БИБЛИОТЕКА
ЧЕБЫШЁВСКОГО
СБОРНИКА

Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории

Материалы
XVII Международной конференции,
посвящённой
100-летию со дня рождения
профессора Н. И. Фельдмана
и 90-летию со дня рождения
профессоров А. И. Виноградова,
А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко

Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Тульский государственный университет

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко

Тула,
23–28 сентября 2019 г.

Тула
ТГПУ им. Л. Н. Толстого
2019

ББК 22.1
УДК 51
А45

Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы,
А45 приложения и проблемы истории: Материалы XVII Междунар. конф., посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко.– Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. – 304 с.

ISBN 978-5-6042450-5-7

ББК 22.1
УДК 51

Сборник издан при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19-41-710004_р_а) и федеральной целевой программы «Исследование и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы» (уникальный идентификатор проекта RFMEF 157717X0271)

ISBN 978-5-6042450-5-7

подполем констант), которые являются стандартными или почти стандартными полями. Такие расширения существуют для любых полных дискретно нормированных полей смешанной характеристики и минимальная степень такого расширения может рассматриваться как ещё один из инвариантов изучаемого поля.

Центральная идея данного исследования — прояснить, как связаны эти два инварианта. В целом оказывается, что чем больше значение $\Gamma(K)$, то есть чем больше поле «похоже на стандартное» (не являясь при этом почти стандартным), тем «дальше» оно от стандартного, т. е. тем большая степень константного расширения требуется, чтобы превратить поле в почти стандартное. В работе [6] данная связь была установлена для двумерных локальных полей типа I с некоторым дополнительным ограничением. А именно, была установлена оценка снизу на степень константного расширения L/K с почти стандартным L, являющаяся линейной функцией от $\Gamma(K)$ с коэффициентом, зависящим только от p-адического нормирования индекса ветвления поля K над его подполем констант.

В дальнейшем нами был получен аналогичный результат без каких-либо ограничений на поле K, но с более слабой оценкой для степени константного расширения (порядка $\sqrt{\Gamma(K)}$).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванова О. Ю. О связи классификации Курихары с теорией устранения ветвления // Алгебра и анализ. 2012. Том 24, № 2. С. 130–153.

2. Kurihara M. On two types of complete discrete valuation fields // Compos. Math. 1987. Vol. 63. P. 237–257

3. Жуков И. Б., Коротеев М. В. Устранение высшего ветвления // Алгебра и анализ. 1999. Том 11, №6. С. 153–177.

4. Жуков И. Б., Мадунц А. И. Многомерные полные поля: топология и другие основные понятия // Труды С.-Петерб. мат. общ. 1995. Том 3. С. 4–46.

5. Zhukov I. B. Higher dimensional local fields. In book: Invitation to higher local fields (Münster, 1999), 5–18, Geom. Topol. Monogr., 3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000; `http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/gtmcontents3.html`.

6. Olga Ivanova, Sergei Vostokov, Igor Zhukov. On two approaches to classification of higher local fields // Чебышёвский сборник. 2019. Том 2, вып. 3 (в печати).

УДК 514.74

Матрицы Гессе приводимых многочленов третьей степени

А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: slvstv@iitp.ru

Hessian matrices of reducible third degree polynomials

A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)

e-mail: slvstv@iitp.ru

Основной текст тезисов

Матрицей Гессе функции нескольких переменных называется симметричная матрица вторых частных производных $\mathrm{hess}(f)_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$. Элементами матрицы Гессе многочлена третьей степени служат (неоднородные) линейные функции или числовые константы. Многочлен называется свободным от квадратов, если он не делится на квадрат никакого многочлена положительной степени.

Цель этой работы — описание свойства матриц Гессе многочленов третьей степени над полем вещественных чисел, которое не зависит от числа переменных. Некоторые свойства матриц Гессе отличаются для многочленов от различного числа переменных [1, 2, 3]. Например, Гордан и Нётер доказали, что существует свободный от квадратов однородный многочлен третьей степени от пяти переменных, у которого матрица Гессе вырождена в каждой точке, хотя первые частные производные многочлена линейно независимые. Однако не существует таких однородных многочленов от четырёх переменных.

Приводимые формы рассмотрены в недавних работах, поскольку для них удаётся получить результаты, обобщение которых на общий случай связано с большими трудностями. Например, разложение Варинга для приводимых кубических форм рассмотрено в работе [4], а для мономов в работе [5].

Рассматриваются квазипроективные алгебраические многообразия. В каждой размерности фиксировано проективное пространство с выделенными бесконечно удалённой гиперплоскостью и аффинным подпространством с системой декартовых координат. Комплексное сопряжение этих координат определяет инволюцию, неподвижными точками которой служат вещественные точки.

Теорема 1. *Дан свободный от квадратов многочлен $f(x_1, \ldots, x_n)$ третьей степени над полем вещественных чисел. Если его матрица Гессе $\mathrm{hess}(f)$ знакоопределена в некоторой вещественной точке, то проективное замыкание множества нулей многочлена f не содержит вещественных особых точек на бесконечно удалённой гиперплоскости.*

Теорема 1 не накладывает никаких ограничений на особые точки над полем комплексных чисел, которые не являются вещественными. Теорема 1 равносильна одному из результатов, который уже апробирован на конференции весной 2018 года [6]. Доказательство использует свойства прямых, касательных к графику многочлена. Близкий метод применён в работе [7].

Теорема 2. *Существует отличный от тождественно нулевого многочлен p с целыми коэффициентами, обращающийся в нуль на всех наборах коэффициентов многочлена $q(x_1, \ldots, x_n)$ второй степени и многочлена $\ell(x_1, \ldots, x_n)$ первой степени над полем вещественных чисел, для которых матрица Гессе произведения многочленов $\mathrm{hess}(q\ell)$ не знакоопределена ни в одной вещественной точке, но проективное замыкание множества нулей произведения многочленов $q\ell$ не содержит вещественных особых точек на бесконечно удалённой гиперплоскости.*

Теорема 2 говорит, что обратное утверждение к теореме 1 справедливо для почти всех приводимых многочленов третьей степени. Однако следующий пример показывает, что в некоторых случаях обратное утверждение к теореме 1 не выполнено.

Пусть множеством нулей многочлена $f(x_1, x_2)$ служат три различные прямые, пересекающиеся в начале координат. Эта точка служит единственной особой точкой проективного замыкания, но матрица Гессе не знакоопределена ни в одной вещественной точке. Она обращается в нуль в начале координат. Графиком многочлена служит обезьянье седло.

Полученные результаты могут быть использованы для исследования графиков многочленов третьей степени. Более того, хотя в теореме 2 рассмотрены приводимые многочлены, но если для некоторого многочлена матрица Гессе знакоопределена в некоторой вещественной точке, то она останется знакоопределённой в той же точке при небольшом изменении коэффициентов многочлена. Следовательно, рассмотренный метод применим не только для приводимых многочленов. В частности, существует эффективно проверяемый сертификат, свидетельствующий об отсутствии вещественных особых точек на бесконечности у почти каждой вещественной кубической гиперповерхности, которая достаточно хорошо аппроксимируется объединением гиперплоскости и эллипсоида. Однако точная формулировка условия существования такого сертификата не известна.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пинкус А., Вайнриб Б. Об одной задаче аппроксимации с помощью многомерных полиномов // Успехи математических наук. 1995. Том 50, № 2(302). С. 89–110.

2. de Bondt M., van den Essen A. Singular Hessians // Journal of Algebra. 2004. Vol. 282. P. 195–204. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2004.08.026

3. Gondim R., Russo F. On cubic hypersurfaces with vanishing hessian // Journal of Pure and Applied Algebra. 2015. Vol. 219, № 4. P. 779–806. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2014.04.030

4. Carlini E., Ventura E., Guo C. Real and complex Waring rank of reducible cubic forms // Journal of Pure and Applied Algebra. 2016. Vol. 220, № 11. P. 3692–3701. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2016.05.007

5. Carlini E., Kummer M., Oneto A., Ventura E. On the real rank of monomials // Mathematische Zeitschrift. 2017. Vol. 286. P. 571–577. https://doi.org/10.1007/s00209-016-1774-y

6. Селиверстов А. В. Распознавание вещественных кубических гиперповерхностей без прямой из особых точек // Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г. Куроша. Тезисы докладов, 23–25 Мая 2018. — М.: МГУ, 2018. С. 177–179.

7. Селиверстов А. В. О касательных прямых к аффинным гиперповерхностям // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 2. С. 248–256. https://doi.org/10.20537/vm170208

Научное издание

АЛГЕБРА, ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ И ДИСКРЕТНАЯ ГЕОМЕТРИЯ: СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ, ПРИЛОЖЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ ИСТОРИИ

Материалы XVII Международной конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора Н. И. Фельдмана и 90-летию со дня рождения профессоров А. И. Виноградова, А. В. Малышева и Б. Ф. Скубенко

Подготовка оригинал-макета – Н. М. Добровольский.
Художественный редактор – Е. А. Свиридова.

Подписано в печать 18.09.2019. Формат 60×90/8.
Бумага офсетная. Печать трафаретная.
Усл. печ. л. 38,0. Тираж 120 экз. Заказ 19/019. «С» 1812.

Тульский государственный педагогический
университет им. Л. Н. Толстого. 300026, Тула, просп. Ленина, 125.

Отпечатано в ТГПУ им. Л. Н. Толстого.
300026, Тула, просп. Ленина, 125.