УДК 513.83 + 513.88 МАТЕМАТИКА

Е.И. ГОРДОН, В.А. ЛЮБЕЦКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА В ТЕОРИИ БУЛЕВОЗНАЧНЫХ МЕР

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 29 IV 1980)

В заметке рассматриваются некоторые вопросы нестандартного анализа в его булевозначном варианте. Она является продолжением и развитием работ ([1-3]). Некоторые из рассматриваемых вопросов в одном частном случае, а именно, когда в определении в качестве **B** взята полная булева алгебра, порожденная семейством коммутирующих ортогональных проекторов гильбертова пространства, а в качестве X – поле действительных чисел или комплексных чисел R, C, затрагиваются также в книге ([4]).

В сущности по произвольной структуре X определяются два объекта: "внешний" $\mathbf{B}^X$ и "внутренний" $\tilde{X}$, где **B** – полная булева алгебра; свойства этих объектов тесно связаны между собой и определяются свойствами X. Эти свойства и рассматриваются в основном в работе. Работа, содержащая подробные доказательства и более детализированные формулировки, сдана в печать.

О п р е д е л е н и е. Пусть X – отделимое равномерное пространство (его элементы будем обозначать x, y), Σ – база открытых в X^2 симметричных окружений равномерной структуры X. В X рассматривается топология равномерной структуры. Пусть $\bar{\bar{\mathcal{T}}}$ – совокупность всех открытых подмножеств X, а $\mathcal{T}$ – любая база топологии; элементы $\bar{\bar{\mathcal{T}}}$ обозначим u, v. Обозначим $\mathbf{B}^X$ совокупность всех отображений $\bar{\bar{\mathcal{T}}}$ в **B**, удовлетворяющих условиям: 1) $p(\phi) = 0, \forall \sigma \in \Sigma \left(\bigvee_{u \times u \subseteq \sigma} p(u) = 1 \right)$; 2) $p(u \cap v) = p(u) \wedge p(v)$; 3) $p(u) = \bigvee_{\sigma(v) \subseteq u} p(v)$ (равномерная регулярность). Назовем $\mathbf{B}^X$ *б у л е в ы м р а с ш и р е н и е м* X, его элементы будем обозначать p, q. Обозначим $\mathbf{B}^X_*$ совокупность всех отображений $\bar{\bar{\mathcal{T}}}$ (или любой базы $\mathcal{T}$, замкнутой относительно операции пересечения) в **B**, удовлетворяющих условиям: 1) $p(\phi) = 0$; $p(X) = 1$, 2) $p(u \cap v) = p(u) \wedge p(v)$; 3) $u = \bigcup_\alpha u_\alpha \Rightarrow p(u) = \bigvee_\alpha p(u_\alpha)$ (или, что эквивалентно, $u \subseteq \bigcup_\alpha u_\alpha \Rightarrow p(u) \leqslant \bigvee_\alpha p(u_\alpha)$)*. Если p определено на $\mathcal{T}$, то оно единственным образом продолжается на $\bar{\bar{\mathcal{T}}}$ с сохранением свойств 1)–3) по формуле $p(u) = \bigvee_\alpha p(u_\alpha)$, где $u = \bigcup_\alpha u_\alpha$, $u_\alpha \in \mathcal{T}$. Обозначим S стоуновское пространство **B** и отождествим элементы **B** и открыто-замкнутые множества в S.

Т е о р е м а 1. *Если X – полное со счетной базой окружений или равномерно локально-компактное пространство, то $\mathbf{B}^X$ биективно с семейством $C'(S, X)$ функций вида $f: S \to X$, определенных и непрерывных на котощем (зависящем от f) множестве по формуле $p \mapsto f_p(s) = \lim p^{-1}(s)$. При этом элементы $\mathbf{B}^X$ с компактным носителем соответствуют элементам $C(S, X)$.*

До конца заметки предполагается выполненным условие этой теоремы.

Т е о р е м а 2. *Множество $\mathbf{B}^X$ биективно с семейством вполне аддитивных на открытых множествах, мультипликативных, **B**-значных борелевских мер по фор-*

---

* Из условия 3') $p(u) = \bigvee_{\bar{v} \subseteq u} p(v)$, где $\bar{v}$ компактно (компактная регулярность), вытекает условие 3); обратное также верно, если X локально компактно.

муле $p \mapsto \mu_p(w) = [f_p^{-1}(w)]$, *где* $[\cdot]$ *означает факторизацию по тощим множествам. В частности,* μ_p *– продолжение* p.

Теорема 3. *Если* X_0 *– сепарабельное метрическое пространство** *и* T: $X \to \mathbf{B}^{X_0}$, *то для любого* $x \in X$ *выполняется* $T(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \hat{x}\, d\mu_T$, *где* $\mu_T(w) = [T^{*-1}(w)]$ – *σ-аддитивная, σ-мульипликативная* $\mathbf{B}$*-значная мера, определенная на σ-алгебре, порожденной* $\{\hat{x}^{-1}(w) \mid x \in X \wedge w \in \mathfrak{B}\}$.

Если фиксировано $\mathfrak{M} \subsetneq C(X, X_0)$, *то совокупность всех* T: $X \to B_c^{X_0}$, *для которых* T^*: $S \to \mathfrak{M}$, *биективно с множеством всех мер теоремы* 2 *на* $\mathfrak{M}$ *с компактным носителем по формуле этой теоремы, обращение которой имеет вид* $T \mapsto \mu_T = [T^{*-1}(w)]$.

Здесь $\int\limits_{\mathfrak{M}} f d\mu$, где f: $\mathfrak{M} \to X_0$ и μ – мера на $\mathfrak{M}$, определяется как равномерный на $\operatorname{Arg} f$ предел интегральных сумм Σ_π равных $\Sigma_\pi(s) = x_i$ для $s \in \mu(f^{-1}(w_i))$, где $\pi = \{\langle w_i, x_i \rangle\}$ – интегральное разбиение X_0. Далее рассматривается конструкция, в сущности совпадающая с булевозначной моделью ([8]), стр. 57; поэтому опишем только ее отличия от булевозначной модели: $V_0^{\mathbf{B}}$ – не пустое множество, а $\mathbf{B}^X$, $\|p - q\| = \bigwedge\limits_u p(u) \wedge q(u) \vee \neg p(u) \wedge \neg q(u)$, $\|p = f\| = 0$, $\|f_1 \in p\| = 0$, $\|p \in f\| = \bigwedge\limits_g f(g) \wedge \|p = g\|$, где $f \in V^{\mathbf{B}} \setminus V_0^{\mathbf{B}}$, $f_1, g \in V^{\mathbf{B}}$ (вместо $\|\cdot\|$ иногда пишут $[\![\cdot]\!]$, а вместо $[\![\varphi]\!] = 1$ пишут φ). Семейство $V^{\mathbf{B}}$ с учетом этих отличий обозначим $\mathbf{B}(X)$. Если $f \subseteq \mathbf{B}(X)$, то $\underline{f}$ – функция, тождественно равная 1 на множестве f. Если $f \in \bar{B}(X)$, то по определению $f\hat{} = \{g \in \mathbf{B}(X) \mid [\![g \in f]\!] = 1\}$.

Обозначим $\tilde{X}$ такой элемент $\mathbf{B}(X)$, для которого $[\![\tilde{X}$ – пополнение равномерного пространства $\check{X}$ с базой окружений $\check{\Sigma}]\!] = 1$; легко доказать существование и единственность такого $\tilde{X}$ (([8]), стр. 58 – 61).

Теорема 4. *Множества* $(\tilde{X})\hat{}$ *и* $\mathbf{B}^X$ биективны по формуле** $\mathfrak{F} \mapsto p(u) = [\![\check{u} \in \mathfrak{F}]\!]$ *и* $\mathbf{B}^X = \tilde{X}$.

Обозначим $\mathbf{B}_0^X$ часть $\mathbf{B}^X$ с ограниченным носителем; предполагается, например, что X – метрическое пространство с метрикой ρ. Условия $p \in \mathbf{B}_0^X$, $\|p\| = \inf\{\lambda \mid p(u_\lambda) = 1\} = \lambda_0$ и $\sup\limits_s |f_p(s)| = \lambda_0$ эквивалентны, где u_λ – шар радиуса λ и $|x|$ – расстояние относительно какой-то фиксированной точки x_0 в X. Обозначим $\mathcal{O}_u = \{p \mid p(u) = 1\}$, $\underline{\bar{\mathcal{T}}} = \underline{\{\mathcal{O}_u \mid u \in \bar{\mathcal{T}}\}}$ (это база равномерной топологии в $\tilde{X}$), $\tilde{w}$: $\mathbf{B}^X \to \mathbf{B}$ равно $\tilde{w}(p) = \mu_p(w)$, где $w \in \mathfrak{B}$ (можно доказать: $\tilde{u} = \underline{\mathcal{O}_u}$, $\mu_p(w) = [\![p \in \tilde{w}]\!]$, $\tilde{\tilde{u}} = \bar{\tilde{u}}$; если w замкнуто, то $\tilde{w} = \bar{\tilde{w}}$; если X равномерно локально предкомпактно, то $\tilde{X}$ локально компактно, а также и другие хорошие свойства операции $\tilde{\ }$). Если $\tilde{\rho}$ – метрика в $\tilde{X}$, полученная поднятием метрики $\check{\rho}$ в $\check{X}$, то $\{p \mid \tilde{\rho}(p, \check{x}_0) < \check{\lambda}\} \subseteq \underline{\mathcal{O}_{u_\lambda}} \subseteq \{p \mid \rho(p, \check{x}_0) \leqslant \check{\lambda}\}$. Обозначим $p_n \xrightarrow{\mathbf{B}} p$ то обстоятельство, что $p_n \to p$ в $\tilde{X}$.

* Обозначим: T^*: $S \to X_0^X$, равное $T^*(s) = f_{T(x)}(s)$, и $\mathfrak{M}$ – множества $\operatorname{Val} T^*$ или X_0^X и $\hat{x}$: $\mathfrak{M} \to X_0$, равное $\hat{x}(h) = h(x)$, $\mathfrak{B}$ – алгебра борелевских множеств в X_0, $\mathbf{B}_c^{X_0}$ – часть $\mathbf{B}^{X_0}$ с компактными носителями.

** Здесь $\mathfrak{F}$ – минимальный фильтр Коши на $\check{X}$, $\check{\Sigma}$, можно проверить, что $\check{\bar{\mathfrak{F}}}$ база топологии, порожденной $\check{\Sigma}$ (где $\mathcal{T}$ порождается Σ) и $\check{u} \in \check{\mathcal{T}}$, где $u \in \mathcal{T}$.

Теорема 5. *Если X со счетной базой топологии и $p_n \overset{\mathbf{B}}{\to} p$, то $f_{p_n} \to f_p$ топологически почти везде (т.п.в.). Если $f_n, f \in C'(S, X)$ и $f_n \to f$ т.п.в., то $p_{f_n} \overset{\mathbf{B}}{\longrightarrow} p_f$. Множество $\mathbf{B}_0^X$ полно относительно метрики $\rho(p,q) = \inf\{\lambda \mid \tilde{\rho}(p,q) < \check{\lambda}\}$, а если X полно, то и $\mathbf{B}_c^X$ полно относительно $\rho(p,q)$. Если Y – полное со счетной базой и $\varphi\colon X_1 \times X_2 \times \ldots X_n \to Y$ – бэровская функция, то существует функция φ_1, для которой при любых $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbf{B}^{X_1}, \mathbf{B}^{X_2}, \ldots, \mathbf{B}^{X_n}$, $q = \varphi_1(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ выполняется $f_q = \varphi \circ (f_{p_1}, f_{p_2}, \ldots, f_{p_n})$ т.п.в. При этом φ_1 – функция – продолжение $\check{\varphi}$ и непрерывная, если φ непрерывная.*

Оказывается, что алгебраическая структура в X естественным образом поднимается в $\tilde{X}$ и $\mathbf{B}^X$: если X – отделимая топологическая группа (кольцо, модуль над K), содержащая окрестность нейтрального элемента, в которой $x \mapsto -x$ равномерно непрерывна, то $\langle \check{X}, +\check{}, -\check{} \rangle$ (и аналогично другие операции, если они имеются) образуют группу (кольцо, модуль над $\check{K}$) и операции продолжаются на пополнение $\tilde{X}$ и отсюда опускаются на $\mathbf{B}^X$ в виде $p + q = r$, если $[\![p+q=r]\!] = 1$. При этом $(p+q)(u) = \bigvee\limits_{\bar{v} \subseteq u,\, v_1+v_2 \subseteq \bar{v}} p(v_1) \wedge q(v_2)$, $(-p)(u) = p(-u), (k_1k_2)(u) = \bigvee\limits_{\bar{v} \subseteq u,\, v_1 v_2 \subseteq \bar{v}} k_1(v_1) \wedge k_2(v_2)$, $(k_1 p)(u) = \bigvee\limits_{\bar{v} \subseteq u,\, v_1 v_2 \subseteq \bar{v}} k_1(v_1) \wedge k_2(v_2)$, где $p, q \in \mathbf{B}^X$, $k_1, k_2 \in \mathbf{B}^K$, и эти операции совпадают с поточечными операциями над соответствующими функциями $f_p, f_q, f_{k_1}, f_{k_2}$. Например, если X – локально-компактное тело, то $\tilde{X}$ – одноименное локально-компактное тело. Если X – нормированная алгебра над C с непрерывной инволюцией, то $\tilde{X}$ – банахова алгебра с непрерывной инволюцией. Приведем примеры двух более сложных утверждений этого рода. Если X – вещественное или комплексное банахово пространство (коммутативная самосопряженная банахова алгебра с непрерывной инволюцией), D – замкнутый единичный шар в сопряженном пространстве X' (Δ – ее пространство максимальных идеалов) и $\mathcal{D}$ – замкнутый единичный шар в сопряженном пространстве $(\tilde{X})'$ (Δ – пространство максимальных идеалов $\tilde{X}$), то $\mathcal{D}\hat{} = \mathbf{B}^D$ (соответственно $\Delta = \mathbf{B}^\Delta$). Если G – коммутативная локально-компактная группа, то $(\tilde{G})^+ = (G^+)^\sim$, где G^+ – двойственный объект, и мера Хаара $\tilde{m}$ на $\tilde{G}$ есть продолжение меры Хаара m на G в смысле $\tilde{m}(\tilde{c}) = (m(c))\check{}$.

В заключение приведем несколько простых иллюстративных (частично известных) предложений, доказательство которых состоит в непосредственном применении вышеуказанных теорем.

1. Пусть K – алгебраически замкнутое нормированное поле. Для любой полной булевой алгебры $\mathbf{B}$ рассмотрим коммутативную алгебру $\mathbf{B}^{\bar{K}}$ и произвольный многочлен $P_n(x) = x^n + p_1 x^{n-1} + \ldots + p_n$ с коэффициентами из нее. Тогда существуют такие ее элементы $p^1, p^2, \ldots, p^n$, что $\forall x \in \mathbf{B}^{\bar{K}}$ $(P_n(x) = (x - p^1)(x - p^2) \ldots (x - p^n))$ и семейство решений уравнения $P_n(x) = 0$ совпадает с $\left\{ \bigvee\limits_{i=1}^{n} b_i \wedge p^i \mid \{b_i\} \text{ – разложение единицы} \right\}$; $\bar{K}$ – пополнение K.

2. Для определенности рассмотрим R_v, где v – простое число или символ ∞ и R_p – p-адические числа, а R_∞ – вещественные числа. Для любой полной булевой алгебры $\mathbf{B}$ рассмотрим семейство алгебр $\mathbf{B}^{R_v}$ (все они содержат алгебру $\mathbf{B}^Q$) и произвольную квадратичную форму от n переменных $P_n(x) = \sum\limits_{i \leqslant j} 2p_{ij}x_ix_j$

с коэффициентами из $\mathbf{B}^Q$. Невырожденность формы означает, что ее определитель обратим в $\mathbf{B}^Q$. Если P_n невырожденная и $n \geqslant 5$ и уравнение $P_n(x) = 0$ имеет решение в алгебре $\mathbf{B}^R$, то оно имеет решение и в алгебре $\mathbf{B}^Q$; в общем случае любое уравнение $P_n(x) = 0$ разрешимо в $\mathbf{B}^Q$ тогда и только тогда, когда оно разрешимо во всех $\mathbf{B}^{R_v}$. Если $p_n = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 - x_3^2$, то $\prod\limits_v \left(\frac{p_1, p_2}{v}\right) = +1$, где $\left(\frac{p_1, p_2}{v}\right) = +1$, если $P_n(x) = 0$ разрешимо в алгебре $\mathbf{B}^{R_v}$, и -1 в противном случае.

В этих пунктах некоторые общеизвестные теоремы о K, $\{R_v\}$ перенесены на алгебры мер над K, $\{R_v\}$; имеет место общее утверждение о таком переносе свойств, примерами к которому являются эти пункты. Рассмотрим пример: если дано любое коммутирующее семейство ортогональных проекторов гильбертова пространства $\mathfrak{X}$ (аналогичный пример для банахова пространства рассматривается в следующем пункте), другими словами, пусть $\mathbf{B}$ – все самосопряженные идемпотенты коммутативной сильно замкнутой алгебры X ограниченных операторов, то оно порождает булеву алгебру $\mathbf{B}_0$ (относительно "дополнения" $1-P$ и "пересечения" P_1P_2), сильное операторное замыкание которой является полной булевой алгеброй $\mathbf{B}$; тогда $\mathbf{B}^{\mathbf{C}}$ – все нормальные (ограниченные и неограниченные) операторы, образ разложения единицы которых содержится в $\mathbf{B}$ (соответственно ограниченные операторы из $\mathbf{B}^{\mathbf{C}}$ совпадают с X, а неограниченные имеют вид $\mathfrak{x}$ – $-\sum\limits_{m=1}^{\infty} P_m T_m$, где $\{P_m\}$ – разложение $\mathfrak{X}$ элементами из $\mathbf{B}$, а $\{T_m\} \subseteq X$), $\mathbf{B}^R$ – все аналогичные самосопряженные операторы, $\mathbf{B}^Q$ – часть из них с рациональным спектром и т.д.

3. Пусть T – гомоморфизм коммутативной локально-компактной группы G в семейство спектральных скалярного типа ограниченных операторов в слабо полном банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ ((⁹), т. III, гл. XV). Предположим, что булева алгебра $\mathbf{B}_0$, порожденная $\bigcup\limits_g \mathrm{Val}\, E_{T(g)}$, ограничена* и $\forall \xi \neq 0\ \exists f \in \mathfrak{X}' \neg (f(T_i(g))\xi = 0$ почти всюду) и $\forall \xi\, (T_i(g) \cdot \xi$ сильно интегрируема), где T_0, T_i' – соответственно сужение T на G_0 и i-ю компоненту R^n, $T_i(\lambda) = T_i'(\lambda) \cdot T_1'(1)^{-1}$ – гомоморфизмы, определенные** на R/Z. Если G компактная, то для любого g носитель разложения единицы $T(g)$ есть одномерный тор S^1. В общем случае, для любого $\epsilon > 0$ и любого компакта $c \subseteq G$ существует такое разложение*** $\{P_\chi | \chi \in G^+\}$ пространства $\mathfrak{X}$, что $\forall \chi, g \in c (\|(T(g) - \chi(g) \cdot 1) \cdot P_\chi\| < \epsilon)$. Если, например, $G = R^n$, то существуют ограниченные спектральные операторы с носителем S^1, для которых $T(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} \ldots c_n^{\lambda_n}$, а для такого T, что все его зна-

* Здесь $E_{T(g)}$ – разложение единицы, соответствующее $T(g)$, $\xi \in \mathfrak{X}$, $\mathfrak{X}'$ – сопряженное пространство; $G_0 \times R^n$ – открытая подгруппа в G, где G_0 – компактная группа.

** Цель этих условий в том, чтобы обеспечить непрерывность $\underline{T}$: $\check{G}_0 \times (\check{R})^n \to \mathbf{B}^{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{C}}$, где T выражается через T_0, T_i, а $\mathbf{B}$ – сильное операторное замыкание $\mathbf{B}_0$, тогда $\underline{T}$, как гомоморфизм, продолжается по непрерывности до $\tilde{T}$: $\tilde{G} \to \tilde{\mathbf{C}}$, и вопросы, относящиеся к "интегрируемому" гомоморфизму T, сводятся к принципиально более простым вопросам, относящимся к числовому непрерывному гомоморфизму (в сущности, характеру) $\tilde{T}$. Это автоматически обеспечено, если T, например, непрерывно в смысле нормы. Следующие далее утверждения являются примерами общего предложения о переносе свойств "внутренних", из $\mathbf{B}(X)$ объектов, в данном случае $X = \mathbf{C}$, на соответствующие "внешние" объекты.

*** Здесь χ – произвольный элемент G^+. "Разложение" означает, что все P_χ дизъюнктны и направленность из всевозможных конечных сумм P_χ сильно сходится к 1.

чения имеют носителем S^1, выполняется $T = e^{it_1\lambda_1} e^{it_2\lambda_2} \ldots e^{it_n\lambda_n}$, где $t_1, t_2, \ldots$ $\ldots, t_n$ — самосопряженные операторы.

Если G компактна или все значения T имеют носителем S^i, то существует такое бэровское (непрерывное на котощем множестве) отображение f_T: $S \to G^+$, что следующая диаграмма коммутирует:

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "T(g,s)"] \arrow[d, "\langle id,\, f_T \rangle"'] & S^1 \\ G \times G^+ \arrow[ur, "\chi(g)"'] & \end{tikzcd}$$

В частности, для некоторой B-значной меры μ_T выполняется

$$T(g) = \int_{G^+} \chi(g) d\mu_T(\chi).$$

4. Если X — локально-компактное пространство и T: $C_{00}(X, R) \to \mathbf{B}^{\mathbf{R}}$ — линейный оператор, непрерывный в следующем смысле: для всякого компакта c существует $t \in \mathbf{B}^R (\mathrm{A} f \in C(c, R) \mid T(f) \mid \leqslant t \cdot \|f\|_\infty)$, то существует $\mathbf{B}^R$-значный заряд μ, для которого $T(f) = \int_X f d\mu$ и T представим в виде разности двух положительных операторов. Если T с абстрактной нормой (относительно $\|f\|_\infty$), то, кроме того, $\mathrm{A}w(|\mu(w)| \leqslant 4 \cdot |T|$. Верно и обратное утверждение.

Напомним, что любое K-пространство имеет вид $\mathbf{B}^R$. Аналогичное утверждение выполняется для T: $C_{00}(X, K) \to \mathbf{B}^{\mathbf{C}}$, где $K = R$ или $\mathbf{C}$. Применяя эту теорему к $C(\Delta, \mathbf{C})$, получаем $\mathbf{B}^{\mathbf{C}}$-значный (операторнозначный) аналог теоремы Бохнера.

Московский государственный педагогический
институт им. В.И. Ленина

Поступило
9 IX 1980

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Е.И. Гордон,* ДАН, т. 237, № 4, 1481 (1977). [2] *В.А. Любецкий,* В сб.: Математические методы решения инженерных задач, № 5, М., 1977, стр. 57, 63. [3] *В.А. Любецкий,* там же, № 6, М., 1978, стр. 67, 81. [4] *G. Takeuti,* Two Applications of Logic to Mathematics, Tokyo, 1978. [5] *Н. Бурбаки,* Общая топология, основные структуры, М., 1968, 1958; Общая топология, использование вещественных чисел в общей топологии, М., 1975. [6] *Н. Бурбаки,* Алгебра, алгебраические структуры, линейная и полилинейная алгебра, М., 1962; Алгебра, модули, кольца, формы, М., 1966. [7] *Д. Келли,* Общая топология, М., 1968. [8] *Т. Йех,* Теория множеств и метод форсинга, М., 1973. [9] *Н. Данфорд, Д. Шварц,* Линейные алгебры, т. 3, М., 1974.