s\in K)\leq[\![\langle r,s,k\rangle\in+\cap m=r\cap n=s)]\!]\leq$$
$$\leq[\![\langle m,n,k\rangle\in+]\!]\leq[\![P_{m+n}=P_k]\!]\leq[\![\langle P_m,P_n,P_k\rangle\in+']\!]\leq[\![P^2(g),P^2(\ell),P^2(f)\in+']\!].$$

б) Аналогично проверяется.

в) Сразу следует из предыдущих пунктов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathscr{X}(\cdot)$ - формула в языке ZF (описывающая набор множеств $K\langle K,+,-,\cdot,0,1\rangle$). Назовем $\mathscr{X}(\cdot)$ абсолютной, если $\forall K(\mathscr{X}(K)\Rightarrow K$ - кольцо $\cap[\![\mathscr{X}(K/P_0)]\!]_{\mathcal{B}}=1)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Обычная формула в языке* ZF, *описывающая кольцо* $\mathbb{Z}$ *(а также* $\mathbb{Q}$ *и т.д.), - абсолютная формула.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Выражение "$\overline{x}$-теория" T или "$\overline{x}$-формула" φ означает зависимость всех формул из T (соответственно формулы φ) только от свободных переменных, входящих в $\overline{x}$, где

$\bar{x}=\langle x1,\ldots,xn\rangle,\ n\geqslant 0$. Для простоты формулировок мы предположим, что теория T - рекурсивно-перечислимая (хотя это не существенно). Поэтому понятно определение записи $K\models\ulcorner T\urcorner(\bar{k})$ как $\forall n\in\omega K\models(\ulcorner T\urcorner(n)(\bar{k}))$, где $\ulcorner T\urcorner$ - код теории T ($\bar{k}=\langle k1,\ldots,kn\rangle\in K$, $\ulcorner T\urcorner\in N$). Так как $\forall K\,(K\models\ulcorner\varphi\urcorner(\bar{k})\leftrightarrow\varphi(\bar{k}))_{K'}$, то, допуская вольность, мы будем писать $(T(\bar{k}))_K$. Иное оформление этого вопроса - бесконечные дизъюнкции и конъюнкции - также возможно. При этом $[\![T(\bar{k})]\!]\leftrightharpoons\bigcap\{[\![\varphi(\bar{k})]\!]\mid\varphi\in T\}$ и т.д. Интересно, что этот второй путь намечается в работе [1] .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Формулу φ в языке колец назовем фи-формулой, если для посылки любой импликации, входящей в φ , выполняются два условия: i) в нее не входит квантор $\forall$; ii) в ней квантор $\exists$ не находится в области действия какой-либо импликации. Теория, состоящая из фи-формул, называется фи-теорией. Для любой теории T (несколькими естественными способами) может быть определена теория T^{φ}- перевод всех формул из T в фи-форму. Например, содержательным является случай Ar^{φ}, где Ar - пеановская или полная арифметика.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. 1) Формулу в языке колец назовем почти позитивной формулой, если она получается из "блоков" - формул вида $\forall\bar{t}(\varphi(\bar{t})\Rightarrow\psi(\bar{t}))$, где φ- любая хорнова формула, а ψ - любая позитивная или ранее полученная почти позитивная формула - навешиванием связок $\exists,\forall,\cup,\cap$.

2) Предложение $\varphi(\bar{k})$ называется разрешимым относительно данного кольца K , где $\bar{k}\in K$, если выполняется $(\varphi(\bar{k}))_K\Rightarrow P[\varphi(\bar{k})]$, где оператор $P[\cdot]$ определяется индукцией по длине $\varphi(\bar{k})$ следующим образом: если φ - позитивная формула, то $P[\varphi]=T$; если наша формула - блок, то значение P по определению равно $\exists\bar{t}\in\in K([\![\varphi(\bar{t})]\!]=1\cap\forall\bar{t}\in K((\psi(\bar{t}))_K\Rightarrow P[\psi(\bar{t})])$; далее, $P[\exists x\varphi]\leftrightharpoons\leftrightharpoons\exists k\in K\,(\varphi(k)_K\cap P[\varphi(k)])$, $P[\forall x\varphi]\leftrightharpoons\forall k\in K\,(P[\varphi(k)])$, $P[\varphi\cap\psi]\leftrightharpoons\leftrightharpoons P[\varphi]\cap P[\psi]$, $P[\varphi\cup\psi]\leftrightharpoons(P[\varphi]\cap(\varphi)_K)\cup(P[\psi]\cap(\psi)_K)$. Теория $T(\bar{k})$ называется разрешимой относительно данного кольца K , если все ее предложения разрешимы относительно этого кольца K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $\varphi(\bar{k})$- любое предложение в языке колец ($\bar{k} \in K$). Определим перевод $\varphi(\bar{k}) \mapsto \varphi'(\bar{k}, e)$ (где φ' будет также формулой в языке колец, e - специальная переменная, пробегающая $B(K)$) индукцией по длине φ. Положим $(k = t)' \leftrightharpoons (e \cdot k = e \cdot t)$, $(\varphi \cap \psi)' \leftrightharpoons \varphi' \cap \psi'$, $(\exists x \varphi)' \leftrightharpoons \exists x \varphi'$, $(\forall x \varphi)' \leftrightharpoons \forall x \varphi'$ и, главные случаи, $(\varphi \Rightarrow \psi)' \leftrightharpoons \forall e0 ((e0 \leq e \cap \varphi'(e0)) \Rightarrow \psi'(e0))$ (здесь $e0$, $e1$, $e2$ - специальные переменные такие же, как e), $(\varphi \cup \psi)' \leftrightharpoons \exists e1, e2 ((1-e1) \cdot (1-e2) = (1-e) \cap \varphi'(e1) \cap \psi'(e2))$. Положим $\varphi'(\bar{k}) \leftrightharpoons \varphi'(\bar{k}, 1)$. Если T- теория, то $T' \leftrightharpoons \{\varphi' \mid \varphi \in T\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Пусть K- любое кольцо.*

а) Условие $(\varphi'(\bar{k}, e))_K$ эквивалентно условию $e \in [\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ для любых формул φ в языке колец, параметров $\bar{k} \in K$ и $e \in B(K)$. В частности, $(\varphi'(\bar{k}))_K \leftrightarrow ([\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 1)$.

б) Если $\varphi(\bar{k})$ такова, что в посылке любой ее импликации находится позитивная формула, то $\varphi'(\bar{k}, e)$ - хорнова формула.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Индукцией по строению формулы φ. Для атомарной формулы φ это выполняется согласно определению оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}(K)}$. Случаи $\varphi \cap \psi$, $\exists x \varphi$ (с учетом свойства достижимости оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}(K)}$) и $\forall x \varphi$ понятны. Условие $((\varphi \cup \psi)'(e))_K$ эквивалентно тому, что $\exists e1, e2 \in B(K)$ $(e1 \cup e2 = e \cap e1 \in [\![\varphi]\!] \cap e2 \in [\![\psi]\!]) \Leftrightarrow e \in [\![\varphi \cup \psi]\!]$. Условие $((\varphi \Rightarrow \psi)'(e))_K$ эквивалентно условию $\forall e0 \in B(K)$ $(e0 \leq e \Rightarrow (e0 \in [\![\varphi]\!] \Rightarrow e0 \in [\![\psi]\!])$, т.е. $\langle e \rangle \cap [\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$.

б) Индукцией по строению формулы φ заметим: если φ - позитивная, то φ'- позитивная, а затем проверим утверждение этого пункта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Пусть K - любое кольцо.*

а) Если $(\Phi_1)_K$, то $[\![\Phi_1]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 1$.

б) Выполняется: $[\![\Phi_3]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 1$.

в) Если $(i)_K$, то $[\![i']\!]_{\mathcal{T}(K)} = 1$ и $(\Phi_1)_K$, где пары символов i, i' (i принимает значения 2 3,4 ,5) обозначают следующие пары свойств в языке колец: строго бириккартово $\longleftrightarrow$ первичное ($i=2$), бирегулярное $\longleftrightarrow$ квазипростое ($i=3$), строго регулярное $\longleftrightarrow$ тело ($i=4$), строго риккартово $\longleftrightarrow$ без делителей нуля ($i=5$) (подробные формулировки этих свойств см. в [5, с. 389].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть выполняется $(\Phi_1)_K$. Достаточно проверить, что $[\![\forall e[e^2=e \cap \forall t(et=te)\cap ek=0] \Leftrightarrow [e^2=e\cap\forall t(et=te)\cap \cap e\leq e0]]\!]_{\mathcal{T}(K)}=1$ для любого фиксированного k и того $e0$, которое соответствует этому k по определению нормальности. Эта оценка в обе стороны может подсчитываться только для таких e, что соответствующая посылка имеет оценку 1. Тогда если $[\![e^2=e\cap \cap\forall t(et=te)\cap ek=0]\!]=1$, то $e\in\mathcal{B}(K)$, $ek=0$, отсюда $e\leq e0$. Наоборот, если $[\![e^2=e\cap\forall t(et=te)\cap e\leq e0]\!]=1$, то $e\in\mathcal{B}(K)$, $e\leq e0$, отсюда $ek=0$.

б) Нужно проверить, что $[\![k^2=k]\!]\cap[\![\forall t(kt=tk)]\!]\leq[\![k=0]\!]\cup \cup[\![k=1]\!]$ для любого $k\in K$. Пусть $e\in([\![k=k]\!]\cap\bigcap\{[\![kt=tk]\!]\mid t\in K\}$. Тогда $(ek)^2=ek$ и $ek\cdot t=t\cdot ek, \forall t\in K$; т.е. $ek\in\mathcal{B}(K)$. Теперь $ek\in[\![k=1]\!]$, так как $ek^2=(ek)^2=ek$. С другой стороны, $e(1-ek)\in \in[\![k=0]\!]$, так как $e(1-ek)\cdot k=ek-e^2k^2=ek-(ek)^2=0$. Поэтому $ek\cup e(1-ek)\in[\![k=0\cup k=1]\!]$. Здесь $ek\cdot e(1-ek)=e(1-ek)\cdot ek= =ek-e^2kek=0$. Поэтому $ek\cup e(1-ek)=ek+e(1-ek)=e$, т.е. $e\in[\![k=0]\!]\cup[\![k=1]\!]$.

в) Доказательство этого пункта содержится в [5, с. 388-393].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. *Пусть K - любое кольцо.*

а) Если φ - позитивное предложение в языке колец, то $(\varphi)_K$ влечет $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(K)}=1$.

б) Если ψ - хорново предложение в языке колец, то $[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}(K)}=1$ влечет $(\psi)_K$.

в) Пусть теория $T(k)$ в языке колец разрешимая для кольца K $(\bar{k}\in K)$. Тогда если $(T(\bar{k}))_K$, то $[\![T(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)}=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Для атомарной формулы согласно определению оценки. Далее индукцией по строению формулы φ.

б) Индукцией по длине формулы ψ. Случаи атомарной формулы и связок $\cap$, $\forall$ очевидны, а случай связки $\exists$ следует из свойства достижимости оценки. Случай $\varphi\Rightarrow\psi$ разбирается так: допустим $(\varphi)_K$. Тогда по п. "а" получим $[\![\varphi]\!]=I$, отсюда $[\![\psi]\!]=1$ и по индуктивному предположению $(\psi)_K$.

в) Определим ранг почти позитивной формулы $\varkappa$ в языке колец. Почти позитивная формула, все блоки которой имеют в заключениях позитивные формулы, ранга 0. Почти позитивная формула, все блоки которой имеют в заключениях почти позитивные формулы ранга до n (включительно), ранга $(n+1)$.

Теперь индукцией по рангу почти позитивной формулы $\varkappa$ докажем: $((\varkappa)_K \cap P[\varkappa]) \Rightarrow ([\![\varkappa]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 1)$. Отсюда сразу следует проверяемое утверждение.

Пусть $\varkappa$ ранга 0. Рассмотрим индукцию по строению предложения $\varkappa$. Пусть $\varkappa$ - блок. Допустим, что $(\varkappa)_K \cap P[\varkappa]$. С учетом $P[\varkappa]$ имеем $[\![\varkappa]\!] = \{[\![\psi(t)]\!] \mid t \in K, [\![\varphi(t)]\!] = 1\}$, что $= 1$, так как каждый сомножитель равен 1. Действительно, $[\![\varphi(t)]\!] = 1$ влечет $(\varphi(t))_K$, отсюда $(\psi(t))_K$, $[\![\psi(t)]\!] = 1$, так как ψ - позитивная формула.

Если $\varkappa = \varphi \cap \psi$, то $(\varphi)_K \cap (\psi)_K$ и $P[\varphi] \cap P[\psi]$. Если $\varkappa = \varphi \cup \psi$, то $((\varphi)_K \cap P[\varphi]) \cup ((\psi)_K \cap P[\psi])$.

Если $\varkappa = \exists x \varphi$, то $\exists k \in K\ (\varphi(k)_K \cap P[\varphi(k)])$. Если $\varkappa = \forall x \varphi$, то $\forall k \in K\ (\varphi(k)_K)$, $\forall k \in K (P[\varphi(k)])$.

Пусть $\varkappa$ - ранга $n+1$. Рассмотрим снова индукцию по строению предложения $\varkappa$. Если $\varkappa$ - блок и $(\varkappa)_K$, $P[\varkappa]$, то, рассуждая точно, как выше, мы получим, что $\psi(t)_K$ и, используя второе свойство в $P[\varkappa]$, что $P[\psi(t)]$. Далее, как выше, применяем индуктивный шаг по рангу n или по строению $\varkappa$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. *Пусть* K *- любое нормальное кольцо.*

а) Для любого фи-предложения $\varphi(\bar{k})$, *где* $\bar{k} \in K$, *выполняется* $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)} \leq [\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}(K)}$.

б) Для любого AE *-предложения* $\psi(\bar{k})$, *где* $\bar{k} \in K$, *выполняется: если* $[\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}(K)} \geq a$, *то* $[\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}(K)} \geq a$, $\forall a \in \mathcal{T}(K)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть сначала формула φ не содержит квантора $\forall$, а также не содержит квантора $\exists$ в области действия связки $\Rightarrow$. Индукцией по длине φ докажем: если φ не содержит $\exists$, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} \in \mathcal{B}(K)$, а если φ содержит $\exists$, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}}$. Для атомарной формулы φ выполняется первое утвврждение (в силу нормальности кольца K). В случае $\varphi = (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ имеем: φ_1, φ_2 не содержат $\exists$ (по условию), отсюда - первое утверждение. В случае $\varphi = \varphi_1 \cap \varphi_2$ или $\varphi_1 \cup \varphi_2$, или $\exists x \varphi_1$ все ясно.

Теперь пусть φ есть фи-формула. По индукции проверим наше неравенство. Если $\varphi = \varphi_1 \cap \varphi_2$ или $\varphi_1 \cup \varphi_2$, или $\exists x \varphi_1$, или $\forall x \varphi_1$, то индуктивный шаг ясен. Если $\varphi = (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$, то φ такая, как в первом абзаце. Поэтому для нее выполняется $[\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{T}} = [\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{B}}$ и одновременно $[\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{T}} \leqslant [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{B}}$. Отсюда получаем искомое неравенство.

б) Сначала заметим: для любого *нормального* кольца K и любого бескванторного предложения $\varphi(\bar{k})$ выполняется:

$$[\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}(K)} = [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{B}(K)} \in \mathcal{B}(K).$$

Проверим это индукцией по длине φ. Для атомарной формулы согласно определению оценки. Пропозициональные операции над элементами из $\mathcal{B}(K)$, вычисленные в $\mathcal{B}(K)$, принадлежат $\mathcal{B}(K)$ и совпадают со значениями одноименных операций в $\mathcal{T}$ и $\mathcal{B}$.

В случае $\mathcal{B}$-оценки $\sup$ сохраняется по сравнению с $\mathcal{T}$-оценкой. Поэтому имеем:

$$[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}} \qquad \text{для любой } E\text{-формулы } \varphi.$$

Итак, если $[\![\forall \bar{x} \varphi_1]\!]_{\mathcal{B}(K)} \geqslant a$, то $[\![\varphi_1(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}(K)} \geqslant a$, $\forall k$; $[\![\varphi_1(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)} \geqslant a$, $[\![\forall \bar{x} \varphi]\!]_{\mathcal{T}(K)}$.

Следующие три теоремы - чисто финитные.

В них T - любая $\bar{x}$-теория в языке колец, T_φ - такая же фи-теория, φ есть $\bar{x}$-формула в языке колец, а ψ - такая же AE-$\bar{x}$-формула. Запись вида $[T(\bar{x}) \Rightarrow \varphi(\bar{x})]_K$ означает $\forall \bar{k} \in K\ [T(\bar{k}) \Rightarrow \varphi(\bar{k})]_K$.

ТЕОРЕМА 1. *а) Пусть* $ZFI' \vdash \forall K\ [T(\bar{x}), \Phi_1, \Phi_3 \Rightarrow \varphi(\bar{x})]_K$. *Тогда* $ZFI' \vdash \forall K$ (K *есть* $\mathcal{T}$*-кольцо* $\Rightarrow [T'(\bar{x}), \Phi_1 \Rightarrow \varphi'(\bar{x})]_K$). *Формулу* Φ_1 *можно одновременно опустить в посылке и в заключении.*

б) Пусть $ZF \vdash \forall K\ [T_\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})]_K$. *Тогда 1)* $ZFI' \vdash \forall K\ (*(K) \Rightarrow [T'_\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi'(\bar{x})]_K)$ *(напомним: если* ψ *хорнова, то* $\psi' \Rightarrow \psi$*) ; 2)* $ZFI' \vdash \forall K\ (*(K) \Rightarrow [T_\varphi(\bar{x}), \Phi_3 \Rightarrow \psi(\bar{x})]_K)$.

в) Пусть $ZF \vdash \forall K\ [T_\varphi(\bar{x}), \Phi_3 \Rightarrow \psi(\bar{x})]_K$. *Тогда 1)* $ZFI' \vdash \forall K (*(K) \Rightarrow [T'_\varphi(\bar{x}) \Rightarrow (\neg\neg\psi)'(\bar{x})]_K$ *; 2)* $ZFI \vdash \forall K\ (*(K) \Rightarrow [T_\varphi(\bar{x}), \Phi_3 \Rightarrow \neg\neg\psi(\bar{x})]_K)$.

г) В п. "а" к Φ_1 *можно одновременно добавить: в посылке* i', *а в заключении* i, *где* $i = 2,3,4,5$. *В пп. "б", "в" к* T_φ *можно одновременно добавить: в посылке* i', *а в заключении* i, *где* $i = 3.\ 4.\ 5.$

д) Во всех предыдущих пунктах длина вывода в заключении линейно зависит от длины вывода в посылке.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть T, T_φ, φ, ψ-такие же, как в теореме 2. Пункты теоремы 2 остаются верными, если в их посылках и заключениях заменить T и соответственно T' на T, добавив в заключениях условие разрешимости $T(\bar{x})$ для кольца K (или вместо этого метаматематически предположив, что $T(\bar{x})$ - позитивная теория).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теорем 1, 2. а) Пусть K- любое $\mathcal{T}$-кольцо и $(T'(\bar{k}),\Phi_1)_K$, где $\bar{k}\in K$, а Φ_1 может быть опущено. По предложению 7 "а", получаем $[\![T(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}=1$. Если $K\models\Phi_1$, то, по предложению 8 "а", получаем $[\![\Phi_1]\!]_{\mathcal{T}}=1$; а по предложению 8 "б" всегда выполняется $[\![\Phi_3]\!]_{\mathcal{T}}=1$. По предложению 3 "б" получим $[\![(T(\bar{P}_k),\Phi_1,\Phi_3)_{K'_{\mathcal{T}}}]\!]_{\mathcal{T}}=1$. Предикат $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}=1$ замкнут относительно ZFI'-выводимости, поэтому $[\![(\varphi(\bar{P}_k))_{K'_{\mathcal{T}}}]\!]_{\mathcal{T}}=1$. Отсюда $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}=1$ и $(\varphi'(\bar{k}))_K$.

О п. "г": если $(i)_K$, то по предложению 8 "в" получим $\|i'\|_{\mathcal{T}}$ и далее рассуждаем, как выше.

Если T - такая, как в теореме 2, то по предложению 9 получаем, что $[\![T(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}=1$, и далее рассуждаем, как выше.

Заметим, что можно выписать ряд логических законов (например, на тему второго бесконечного закона дистрибутивности), для которых значение оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$ равно 1; все они устранимы, как и Φ_3.

б) Пусть K- любое (*)-кольцо и $T'_\varphi(\bar{k})_K$. Как и в п."а", получим $[\![T(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}=1$. По предложению 10 "а" получаем $[\![T(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}}=$ $=1$. По предложению 3 "б" получаем $[\![(T(\bar{P}_k))_{K'_{\mathcal{B}}}]\!]_{\mathcal{B}}=1$. Предикат $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{B}}=1$ замкнут относительно ZF-выводимости, поэтому $[\![(\psi(\bar{P}_k))_{K'_{\mathcal{B}}}]\!]_{\mathcal{B}}=1$. Отсюда $[\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{B}}=1$ и по предложению 10 "б" получим $[\![\psi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}=1$, т.е. $(\psi'(\bar{k}))_K$. Во втором пункте мы дополнительно имеем $(\Phi_3)_K$. Покажем (и отсюда сразу следует искомое), что

$$([\![\varphi(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}}=1)\iff((\varphi(\bar{k}))_K) \qquad (6)$$

для всех предложений $\varphi(\bar{k})$ в языке колец.

Доказываем индукцией по строению φ. Для атомарной формулы справедливость (6) следует в силу определения оценки. Для конъюнкции очевидно. Для дизъюнкции: пусть $[\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!] = \bar{1}$, тогда $I = e1 \cup e2$, $e1 \in [\![\varphi]\!]$, $e2 \in [\![\psi]\!]$, $ei = 0$ или $ei = 1$. Рассмотрим случай $e1 = 0$ и $e2 = 0$. Тогда получаем противоречие. Для импликации: пусть $\varphi \Rightarrow \psi$, тогда так как $[\![\varphi]\!] = 0$ или $[\![\varphi]\!] = 1$, то $[\![\varphi]\!] \leqslant [\![\psi]\!]$. Для квантора существования: пусть $[\![\exists x \varphi]\!] = 1$, тогда по свойству достижимости имеем: $[\![\varphi(k)]\!] = 1$ для некоторого $k \in K$, отсюда $(\exists x \varphi)_K$. Для квантора всеобщности очевидно.

О п. "г": если $(i)_K$, то по предложению 8 "в" получаем $[\![i']\!]_{\mathcal{T}} = 1$, а i' есть фи-формула. Поэтому $[\![i']\!]_{\mathcal{B}} = 1$ и далее, как выше.

Если T_φ - такая, как в теореме 2, то по предложению 9 получим $[\![T(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}} = 1$ и далее рассуждаем, как выше.

в) Здесь мы дополним ситуацию, рассмотренную в п. "б", тем, что в классическом доказательстве используется в качестве аксиомы предложение Φ_3. Это не связано с какой-то особой ролью именно предложения Φ_3 (например, можно было заменить Φ_3 на Φ_1), а дает пример одного из возможных способов работы с не фи-формулой, каковой является Φ_3. Точно как в п. "б", мы получим $[\![\Phi_3 \Rightarrow \psi]\!]_{\mathcal{B}} = 1$. Обозначим $\Phi_3' \leftrightharpoons \forall k \exists t\,(kt = tk \cap k^2 = k \Rightarrow \Rightarrow k = 0 \cup k = 1)$. Классически Φ_3' эквивалентно Φ_3, поэтому $[\![\Phi_3']\!]_{\mathcal{B}} \leqslant [\![\psi]\!]_{\mathcal{B}}$, но Φ_3' - уже фи-формула, отсюда $[\![\Phi_3']\!]_{\mathcal{T}} \leqslant [\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}$ (с учетом предложений 10 "а", "б"). Интуиционистски $\Phi_3^- \Rightarrow \Phi_3'^-$, где $(\cdot)^-$ - обычный гёделевский негативный перевод. Отсюда с учетом нормальности кольца K получим $[\![\Phi_3^-]\!] = [\![\Phi_3]\!]_{\mathcal{T}} \leqslant [\![\neg\neg\Phi_3']\!]_{\mathcal{T}} \leqslant [\![\neg\neg\psi]\!]_{\mathcal{T}}$, т.е. $\neg\neg[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}} = \bar{1}$. Последнее, с одной стороны, по предложению 7 эквивалентно $((\neg\neg\psi)')_K$, а с другой стороны, эквивалентно условию:

$$[\forall e0 \leqslant e\,(\psi'(e0) \Rightarrow e0 = 0)] \Rightarrow e = 0, \ \forall e. \qquad (7)$$

Напомним, что буква e (может быть, с индексами) обозначает элемент из $B(K)$.

В рамках классической метаматематики условие (7) эквивалентно условию: $\forall e\neq 0 \exists e0(\neq 0, \leqslant e)(\psi'(e0))$.

Доказательство упомянутой выше эквивалентности просто. Пусть выполняется (7). Тогда $[\ldots] \leftrightarrow (e=0)$. Отсюда $\langle e\rangle d[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}} \leftrightarrow (e=0)$, где $adb \leftrightharpoons \forall x\in a(x\in b \Rightarrow x=0)$, так как левая часть и $[\ldots]$ эквивалентны. Поэтому $\neg\neg[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}=\{\langle e\rangle \mid \langle e\rangle d[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}\}=0, \neg[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}=1$. Пусть выполняются условия: $\neg\neg[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}=1$ и посылка в (7). Тогда $\langle e\rangle d[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}$. Отсюда $\langle e\rangle \leqslant \neg[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}, \langle 1-e\rangle \geqslant \neg\neg[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}}=1,\ 1-e=1,\ e=0$.

Второе утверждение требует раскрытия условия (7). Положим в нем $e=I$. Тогда $\neg\forall e0(\psi'(e0)\Rightarrow e0=0), \neg(\psi'(1)\Rightarrow 1=0), \neg\neg\psi'$ и с учетом эквивалентности (6) получим $\neg\neg\psi$.

г) Этот пункт доказан выше в контексте других пунктов.

д) Непосредственно следует из предыдущего доказательства.

ЗАМЕЧАНИЕ. Перевод $\varphi \mapsto \varphi'$ (а следовательно, и условия типа (7)) имеет прямой теоретико-кольцевой смысл. Поясним его сначала на примере бескванторной формулы φ вида $\varphi \leftrightharpoons \bigcup\{(k_{1i}=t_{1i}\cap\ldots\cap r_{1i}\neq s_{1i}\cap\ldots)\mid i=1,\ldots,n\}$, где многоточия означают соответственно другие равенства и другие неравенства в i-м дизъюнктивном члене, а k_{1i}, t_{1i}, r_{1i}, s_{1i} - полиномы и одновременно их значения при заданных параметрах. Тогда $(\varphi')_K$ эквивалентно условию: существует разложение кольца K в прямую сумму $K=\oplus\{e_i\cdot K \mid i=1,\ldots,n\}$, где $e_i\in B(K)$, для которого выполняется: $e_i\cdot k_{1i}=e_i\cdot t_{1i}$ (для всех равенств из i-го члена) и $e_i\cdot r_{1i}\# e_i\cdot s_{1i}$ (для всех неравенств из i-го члена), где $e\cdot r\# e\cdot s \leftrightharpoons \forall e0(\neq 0, \leqslant e)(e0\cdot r\neq e0\cdot s)$. Если $\psi\leftrightharpoons Q\varphi$, где Q-кванторный префикс, то $\psi'=Q\varphi'$.

ТЕОРЕМА 3. *Пункты теорем 1 и 2 верны, если в них вместо* $\forall K\ldots$ *написать* $\forall K(\text{æ}(K)\Rightarrow\ldots)$, *где* $\text{æ}(\cdot)$ *- любая абсолютная формула.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предыдущее доказательство нужно только дополнить следующим рассуждением. Мы знаем, что $[\![(T(\bar{P}_k)\ldots\ldots)_{K'_{\mathcal{B}}}]\!]_{\mathcal{B}}=1$, а кроме того, получаем $[\![\text{æ}(K'_{\mathcal{B}})]\!]_{\mathcal{B}}=1$, так как, по предложению 5, $[\![K'_{\mathcal{B}}\cong K/P_0]\!]_{\mathcal{B}}=1$. (Аналогично формулируется и рассматривается случай $K'_{\mathcal{T}}$.)

Отметим, в частности, что таким образом многие трудные доказательства в теории ZF автоматически переводятся в интуиционистские доказательства тех же утверждений; например, так будет для известного положительного решения 17-й проблемы Гильберта.

Литература

1. R.GRAYSON, Heyting-valued models for intuitionistic set theory, Lecture Notes in Mathem; 753, 1979, 402-414.

2. П.С.НОВИКОВ, О некоторых теоремах существования (1939), Избр.тр.,М.,Наука,. 1979, 127 с.

3. В.А.ЛЮБЕЦКИЙ, Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа, УМН, 44, № 4 (1989), 99-153.

4 M.P.FOURMAN, D.S.SCOTT, Sheaves and logic. Lecture Notes in Mathem; 753, 1979, 302-401.

5. В.А.ЛЮБЕЦКИЙ, Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем, В кн.: Джонсон П.Т. Теория топосов, М., Наука, 1986, 376-433.

6. В.А.ЛЮБЕЦКИЙ, Интуиционистская теория алгебраических систем и нестандартный анализ, Алгебра и логика, 30, № 3 (1991), 320-332.

Адрес автора:

Поступило 18 января 1991г.

ЛЮБЕЦКИЙ Василий Александрович,
Москва, 609, Рублевское шоссе, 42,
корпус 2, кв. 164.