

А. Г. ДРАГАЛИН, В. А. ЛЮБЕЦКИЙ, В. И. ФУКСОН

ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЧЕТНЫХ ОРДИНАЛОВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 10 VII 1970)

В работе исследуются некоторые вопросы, относящиеся к эффективности в теории множеств. Основные проблемы такого сорта были поставлены довольно давно и интенсивно обсуждались, особенно в первый период развития теории множеств (см., например, ^(1, 2), более новые работы ^(3, 4), где имеется дальнейшая литература). Нас специально будет интересовать следующая хорошо известная проблема эффективности: можно ли по данному счетному предельному ординалу α эффективно указать (с использованием, может быть, и других ординалов в качестве констант) последовательность меньших ординалов, сходящуюся к α ? Или можно ли по данному счетному предельному ординалу α эффективно указать (с использованием, может быть, аналогичных констант) функцию, устанавливающую счетность α ? Понятие эффективности носит метаматематический характер, поэтому точный ответ на поставленные вопросы, конечно, зависит от аксиоматической системы, использованной для теории множеств. Основной будет аксиоматическая система Цермело — Френкеля ZF с аксиомой выбора (аксиомы Iв, II — V, VII — IX из ⁽⁵⁾). Термин «эффективно указать объект с такими-то свойствами» естественно уточняется тогда как «указать формулу ZF, определяющую этот объект и такую, что нужные свойства объекта выводятся в ZF. Несколько более удобно считать, что система ZF пополнена гильбертовскими ι -термами (например, по образцу ⁽⁶⁾); хорошо известно, что такое пополнение не расширяет возможности системы ZF), в такой теории «эффективно указать объект» эквивалентным образом уточняется как «указать терм ZF», который, можно доказать в ZF, дает нужный ответ. Используя это уточнение, можно пытаться дать отрицательный ответ на некоторые нерешенные проблемы, связанные с эффективностью. Первые результаты такого рода получены Ферманом ⁽⁷⁾ и затем Леви ⁽⁸⁾ с помощью метода вынуждения Коэна ⁽⁹⁾.

В настоящей заметке мы даем отрицательный ответ на упомянутые проблемы, касающиеся счетных ординалов.

Теорема 1. *Если ZF непротиворечива, то невозможно определить терм $T(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ теории, относительно которого в ZF можно было бы доказать, что для всякого счетного предельного α существуют ординалы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ такие, что $T(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — монотонно возрастающая последовательность ординалов, сходящаяся к α .*

Таким образом, даже используя для каждого α в качестве констант ординалы $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, невозможно эффективно определить последовательность (по типу ω_0) $T(\alpha)$, сходящуюся к α . Вторая из упомянутых проблем эффективным образом сводится к первой (если бы можно было эффективно отыскивать функцию, устанавливающую счетность α , то с помощью трансфинитной рекурсии можно было бы определить и терм T , указанный в теореме 1).

С другой стороны, хотя в ZF и нельзя назвать последовательности, сходящейся к α , любой отрезок ее можно назвать в некоторой модели ZF. Точнее, имеет место теорема 2 (см. ниже). Множество x назовем наследственно счетным, если x не более чем счетно, его элементы также не более

чем счетны, элементы этих элементов не более чем счетны и т. д. Модель ZF мы назовем стандартной, если ε -отношение в модели является естественным отношением принадлежности между элементами модели, и транзитивной, если все элементы элементов модели сами являются элементами модели. Всюду далее под моделями ZF мы понимаем стандартные, транзитивные модели.

Теорема 2. *Если предположить, что существует модель ZF, содержащая все наследственно счетные множества (это предположение выполняется, например, если предположить существование недостижимого кардинала), то всякое последовательно счетное множество определимо в некоторой счетной модели ZF.*

Для приложения теоремы 2 остается заметить, что всякий начальный отрезок функции, выдающей по счетному ординалу сходящуюся к нему последовательность, есть наследственно счетное множество.

Ординалы в теории множеств мы определяем по фон Нейману ((⁵), стр. 129), отождествляя ординал с множеством предшествующих ему ординалов, так что каждый счетный ординал оказывается наследственно счетным множеством.

Наметим доказательство теоремы 1. Если ZF непротиворечива, то непротиворечиво и ее следующее расширение ZF^+ : к синтаксису ZF добавляется константа Π — новое множество, и каждая аксиома ZF, релятивизованная к Π , добавляется как аксиома ZF^+ . Кроме того, в качестве аксиом к ZF^+ добавляются формулы, утверждающие транзитивность и счетность Π . В ZF^+ можно доказать существование минимальной модели M теории ZF, состоящей из конструктивных множеств. По этой модели методом Коэна строится модель N , а именно, модель (⁹), гл. IV, § 10, стр. 267, с такими параметрами, чтобы первый несчетный ординал ω_1^M модели M оказался счетным в N . Для N также верно утверждение, отмеченное Леви ((⁸), теорема 1) для другой модели, а именно, всякое наследственно ординально определимое множество конструктивно. (Для доказательства нашей теоремы достаточно установить этот факт для ординально определимых последовательностей счетных ординалов в N .) При перенесении доказательства Леви в модель существует аналог леммы 61 ((⁸) стр. 149), который доказывается методом пермутаций аналогично (⁷, ⁸).

Допустим теперь, что указанный в теореме 1 терм $T(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ существует. Обозначим через $(x \Rightarrow y)$ формулу ZF с переменными x и y , утверждающую, что x есть монотонно возрастающая последовательность ординалов, определенная на ω_0 и сходящаяся к предельному ординалу y . Пусть α — специальная переменная, пробегаящая счетные ординалы. Тогда в ZF

$$\forall \alpha \quad \exists \alpha_1 \dots \alpha_n (T(\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \Rightarrow \alpha).$$

Но тогда этот факт верен и в N . Выберем в качестве α первый несчетный ординал ω_1^M модели M (в N он счетен!). Для этого α найдутся ординалы $\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n$ модели N такие, что $(T(\omega_1^M, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \Rightarrow \omega_1^M)$ верно в N . Пусть t есть множество N , задаваемое термом $T(\omega_1^M, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ с указанными константами. Тогда $(t \Rightarrow \omega_1^M)$. По теореме Леви t конструктивно и, следовательно, $t \in M$. Формула же $(x \Rightarrow y)$ абсолютна, так что $(t \Rightarrow \omega_1^M)$, что невозможно, так как ω_1^M несчетно в M .

Наметим доказательство теоремы 2. Рассмотрим модель M , содержащую все наследственно счетные множества, и рассмотрим наследственно счетное множество x , $x \in M$. С помощью аргументов типа теоремы Левенгейма — Сколема можно построить уже счетную модель M^* и такую, что $x \in M^*$ и $g \in M^*$, где g — взаимно однозначное соответствие, устанавливающее наследственную счетность x (g определено на ω_0). Рассмотрим множество F пар натуральных чисел, такое что $\langle nk \rangle \in F \equiv g'n \in g'k$. Это множество эффективно кодируется множеством натуральных чисел G . Определим теперь функцию f : $f'n$ равно n -му по величине числу G . По

теореме Истона (¹⁰) модель M^x может быть расширена до модели N таким образом, что в N $2^{\aleph^n} = \aleph_{f(n)}$. Тогда f эффективно определима в N (она выражает некоторые свойства кардиналов N), а, следовательно, в N эффективно определимо и множество x .

Авторы благодарят В. Н. Гришина за ценное обсуждение рассматриваемых вопросов.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 VII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ F. Bernstein, Leipz. Ber., **60** (1908). ² Н. Н. Лузин, Лекции об аналитических множествах, М., стр. 359. ³ К. Куратовский, Топология, **1**, М., 1966, стр. 594. ⁴ W. Sierpinski, Cardinal and Ordinal Numbers, Warszawa, 1958. ⁵ А. А. Френкель, И. Бар-Хиллел, Основания теории множеств, М., 1966, стр. 556. ⁶ J. B. Rosser, Logic for Mathematicians, 1953, p. 540. ⁷ S. Feferman, Fund. math., **56**, № 3, 325 (1965). ⁸ A. Levy, Intern. Congr. for Logic Methodology and Phil. Sci. 1964, Amsterdam, 1965, p. 127. ⁹ П. Дж. Коэн, Теория множеств и континуум-гипотеза, М., 1969. ¹⁰ W. Easton, Ann. Math. Log., **1**, N 2, 139 (1970).