Библиотека Чебышевского сборника

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Министерство просвещения Российской Федерации
Российская академия наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
Санкт-Петербургский государственный университет
Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН
Московский педагогический государственный университет
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
Математический центр мирового уровня МИАН
Тульский государственный университет

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории

Материалы XXIV Международной конференции, посвящённой 110-летию со дня рождения академика Юрия Владимировича Линника и 110-летию со дня рождения профессора Андрея Борисовича Шидловского и 80-летию со дня рождения профессора Геннадия Ивановича Архипова

Тула, 14–17 мая 2025 года

ББК 22.1
УДК 51
А45

Председатель программного комитета — профессор В. Н. Чубариков

Сопредседатели программного комитета:
член-корреспондент В. М. Бухштабер;
академик С. В. Конягин;
академик Ю. В. Матиясевич;
академик В. П. Платонов

Ответственный секретарь — Н. М. Добровольский

Программный комитет: Балаба И. Н. (Тула), Берник В. И. (Минск, Белоруссия), Быковский В. А. (Хабаровск), Востоков С. В. (Санкт-Петербург), Всемирнов М. А. (Санкт-Петербург), Гашков С. Б. (Москва), Гриценко С. А. (Москва), Деза Е. И. (Москва), Демидов С. С. (Москва), Долбилин Н. П. (Москва), Зубков А.М. (Москва), Иванов А. О. (Москва), Иванов В. И. (Тула), Королёв М. А. (Москва), Кузнецов В. Н. (Саратов), Лауринчикас А. (Вильнюс, Литва), Михалёв А. В. (Москва), Мищенко С. П. (Ульяновск), Мороз Б. З. (Москва), Нестеренко Ю. В. (Москва), Нижников А. И. (Москва), Ольшанский А. Ю. (Нашвилл, США), Пачев У. М. (Нальчик), Рахмонов З. Х. (Душанбе, Таджикистан), Семёнов А. Л. (Москва), Устинов А. В. (Хабаровск), Фомин А. А. (Москва), Чирский В. Г. (Москва), Antonio Mucherino (France), Patrick Sole (France), Mathieu Dutour (France), Aleksandar Jurišić (Slovenia), Yaokun Wu (China), Mikhail Bounyaev (USA), Oleg Musin (USA), Sergey Shpectorov (UK), Fukshansky Lenny (California, USA), Navin Singhi (India), Marcelo Firer (Brasil), Yulia Kempner (Israel)

Редакционная коллегия:
доктор физико-математических наук, профессор *В. Н. Чубариков;*
доктор физико-математических наук, профессор *Н. М. Добровольский;*
кандидат физико-математических наук, доцент *И. Ю. Реброва;*
кандидат физико-математических наук *Н. Н. Добровольский;*
старший преподаватель *А. В. Родионов*

Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: Современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XXIV Международной конференции, посвященной 110-летию со дня рождения академика Ю. В. Линника и 110-летию со дня рождения профессора А. Б. Шидловского и 80-летию со дня рождения профессора Г. И. Архипова. —

Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2025. – 191 с.
ISBN 5–87954–388–9

ББК 22.1
УДК 51

ISBN 5–87954–388–9

© Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого, 2025

рассматривать не как указание на истинное положение дел, а как своеобразный полемический прием.

Наконец, если верить последнему высказыванию Ньютона о теореме, касающейся эллиптичности орбит, то придется сделать вывод, что с гипотезой обратных квадратов Ньютон был знаком еще за два года до знаменитого обмена письмами с Р. Гуком (которому эта гипотеза принадлежит).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковский Н.Е. О значении геометрического истолкования в теоретической механике (1894) // Н.Е. Жуковский. Полное собрание сочинений. Т. 9. М. –Л.: ОНТИ, 1937. С. 181-187.

2. Cohen I.B. A Guide to Newton's Principia // Isaac Newton. Mathematical Principles of Natural Philosophy. Berkeley etc.: University of California Press, 1999. P. 9-370.

3. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2 Aufl. Bd. 3. Leipzig, 1901.

4. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960.

5. Веселовский И.Н. Очерки по истории теоретической механики. М.: Высшая школа, 1974.

6. Жуковский Н.Е. Ньютон, как основатель теоретической механики // Н.Е. Жуковский. Полное собрание сочинений. Т. 9. М.–Л.: ОНТИ, 1937. С. 263-274.

7. Ньютон И. Математические работы / Пер. с лат., вводная статья и комментарии Д.Д. Мордухай-Болтовского. М.–Л.: ОНТИ, 1937.

8. Антропова В.И. О геометрическом методе «Математических начал натуральной философии» И. Ньютона // Историко-математические исследования. Вып. 17. 1966. С. 205–228.

УДК 512.55

Ранняя история недезарговых плоскостей[1]

А. В. Селиверстов (Россия, г. Москва)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
e-mail: slvstv@iitp.ru

Early history of non-Desarguesian planes

A. V. Seliverstov (Russia, Moscow)
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute)
e-mail: slvstv@iitp.ru

1. Предыстория

Основателем аксиоматического подхода считают Гиппократа Хиосского, автора первого текста *Начал*, работавшего в Афинах в V веке до н. э. Теорема Паппа была известна в III веке.

[1]Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

Многие авторы называют теорему Паппа теоремой Паскаля, в частности, на это указывает А. В. Васильев [1].

Теорема Паппа. *Пусть точки P_1, P_2 и P_3 лежат на одной прямой, а точки P_1', P_2' и P_3' лежат на другой прямой. Пусть три прямые P_1P_2', P_1P_3' и P_2P_3' пересекают три прямые $P_1'P_2$, $P_1'P_3$ и $P_2'P_3$ соответственно в точках P_{12}, P_{13} и P_{23}. Тогда точки P_{12}, P_{13} и P_{23} лежат на одной прямой.*

Теорема Дезарга известна с XVII века. Два треугольника $P_1P_2P_3$ и $P_1'P_2'P_3'$ перспективны (из точки), если прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку O.

Теорема Дезарга. *Если два треугольника $P_1P_2P_3$ и $P_1'P_2'P_3'$ перспективны, то коллинеарны три точки P_{12}, P_{13} и P_{23} пересечения пар прямых, содержащих пары соответственных сторон треугольников.*

Во второй половине XIX века было предложено много различных подходов к формализации математики, которая быстро развивалась, выходя за привычные рамки *Начал* Евклида. Оглядываясь назад, можно сказать, что ранние работы относятся к вещественной проективной геометрии. Многие математики старались внести уточнения, чтобы точнее описать свойства привычной вещественной плоскости. Но только молодой Джино Фано (Gino Fano, 1871–1951) отбросил эти ограничения и рассмотрел конечную проективную плоскость. Для многих геометров мысль о конечной плоскости была абсурдной. Но это не было слишком смелым в 1892 для Фано, который в 1888 году поступил, а 22 июня 1892 года окончил Туринский университет, защитив диссертацию. В том же году Фано опубликовал систему аксиом проективной геометрии и конечную проективную плоскость, содержащую семь точек и семь прямых. Отметим, что сегодня аксиомой Фано называют условие, запрещающее существование проективной плоскости из семи точек и семи прямых.

2. Недезарговы плоскости в XIX веке

В 1891 году Г. Винер (H. Wiener) из Галле (Halle) сообщил о независимости теоремы Дезарга (на плоскости) от некоторых аксиом плоскости [2]. Точнее, такова поздняя интерпретация его результата у Моултона [3] и Васильева [1]. Винер не указывает никакой системы аксиом в привычном виде, а использует лишь набор допустимых операций. Вероятно, это была первая попытка обосновать нетривиальность теорем Паппа (Паскаля) и Дезарга.

Следующий шаг сделал Давид Гильберт в 1899 году в книге *Grundlagen der Geometrie*. В ней построен пример недезарговой (аффинной) плоскости, удовлетворяющей группам аксиом сочетания (инцидентности) на плоскости, порядка, параллельности и непрерывности. Другой результат Гильберта состоит в возможности сопоставить дезарговой плоскости тело, элементы которого будут координатами. Коммутативность умножения, когда тело будет полем, эквивалентна выполнимости теоремы Паппа.

Книга *Основания геометрии* Гильберта в переводе на русский публикуется в 1923 году в Петрограде (книгоиздательство “Сеятель” Е. В. Высоцкого). Перевод сделан с 5-го издания. Русское издание включает большую (24 стр.) вступительную статью Александра Васильевича Васильева (1853–1929), в которой рассмотрена история аксиоматического подхода в геометрии [1]. В частности, отмечается важность работ Лобачевского, фон Штаудта и Винера.

3. Плоскость Моултона

Изящный пример недезарговой плоскости нашёл американский астроном Форест Рэй Моултон (Forest Ray Moulton, 1872–1952), представивший свою работу 2 января 1902 года [3]. Возможно, эта конструкция была связана с изучением преломления света. В своей работе по геометрии Моултон ссылается на Винера [2] и Гильберта.

Рассмотрим обычную вещественную аффинную плоскость с декартовой системой координат. Ось абсцисс делит плоскость на две полуплоскости. Каждую прямую, имеющую положительный наклон к оси абсцисс, изменим следующим образом: её луч, лежащий в верхней

полуплоскости, заменим лучом, имеющим вдвое меньший угловой коэффициент: $\mathrm{tg}\varphi = 2\mathrm{tg}\varphi'$. Первоначальная прямая изламывается при пересечении с осью абсцисс, а полученная ломаная рассматривается как прямая новой модели. Все остальные прямые, включая параллельные оси абсцисс, остаются прежними. Вслед за Гильбертом, Моултон рассматривает аффинную плоскость, но она может быть дополнена несобственной прямой, чтобы получилась проективная плоскость. На определённой так плоскости Моултона выполнены все аксиомы инцидентности. Но на ней не выполняется теорема Дезарга. Достаточно рассмотреть конфигурацию девяти точек из теоремы Дезарга, из которых восемь лежат в нижней полуплоскости, а одна в верхней, причём из трёх прямых конфигурации, проходящих через эту точку верхней полуплоскости, только одна имеет положительный наклон. Излом этой прямой на плоскости Моултона по сравнению с обычной плоскостью вызовет нарушение теоремы Дезарга.

4. Конечные недезарговы плоскости

Герхард Хессенберг (Gerhard Hessenberg, 1874–1925) доказал в 1905 году, что теорема Дезарга следует из теоремы Паппа. В то же время Джозеф Веддербарн (Joseph Henry Maclagan Wedderburn, 1882–1948), бывший в 1904–1905 годы в Университете Чикаго, доказал, что каждое конечное тело коммутативно. Отсюда следует, что в конечной дезарговой плоскости верна теорема Паппа.

Хотя конечную проективную плоскость построил Фано в 1892 году, долгое время оставался открытым вопрос о существовании конечной недезарговой плоскости. Конечные недезарговы плоскости представлены 22 апреля 1905 года и опубликованы в 1907 году молодыми математиками — геометром Освальдом Вебленом (Oswald Veblen, 1880–1960) и алгебраистом Джозефом Веддербарном [4]. В частности, они построили недезаргову проективную плоскость порядка 9.

Если обычные геометрии строились над полем, то здесь Веблен и Веддербарн используют алгебры, которые незадолго до этого рассмотрел Леонард Юджин Диксон (Leonard Eugene Dickson, 1874–1954). Рассмотрим двумерное линейное пространство над полем вычетов по модулю три. Его элементами служат линейные комбинации $a + bj$, где a и b пробегают поле из трёх элементов $\{0, 1, 2\}$ с обычными операциями по модулю три, а через j обозначен новый порождающий элемент. Определим умножение, полагая $j^2 = 2$ и в общем случае

$$(a + bj)(c + dj) = \begin{cases} (ac - bd) + (bc + ad)j, & a^2 + b^2 \in \{0, 1\} \\ (ac + bd) + (bc - ad)j, & a^2 + b^2 = 2. \end{cases}$$

Мы предполагаем операции по модулю три, не указывая $\pmod 3$. Так определена некоммутативная ассоциативная алгебра с делением из девяти элементов, в которой выполняется левая дистрибутивность $x(y + z) = xy + xz$, но не всегда выполняется правая, вообще говоря, $(y + z)x \neq yx + zx$. Поэтому рассматриваемая алгебра не является телом.

Точки проективной плоскости соответствуют классам эквивалентных троек (x, y, z) элементов алгебры, среди которых хотя бы один отличен от нуля. Для ненулевого элемента κ две тройки координат (x, y, z) и $(\kappa x, \kappa y, \kappa z)$ определяют одну точку. Всего 91 точка.

Линии определяются линейными уравнениями. В отличие от обычной геометрии, здесь важно место коэффициентов линейных уравнений. Авторы предлагают рассматривать следующие уравнения: 81 вида $x + yb + zc = 0$, девять вида $y + zc = 0$ и ещё $z = 0$. Итого, получится 91 линия по 10 точек в каждой. Так определена недезаргова плоскость порядка 9.

5. Плоскости Муфанг

Джон Грейвс (John Thomas Graves, 1806–1870) открыл октавы в 1843 году, вскоре их независимо открыл Артур Кэли (Arthur Cayley, 1821–1895). В Томске гиперкомплексные числа изучал Федор Эдуардович Молин (Theodor Georg Andreas Molien, 1861–1941).

Однако октавную плоскость создала Рут Муфанг (Ruth Moufang, 1905–1977) лишь в начале 1930-х под руководством Макса Дена (Max Wilhelm Dehn, 1878–1952). Более того, в серии работ с 1931 по 1937 годы был изучен большой класс плоскостей Муфанг, в которых выполнена малая теорема Дезарга — частный случай теоремы Дезарга, когда центр перспективы

лежит на линии перспективы. Муфанг доказала, что малая теорема Дезарга эквивалентна теореме о полном четырёхстороннике. Но в общем случае бесконечная плоскость Муфанг недезаргова. Напротив, конечная проективная плоскость, в которой выполнена малая теорема Дезарга (иными словами, микродезаргова плоскость), всегда будет дезарговой. Поэтому все нетривиальные плоскости Муфанг бесконечные.

Отметим, что Веблен и Веддербарн использовали ассоциативные алгебры, в которых нарушается (правая) дистрибутивность, а Муфанг рассмотрела альтернативные алгебры с делением, которые могут не быть ассоциативными.

6. Диссертация Вальтера Вагнера

В 1937 году Вальтер Вагнер (Walter Wagner) из Касселя (Kassel) защитил диссертацию "Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme" [5] во Франкфуртском университет имени Иоганна Вольфганга Гёте (Goethe-Universität Frankfurt am Main) под руководством Макса Дена и Карла Зигеля (Carl Ludwig Siegel, 1896–1981). Вагнер показал, что существует проективная плоскость, в которой выполнены теорема Дезарга и новое предложение, но не выполнена теорема Паппа. Но это предложение не выводимо из теоремы Дезарга.

7. Работы 1940-х годов

Новые недезарговы плоскости нашёл Маршалл Холл (Marshall Hall, 1910–1990) [6]. В современной интерпретации, Холл дал примеры конечных неассоциативных квазиполей [7].

Серию статей о недезарговых плоскостях написал Лев Анатольевич Скорняков (1924–1989). Этой теме посвящены его кандидатская диссертация "Альтернативные тела и альтернативные плоскости" (1950) и докторская диссертация "Некоторые вопросы теории тел и теории проективных плоскостей" (1956). Отметим, что в ходе Великой Отечественной войны происходил интенсивный обмен работами по математике между США и СССР. В частности, работу Холла [6] цитирует Скорняков в 1949 году [8]. Также в 1947 году опубликован перевод книги Натана Джекобсона 1943 года [9].

8. Заключение

Недезарговы плоскости возникли в XIX веке при развитии аксиоматического подхода к современной геометрии. Поиск новых *конечных* проективных плоскостей, в которых заведомо нарушается теорема Дезарга, позволит конструировать новые комбинаторные дизайны и блочные коды, исправляющие ошибки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев А. В. От Евклида до Гильберта // Вступительное слово в книге: Д. Гильберт. Основания геометрии. — Петроград: Сеятель, 1923.

2. Wiener H. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1890/91. V. 1. P. 45–48.

3. Moulton F. R. A simple non-Desarguesian plane geometry // Transactions of the American Mathematical Society. 1902. V. 3. P. 192–195.

4. Veblen O., Maclagan-Wedderburn J. H. Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries // Transactions of the American Mathematical Society. 1907. V. 8. P. 379–388.

5. Wagner W. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme // Mathematische Annalen. 1937. V. 113. P. 528–567.

6. Hall M. Projective planes // Transactions of the American Mathematical Society. 1943. V. 54, № 2. P. 229–277.

7. Кравцова О. В., Логинова В. С. Вопросы строения конечных квазиполей Холла // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 1. С. 128–141.

8. Скорняков Л. А. Натуральные тела Веблен–Веддербарновои проективной плоскости // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1949. Т. 13, № 5. С. 447–472.

9. Джекобсон Н. Теория колец. / Пер. с англ. Н.Я. Виленкина. — М.: Иностранная литература, 1947. 287 с. Перевод: Jacobson N. The Theory of Rings. 1943.

УДК 511.32

Становление В. В. Голубева, как аэромеханика (к 140-летию со дня рождения)

В. Н. Чиненова (Россия, г. Москва)
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Formation of V. V. Golubev as an aeromechanic (on the 140th anniversary of his birth)

V. N. Chinenova (Russia, Moscow)
e-mail: v.chinenova@yandex.ru

Владимир Васильевич Голубев (1884-1954) – выдающийся математик, механик, педагог, первый декан механико-математического факультета МГУ, член-корреспондент АН СССР, профессор, проработавший в Московском университете более тридцати лет.

Некоторые из его работ были чисто теоретическими, другие – имели прикладной характер, получившие интересную инженерную разработку и практическое применение.

Голубев был замечательным организатором, он долгие годы заведовал кафедрой аэромеханики, дважды избирался деканом механико-математического факультета, возглавлял Научно-исследовательский институт механики МГУ, был начальником кафедры высшей математики Военно-воздушной инженерной академии им. Н. Е. Жуковского, инженером-исследователем ЦАГИ.

В 1917 г. В.В.Голубев поехал из Москвы работать в Саратов, где организовывался университет и требовались энергичные, не боящиеся трудностей, молодые ученые. Вдали от столичных научных школ В. В. Голубев самостоятельно преодолел барьер между чистой и прикладной математикой, занявшись приложениями теории функций комплексного переменного к вопросам аэродинамики. Его исследования заинтересовали теоретическую группу ЦАГИ. По приглашению С. А. Чаплыгина, он переехал в Москву [1].

Первая работа В. В. Голубева по аэродинамике вышла в 1927 г. в «Трудах ЦАГИ». Это была монография «Теория крыла аэроплана в плоскопараллельном потоке» [2], в которой общим методом исследования выступает теория конформных отображений. В этой работе В. В. Голубев развивает идеи Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина в области теории крыла в плоскопараллельном потоке.

Продолжением этой работы стала вышедшая в 1931 г. «Теория крыла аэроплана конечного размаха» [3]. Здесь проведена цепь теоретических построений, ведущих от общих уравнений