Доклады Академии наук СССР
1968. Том 182, № 4

УДК 519 МАТЕМАТИКА

В. А. ЛЮБЕЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ГИПОТЕЗЫ О НЕСЧЕТНОСТИ МНОЖЕСТВА КОНСТРУКТИВНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком П. С. Новиковым 6 II 1968*)

Приводимая теорема и ее доказательство излагаются здесь в рамках наивной теории множеств. Однако используемые рассуждения далеки от антиномий и могут быть формализованы. Они могут быть переизложены, например, в системе Цермело — Френкеля (см. ([1]), обозначение ZF) или в системе Геделя (см. ([3])). Используемые понятия определены в работах ([2-4]). Все теоремы, на которые ссылаемся, приведены в тех же работах.

Теорема. *Если множество конструктивных действительных чисел несчетно, то можно построить несчетное множество типа CA без совершенного подмножества; если существует совершенное множество положительной меры, все элементы которого суть конструктивные действительные числа, то можно построить неизмеримое множество типа* B_2.

Доказательство. Обозначим, как это часто делают ([3, 4]), сужение геделевской функции $F(\alpha)$ (см. ([3])) на множество всех счетных ординалов той же буквой $F(\alpha)$. В работе П. С. Новикова ([4]) по функции $F(\alpha)$ определяется некоторый класс функций, у которых область определения — множество всех счетных ординалов, а область значений — некоторые элементы одномерного беровского пространства. Каждая такая функция обозначается $\tilde{F}(\alpha)$, и значение $\tilde{F}(\alpha)$ называется изобразителем множества $F(\alpha)$. Методом, несущественно отличающимся от изложенного в работе ([4]), для любого множества E типа собственно CA можно построить в двумерном беровском пространстве (прямое произведение пространств x и y) множество θ со следующими свойствами: (1) θ есть множество типа A_r; (2) $\theta \cdot p_y$ не более чем счетно; (3) если индекс решета, задающего E, совпадает в точках y_1 и y_2, то $\text{пр}_x\theta \cdot p_{y_1} = \text{пр}_x\theta \cdot p_{y_2}$; (4) $\text{пр}_y\theta \subseteq E$; (5) $\text{пр}_x\theta \subseteq [1, 2]$; (6) $\text{пр}_x\theta$ совпадают с множеством всех изобразителей в отрезке $[1, 2]$. Обозначим $\text{пр}_x\theta$ через D. Униформизуем по теореме Кондо множество θ относительно x. Полученное множество обозначим θ'. Обозначим $\text{пр}_y\theta'$ через W. Множество W не содержит совершенного подмножества, ибо иначе таковое покрывалось бы счетным числом конституант множества E, а одна из этих конституант содержала несчетную часть W, прообраз этой части множества W относительно θ' был бы также несчетен, что противоречит свойству (3) множества θ.

Покажем, что множество D совпадает со всеми конструктивными действительными числами x, лежащими в отрезке $[1, 2]$ (что, в частности, докажет замечание 2). Пусть элемент x из отрезка $[1, 2]$ конструктивен и имеет разложение (см. ([4])) $1x_1 \ldots x_{11} \ldots$ Элемент с разложением $x_1 \ldots x_n \ldots$ также конструктивен, следовательно, есть значение геделевской функции на некотором счетном ординале α. Тогда $\tilde{F}(\alpha) = x$. Действительно, состав $\tilde{F}(\alpha)$ есть $\tilde{F}(\beta_1) \ldots$, где $\tilde{F}(\beta_1) \ldots \tilde{F}(\beta_{11}) \ldots$ суть изобразители элементов множества x. Элементы множества x суть пары натуральных чисел $\langle x_1 1\rangle \ldots \langle x_n n\rangle \ldots$ и их изобразители совпадают с их номерами $r(\langle x_1 1\rangle) \ldots r(\langle x_n n\rangle) \ldots$. Но единственный элемент с составом $\{r(\langle x_1 1\rangle) \ldots r(\langle x_n n\rangle) \ldots\}$ есть элемент с разложением $1x_1 \ldots x_n \ldots$ По свойству (6) $x \in D$. Пусть $x \in D$ и имеет разложение $1x_1 \ldots x_n \ldots$, т. е. $F(\alpha) = x$. Состав x есть $\{r(\langle x_1 1\rangle) \ldots r(\langle x_n n\rangle) \ldots\}$. Следовательно, множество $F(\alpha)$ состоит из пар $\langle x_1 1\rangle \ldots \langle x_n n\rangle \ldots$, т. е. элемент $x_1 \ldots \ldots x_n \ldots$ конструктивен, но тогда и элемент $1x_1 \ldots x_n \ldots$ конструктивен. Из свойства (2) множества θ вытекает, что W несчетно, если конструктивных действительных чисел несчетно.

Перейдем к доказательству второй части теоремы. Продолжим θ' с совершенного подмножества D положительной меры на весь отрезок $[1, 2]$ с сохранением типа множества θ'. Аналогично первой части настоящего доказательства можно показать, что продолжение θ' есть неизмеримая функция. Следовательно, одно из ее лебеговских множеств есть неизмеримое B_2. Доказательство окончено.

Замечание 1. Можно построить модель ZF, где одновременно: а) имеется несчетное CA-множество без совершенного ядра; б) имеется неконструктивное подмножество натурального ряда; в) нарушается равенство $2^{\aleph_0} = \aleph_1$; г) опровержима аксиома выбора. Это вытекает из работы ([5]) и того, что теорему можно доказать и без аксиомы выбора.

Замечание 2. Из доказательства теоремы вытекает, что множество конструктивных действительных чисел имеет тип A_2. Иное и более сложное доказательство этого факта дано в работе ([6]).

Замечание 3. Можно построить модель ZF, где множество конструктивных действительных чисел не есть множество типа A.

Замечание 4. Если множество конструктивных действительных чисел не меры нуль, то или множество конструктивных действительных чисел неизмеримо (и имеет тип A_2), или можно построить неизмеримое B_2.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 I 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Френкель, И. Бар-Хилел, Основания теории множеств, М., 1966. [2] Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах и их приложениях, М., 1953. [3] К. Гедель, УМН, 3, в. 1 (23), 138 (1948). [4] П. С. Новиков, Тр. Инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 38 (1951). [5] P. J. Cohen, Set Theory and the Continuum Hypothesis, N. Y.— Amsterdam, 1966. [6] J. W. Addisson, Fund. Math., 46, 337 (1959).