Материалы международной конференции
“Алгебра и математическая логика: теория и приложения”,
посвященной 130-летию со дня рождения основателя
кафедры алгебры Казанского университета
члена-корреспондента АН СССР Николая Григорьевича Чеботарева
и 80-летию со дня рождения заведующего кафедрой
академика АН РТ Марата Мирзаевича Арсланова

АЛГЕБРА

И

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА:

ТЕОРИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

(г. Казань, 27 июня – 1 июля 2024 г.)

Казанский (Приволжский) федеральный университет

2024

[1] *Park, S., Brausse, F., Collins, P., Kim, S., Konecny, M., Lee, G., Müller, N., Neumann, E., Preining, N., Ziegler, M.* Foundation of computer (algebra) analysis systems: Semantics, logic, programming, verification. https://arxiv.org/abs/1608.05787, 2020.

[2] *K. Weihrauch.* Computable analysis. Springer, Berlin, 2000.

[3] Akitoshi Kawamura, Florian Steinberg, and Holger Thies. *Parameterized complexity for uniform operators on multidimensional analytic functions and ODE solving.* In *International Workshop on Logic, Language, Information, and Computation*, pages 223–236. Springer, 2018.

[4] *E.M. Metodiev, I.M. D'Silva, M. Fandaros, M. Gaisser, S. Haciömeroğlu, D. Huang, K.L. Huang, A. Patil, R. Prodromou, O.A. Semertzidis, D. Sharma, A.N. Stamatakis, Y.F. Orlov, and Y.K. Semertzidis.* Analytical benchmarks for precision particle tracking in electric and magnetic rings. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A*, 797:311–318, 2015.

[5] *Norbert Th Müller.* The iRRAM: Exact arithmetic in C++. In *International Workshop on Computability and Complexity in Analysis*, pages 222–252. Springer, 2000.

[6] *Svetlana Selivanova, Florian Steinberg, Holger Thies, and Martin Ziegler*. Exact real computation of solution operators for linear analytic systems of partial differential equations. In *Computer Algebra in Scientific Computing: 23rd International Workshop, CASC 2021, Sochi, Russia, September 13–17, 2021, Proceedings 23*, pages 370–390. Springer, 2021.

О ВЫЧИСЛИМЫХ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ СТРУКТУРАХ

А. В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук, Москва, Россия

slvstv@iitp.ru

Непосредственное обобщение понятия вычислимой категоричности оказалось бесполезным для структур с нумерацией и их изоморфизмов, вычислимых за полиномиальное время [1–3]. Интересна слабая p-вычислимая категоричность, когда сами структуры вычислимы за полиномиальное время, а изоморфизмы примитивно рекурсивные. Структура называется локально конечной, когда любое конечное подмножество элементов порождает конечную подструктуру. Никакая бесконечная локально конечная структура не бывает слабо p-вычислимо категоричной [2]. Но мы покажем, что такие структуры существуют при дополнительном, но естественном ограничении вычислительной сложности. Также интересны структуры, вычислимые с полиномиальной памятью [4].

При ограничении вычислительных ресурсов — времени или памяти — важен способ представления натурального числа. Мы используем двоичные записи натуральных чисел и обозначаем через $\mathrm{Bin}(\omega)$ множество двоичных записей всех натуральных чисел. Нумерацией множества S называется сюръективное отображение $\nu : \mathrm{Bin}(\omega) \to S$, см. [5]. Аргументами функции ν служат натуральные числа, которые называются номерами для элементов из S. Структура $\mathfrak{N}$ называется *натуральной*, когда носителем служит множество $\mathrm{Bin}(\omega)$, а нумерация ν

тождественная. Мы рассматриваем бесконечные структуры с *биективной* нумерацией, когда каждому элементу соответствует один номер. Этот подход близок к работам о пунктуальных структурах [6, 7].

Функция над алгебраической структурой с нумерацией ν вычислима за полиномиальное время, если по набору номеров аргументов за полиномиальное время можно вычислить номер значения этой функции. Так же определяются любые классы вычислительной сложности над данной алгебраической структурой, включая вычисления с оракулом и вычисления с полиномиальной памятью. При этом вычислительная сложность оценивается по длине двоичной записи номера. Обозначим через $\ell(n)$ длину двоичной записи числа n. Пусть $\ell(n) = \lceil \log_2(n + +1) \rceil$, в частности, $\ell(0) = 0$. Обозначим через $\mathrm{poly}()$ некоторый многочлен. Тогда $\mathrm{poly}(\ell(n))$ обозначает полиномиальную верхнюю границу для вычислений с входом n.

Над натуральной структурой любая функция двух аргументов, вычислимая за полиномиальное время, вычислима за время, ограниченное многочленом от длины двоичной записи номера большего из аргументов. Мы предполагаем выполнение этого ограничения над любой рассматриваемой структурой. В общем случае, использование верхней границы типа $\mathrm{poly}(\ell(n))$, где $\nu(n) = = \max(x, y)$, служит нетривиальным дополнительным ограничением. Но вычислительная сложность над натуральными структурами одинакова.

На множестве натуральных чисел усечённая разность $x \dot{-} y$ равна разности при $y \leqslant x$, но обращается в нуль при $y \geqslant x$. Линейный порядок также определяется через усечённую разность, поскольку неравенство $x \leqslant y$ эквивалентно равенству $x \dot{-} y = 0$. Мы используем функцию $\max()$, но на её вычислительную сложность не накладывается никакого явного ограничения.

Теорема 1. *Дана биективная нумерация* ν *для* $(0, 1, \dot{-})$*-структуры* $\mathfrak{M}$*, изоморфной натуральной* $(0, 1, \dot{-})$*-структуре* $\mathfrak{N}$*, в которой константы* 0*,* 1 *и усечённая разность* $\dot{-}$ *определены как обычно. Пусть для любых элементов* x *и* y *в структуре* $\mathfrak{M}$ *усечённая разность* $x \dot{-} y$ *вычислима за время* $\mathrm{poly}(\ell(n))$ *для номера* n*, удовлетворяющего условию* $\nu(n) = \max(x, y)$*. Существуют вычислимые с полиномиальной памятью изоморфизмы* $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ *и* $g : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$*, удовлетворяющие тождествам* $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$*.*

Замечание. Натуральная $(0, 1, \dot{-})$-структура $\mathfrak{N}$ локально конечная, поскольку непустое конечное множество S порождает подструктуру, в которой каждый элемент не больше, чем максимум $\max(1, \max(S))$.

Обозначим через $\lfloor x \rfloor$ целую часть числа x.

Теорема 2. *Дана биективная нумерация* ν *для* $(0, 1, +, \dot{-}, \lfloor \cdot/2 \rfloor)$*-структуры* $\mathfrak{M}$*, изоморфной натуральной* $(0, 1, +, \dot{-}, \lfloor \cdot/2 \rfloor)$*-структуре* $\mathfrak{N}$*, в которой обе константы* 0 *и* 1*, а также сумма, усечённая разность и целая часть половины определены как обычно. Пусть в структуре* $\mathfrak{M}$ *сумма* $x+y$*, усечённая разность* $x \dot{-} y$ *и целая часть половины* $\lfloor x/2 \rfloor$ *вычислимы за полиномиальное время, причём для любых элементов* x *и* y *их усечённая разность* $x \dot{-} y$ *вычислима за время* $\mathrm{poly}(\ell(n))$ *для номера* n*, удовлетворяющего условию* $\nu(n) = \max(x, y)$*. Существуют изоморфизмы* $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ *и* $g : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$*, вычислимые за полиномиальное время и удовлетворяющие тождествам* $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$*.*

Замечание. Мы рассмотрели сигнатуры, включающие бинарный функциональный символ. Для сигнатуры, содержащей лишь константы и унарные функциональные символы, этот метод уже нельзя применить.

Наш метод переносится на вычисления с оракулом, поскольку вычислимость значения некоторой функции за полиномиальное время с любым оракулом определяет полиномиальную верхнюю границу для длины двоичной записи номера значения этой функции.

Наши результаты не противоречат ранее полученным [2, 3], поскольку используется нетривиальное ограничение на вычислительную сложность.

[1] *Cenzer, D., Remmel, J.B.* Complexity and categoricity. Information and Computation 140, 2–25 (1998).

[2] *Alaev, P.E.* Structures computable in polynomial time. I. Algebra and Logic 55, 421–435 (2017).

[3] *Alaev, P.E.* The complexity of inversion in groups. Algebra and Logic 62, 103–118 (2023).

[4] *Cenzer, D., Downey, R.G., Remmel, J.B., Uddin, Z.* Space complexity of Abelian groups. Archive for Mathematical Logic 48, 115–140 (2009).

[5] *Selivanov, V., Selivanova, S.* Primitive recursive ordered fields and some applications. Computability 12, 71–99 (2023).

[6] *Melnikov, A.G., Ng, K.M.* The back-and-forth method and computability without delay. Israel Journal of Mathematics 234, 959–1000 (2019).

[7] *Zubkov, M.V., Kalimullin, I.Sh., Mel'nikov, A.G., Frolov A.N.* Punctual copies of algebraic structures. Siberian Mathematical Journal 60, 993–1002 (2019).

STRUCTURES ON SIGNATURES OF STRUCTURES

A. I. Stukachev

Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

aistu@math.nsc.ru

In mathematical linguistics, words of a natural language are used as symbols (or signs) to denote entities, properties of entities, properties of properties of entities, etc. The set of these words, symbols or signs form a lexicon or a signature. However, this is not just a set, there is a certain structure on it, with relations of various arities. For example, each word has a grammar category (sometimes two or more), transitive verbs can posses monotonicity of different directions for different arguments, etc.

One of the most important relations on notions and properties is a binary relation of "special case" ($\leqslant$): $cat \leqslant animal$, $run \leqslant move$, etc. Usually, for notions b_1 and b_2, relation $b_1 \leqslant b_2$ is expressed in natural language by sentences of kind "$Every\, b_1\, is\, b_2$" or "$All\, b_1\, are\, b_2$".

We consider complexity issues for structures of such kind within the framework of Σ-definability [1] and present some new results from [2, 3].

[1] *Stukachev, A.* Effective model theory: an approach via Sigma-definability. Lecture Notes in Logic 41, 164-197 (2013).

[2] *Burnistov, A.S., Stukachev, A.I.* Generalized computable models and montague semantics. Studies in Computational Intelligence 1081, 107-124 (2023).

[3] *Burnistov, A., Stukachev, A.* Computable functionals of finite types in Montague semantics. Lecture Notes in Computer Science, to appear.