Доклады Академии наук СССР
1969. Том 187, № 6

УДК 519.513/.514

МАТЕМАТИКА

А. Г. ДРАГАЛИН, В. А. ЛЮБЕЦКИЙ

ПОСТРОЕНИЕ ЭФФЕКТИВНО НЕДОСТИЖИМОГО КАРДИНАЛА В ЕСТЕСТВЕННОМ РАСШИРЕНИИ СИСТЕМЫ ЦЕРМЕЛО — ФРЕНКЕЛЯ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 26 XII 1968)

Рассматривается естественное расширение системы Цермело — Френкеля с аксиомой или без аксиомы выбора, см. ([1]) (обозначение ZF), полученное добавлением к синтаксису ZF двуместного отношения $\mathrm{Tr}(x, y)$ и ряда таких аксиом, что $\mathrm{Tr}(x, y)$ можно интерпретировать как предикат: «формула x при оценке y истинна». Если система ZF с аксиомой о существовании недостижимого кардинала непротиворечива, то и так полученная система ZF Tr тоже непротиворечива.

В этом расширении ZF строится кардинал α_0, конфинальность которого ω_0, такой, что

$$\forall\alpha\therefore \mathrm{Ord}\,(\alpha).\alpha < \alpha_0 : \rightarrow : \overline{\overline{P\alpha}} < \alpha_0$$

и ординал α_0 не называется никаким термом ZF, в котором в качестве констант взяты любые множества рангов, меньших чем α_0. Кроме того, никакая последовательность ординалов, конфинальная α_0, также не может быть названа таким способом. В этом смысле α_0 может быть назван эффективно недостижимым кардиналом. Кардинал α_0 можно включить как элемент в некоторую стандартную транзитивную модель ZF, и он останется неназываемым и «внутри» этой модели. Кардинал α_0 опровергает мыслимую гипотезу, что для всякого кардинала, у которого конфинальность ω_0, существует такой терм ZF и такие множества (рангов меньших этого кардинала) в качестве констант этого терма, что терм «называет» этот кардинал.

Доказательство естественно следует из возможности построения в ZF абсолютной (относительно универсума) натуральной модели ZF.

Ф о р м а л и з а ц и я с и н т а к с и с а ZF с р е д с т в а м и ZF. Далее будем считать системы ZF и ZF Tr пополненными гильбертовскими ι-термами общепринятым способом. $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{M}$, $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_n, \ldots$ — постоянные термы, удовлетворяющие формуле, выражающей «быть переменной». φ — специальная переменная, пробегающая объекты, удовлетворяющие формуле, выражающей «быть формулой». $t(x, n)$ — формула, выражающая «x есть терм с n переменными» $\exists T\dot{x}_0 \ldots \dot{x}_n$ и $\forall T\dot{x}_0 \ldots \dot{x}_n$ — сокращения, например, первое из них надо расшифровать так: «существует x такое, что $t(x, n)$ и переменные в x — первые n переменных в ряде $\dot{x}_0 \ldots \dot{x}_n \ldots$», т. е. утверждается существование терма T с переменными $\dot{x}_0 \ldots \dot{x}_n$. $\exists\langle x_0 \ldots x_n\rangle$ и $\forall\langle x_0 \ldots x_n\rangle$ — сокращения; например, первое из них расшифровывается так: «существует кортеж $\langle x_0 \ldots x_n\rangle$». $\mathrm{Ak}_{\mathrm{ZF}}(x)$ — формула, «говорящая» «x — аксиома ZF». O — специальная переменная для формулы, выражающей: «быть функцией, определенной на множестве всех переменных» (оценка). $\begin{pmatrix}\dot{y}_1 \ldots \dot{y}_n \\ x_1 \ldots x_n\end{pmatrix}$ — терм (при фиксированном n), выдающий по кортежу $\langle x_1 \ldots x_n\rangle$ множество пар $\{\langle\dot{y}_1 x_1\rangle \ldots \langle\dot{y}_n x_n\rangle\}$ (специальная оценка).

xy — двуместный терм; если x — оценка, а y — специальная оценка вида $\begin{pmatrix}\dot{y}_1 \ldots \dot{y}_n \\ x_1 \ldots x_n\end{pmatrix}$, то его значение есть такая оценка, что ее значения на

$\dot y_1 \ldots \dot y_n$ суть $x_1 \ldots x_n$, а на других переменных — те же, что и у x. Мы будем употреблять этот терм, когда вместо x подставлена произвольная оценка O, а вместо y — некоторая конкретная специальная оценка $\begin{pmatrix}\dot y_1 \ldots \dot y_n\\ x_1 \ldots x_n\end{pmatrix}$ (x, y) — также двуместный терм ZF Tr такой, что если x — терм с переменными $\dot x_1 \ldots \dot x_n$ (обозначим его $T\dot x_1 \ldots \dot x_n$), а y — специальная оценка для этих переменных $\begin{pmatrix}\dot x_1 \ldots \dot x_n\\ x_1 \ldots x_n\end{pmatrix}$, то значение терма есть такое множество z, что $\mathrm{Tr}\left(\dot x = T\dot x_1 \ldots \dot x_n, \begin{pmatrix}\dot x x_1 \ldots \dot x_n\\ x x_1 \ldots x_n\end{pmatrix}\right)$. $\lim\limits_{z} T\dot x_0 \ldots \dot x_n$, $\begin{pmatrix}\dot x_1 \ldots \dot x_n\\ x_1 \ldots x_n\end{pmatrix}$ есть трехместный терм, значение которого есть верхняя грань рангов элементов $\left\{T\dot x_0 \ldots \dot x_n, \begin{pmatrix}\dot x_0 \ldots \dot x_n\\ x_0 \ldots x_n\end{pmatrix} \middle| x_0 \in z\right\}$.

$x`y$ — двуместный терм такой, что если x — оценка, а y — формула со свободными переменными $\dot y_1 \ldots \dot y_n$, то значение терма есть множество значений оценки x на $\dot y_1 \ldots \dot y_n$.

x_y — двумерный терм; если x — формула, а y — переменная, то значение этого терма — формула, полученная из x релятивизацией всех связанных переменных x к y.

$\mathrm{cf}(\alpha)$ — терм, выдающий по ординалу α наименьший ординал, конфинальный α. $\mathrm{cf}(\gamma, \alpha)$ — формула, говорящая «γ конфинально α». $\text{Ист}_M(x, y)$ — формула ZF, определяющая истину на множестве M для формул x при оценках y из элементов M.

В формулах $\mathrm{Tr}(x, y)$ и $\text{Ист}_M(x, y)$, если x — замкнутая формула, то аргумент y опускается: $\mathrm{Tr}(x)$ и $\text{Ист}_M(x)$. Система ZF Tr получается из системы ZF расширением синтаксиса последней новым отношением $\mathrm{Tr}(x, y)$ (соответствующим образом изменяется и определение формулы). Аксиомы ZF Tr суть аксиомы ZF, причем аксиома подстановки усиливается таким образом, что относится не только ко всем формулам ZF, но и к формулам ZF Tr, и следующие 7 аксиом (синтаксические аксиомы ZF Tr):

$$\mathrm{Tr}\left(\dot x \,\dot\in\, \dot y, \begin{pmatrix}\dot x & \dot y\\ x & y\end{pmatrix}\right) \equiv x \in y,$$

$$\mathrm{Tr}(\urcorner\varphi, O) \equiv \urcorner \mathrm{Tr}(\varphi, O), \quad \mathrm{Tr}(\varphi \& \psi, O) \equiv \mathrm{Tr}(\varphi, O) \& \mathrm{Tr}(\psi, O),$$

$$\mathrm{Tr}(\dot\exists \dot x \varphi \dot x, O) \equiv \exists x\, \mathrm{Tr}\left(\varphi \dot x, O\begin{pmatrix}\dot x\\ x\end{pmatrix}\right)$$

и т. п.

Недостижимым называется кардинал α, если он обладает таким свойством: $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha \& \forall \alpha'. \alpha' < \alpha \to \overline{\overline{P\alpha'}} < \alpha$.

Рассмотрим два способа называния ординала термами ZF:

$$H_{\lim}(\alpha) \rightleftharpoons \exists n \exists T\dot x_0 \ldots \dot x_n \exists \langle x_1 \ldots x_n\rangle \exists \gamma.\, \mathrm{cf}(\gamma, \alpha) \& \lim_{\{\beta|\beta<\gamma\}} T\dot x_0 \ldots \dot x_n, \begin{pmatrix}\dot x_0 \ldots \dot x_n\\ \beta \ldots x_n\end{pmatrix} = \alpha,$$

$$H(\alpha) \rightleftharpoons \exists n \exists T\dot x_1 \ldots \dot x_n \exists \langle x_1 \ldots x_n\rangle\, T\dot x_1 \ldots \dot x_n, \begin{pmatrix}\dot x_1 \ldots \dot x_n\\ x_1 \ldots x_n\end{pmatrix} = \alpha.$$

Ординал α называется эффективно недостижимым, если $\urcorner H(\alpha) \& \urcorner H_{\lim}(\alpha)$ и $\forall \alpha'. \alpha' < \alpha \to \overline{\overline{P\alpha'}} < \alpha$. Обозначим конъюнкцию трех последних формул $\mathrm{In}(\alpha)$. Под моделью здесь всегда имеется в виду стандартная и транзитивная модель (см. ([2])). Если модель как множество имеет вид $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} R_\beta$, где $R_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} P(R_\gamma)$, она называется натуральной. Модель M называется абсолютной, если

$$\forall \varphi \forall O. O`\varphi \subseteq M \to \mathrm{Tr}(\varphi, O) \equiv \mathrm{Tr}\left(\varphi_{\dot M}, O\begin{pmatrix}\dot M\\ M\end{pmatrix}\right).$$

Как будет следовать из доказательства леммы 2, абсолютные натуральные модели образуют класс и, следовательно, могут быть занумерованы (в порядке возрастания относительно $\subseteq$) всеми ординалами: $M_0 \ldots M_\beta \ldots$ Наименьший ординал, не входящий в M_β, обозначим α_β и назовем границей модели M_β. Пусть M_α, M_β, M_γ и т. п.— специальные переменные для объектов, удовлетворяющих формуле, выражающей «быть абсолютной натуральной моделью ZF», а α_β, α_γ и т. п.— специальные переменные для объектов, удовлетворяющих формуле, выражающей «быть границей абсолютной натуральной модели ZF». $M_0, M_1, M_2, \ldots$ и т. д. будут использоваться как обозначения постоянных термов, «задающих» модели M_0, M_1, M_2, ... и т. д. (возможность построения таких термов ZF Tr следует из леммы 2), а $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\omega^0}$ — как обозначения постоянных термов, называющих границы моделей $M_0, M_1, \ldots, M_{\omega_0}$.

Предложение 1. *Если система* ZF *с дополнительной аксиомой о существовании недостижимого кардинала непротиворечива, то и система* ZF Tr *непротиворечива.*

Предложение 2. *Непротиворечиво относительно* ZF Tr, *что если* α — *граница натуральной модели* ZF, *то* $\mathrm{cf}(\alpha) < \alpha$.

Предложение 3. *Если* β — II *рода, то* $M_\beta = \bigcup\limits_{\gamma<\beta} M_\gamma$. *Если* β — I *рода, то* M_β *получается применением процесса, описанного в лемме* 2, *к множеству* $M_{\beta-1}$. $\mathrm{cf}(\alpha_\beta) = \omega_0$, *если* $\beta < \omega_1$. $\mathrm{cf}(\alpha_\beta) \geqslant \mathrm{cf}(\beta)$.

Теорема. *Можно назвать термами* ZF Tr *такие ординалы* α_0 *и* α_1, *что они будут границами абсолютных натуральных моделей* ZF M_0 *и* M_1 *соответственно и* $\alpha_0 \in M_1$, $\mathrm{cf}(\alpha_0) = \omega_0$, $\mathrm{cf}(\alpha_1) = \omega_0$ и $\mathrm{In}(\alpha_0)$, $(\mathrm{In}(\alpha_0))_{M_1}$.

Доказательство следует из лемм.

Лемма 1. $\underset{\mathrm{ZF\,Tr}}{\vdash} \forall\varphi\, \mathrm{Ak}_{\mathrm{ZF}}(\varphi) \to \mathrm{Tr}(\varphi)$.

Лемма 2. $\underset{\mathrm{ZF\,Tr}}{\vdash} \exists M_\alpha{:}.\, M_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} R_\beta \,\&\, \mathrm{cf}(\alpha) = \omega_0 / \forall\varphi \forall O.O`\varphi \subseteq M \to$
$\to \mathrm{Tr}\left(\varphi_{\dot M} \equiv \varphi,\ O\left(\begin{matrix}\dot M\\ M\end{matrix}\right)\right)$.

Занумеруем все термы $t_1 \ldots t_n \ldots$ По некоторому ординалу γ_0 образуем множество значений терма t_1 на множестве $\bigcup\limits_{\beta<\gamma_0} R_\beta$ и верхнюю грань этого множества обозначим γ_1; рассмотрим объединение множеств значений термов t_1 и t_2 на множестве $\bigcup\limits_{\beta<\gamma_1} R_\beta$ и верхнюю грань этого множества обозначим γ_2 и таким образом построим $\gamma_3 \ldots \gamma_n \ldots$ Ординал γ есть $\sup\limits_n\{\gamma_n\}$. Множество $\bigcup\limits_{\beta<\gamma} R_\beta$ и есть множество, требуемое в лемме.

Лемма 3. $\underset{\mathrm{ZF\,Tr}}{\vdash} \forall\varphi.\mathrm{Ak}_{\mathrm{ZF}}(\varphi) \to \text{Ист}_{M_1}(\varphi)$.

Лемма 4. $\underset{\mathrm{ZF\,Tr}}{\vdash} \neg H(\alpha_0)$, $\underset{\mathrm{ZF\,Tr}}{\vdash} \mathrm{In}(\alpha_0)$, $\underset{\mathrm{ZF\,Tr}}{\vdash} (\mathrm{In}(\alpha_0))_{M_1}$.

Следствие 1. *Если* ZF *непротиворечиво, то можно присоединить следующую формулу без противоречия к* ZF:

$$\exists M.M = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta \& \forall\varphi.\mathrm{Ak}_{\mathrm{ZF}}(\varphi) \to \text{Ист}_M\, \varphi \& \exists\alpha.\alpha \in M \& \mathrm{In}_M(\alpha),$$

где $\mathrm{In}_M(\alpha)$ *есть формула, полученная из формулы* $\mathrm{In}(\alpha)$ *заменой в ней всюду вхождений формулы* $\mathrm{Tr}(x, y)$ *на формулу* $\text{Ист}_M(x, y)$.

Следствие 2. *Если* ZF *непротиворечива, то непротиворечиво расширить ее следующим образом: синтаксис* ZF *расширим новой константой* α_0 *и добавим аксиомы*: 1) $\mathrm{card}(\alpha_0)$, $\mathrm{cf}(\alpha_0) = \omega_0$; 2) $\forall\alpha'.\alpha' < \alpha \to P\alpha' < \alpha_0$; $3n$) *список аксиом такого вида*:

$$\neg\exists x_1 \ldots x_n\ (\textit{ранг } x_i < \alpha_0 \,\&\, \mathrm{T}(x_1 \ldots x_n) = \alpha_0).$$

где T — *произвольный терм* ZF.

Следствие 3. *Для всякого* α_β *существует* α_β (*по мощности*) *различных натуральных моделей* ZF, *предшествующих* (*в смысле отношения* $\subseteq$) M_β.

Все M_β элементарно эквивалентны между собой и с универсумом ZF Tr (т. е. множество замкнутых формул, истинных в M_β, совпадает с множеством $\{\varphi | \mathrm{Tr}(\varphi)\}$). Как показывает следствие 3, между M_β (в смысле $\subseteq$) имеется много других натуральных моделей ZF. Есть ли среди них (и сколько?) такие натуральные модели, которые элементарно эквивалентны M_β?

Следствие 4. *Для всякого* α_β *существует* α_β (*по мощности*) *различных натуральных моделей* ZF, *упорядоченных отношением* $\subseteq$ (*все они* $\subseteq M_\beta$) *и каждая из них есть элементарное расширение любой предыдущей и элементарно эквивалентна* M_β *относительно формул* ZF, *и их границы конфинальны* ω_0.

Замечание. Многие из сделанных утверждений, хотя и сформулированы здесь для абсолютных натуральных моделей, на самом деле верны и для натуральных моделей, и даже просто для множеств вида $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} R_\beta$. Также и самое рассмотрение можно было вести в более «слабой» системе, чем ZF Tr, например, в расширении ZF, полученном добавлением аксиомы о существовании некоторой модели ZF специального вида или существования недостижимого кардинала и т. п.

Авторам неизвестно, существует ли кардинал α такой, что $\neg H_{\lim}(\alpha)$ и $H(\alpha)$, $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega_0$ и $\forall \alpha'.\alpha' < \alpha \to \overline{\overline{P\alpha'}} < \alpha$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
12 XII 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Френкель, И. Бар-Хиллел, Основания теории множеств, М., 1966.
[2] J. C. Shepherdson, J. Symb. Logic, 18, 145 (1953).