УДК 517.11+513.88 МАТЕМАТИКА

В.А. ЛЮБЕЦКИЙ, Е.И. ГОРДОН

ВЛОЖЕНИЕ ПУЧКОВ В ГЕЙТИНГОВОЗНАЧНЫЙ УНИВЕРСУМ

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 31 III 1982)

Пусть Ω – произвольная **полная гейтингова алгебра** (cHa), т.е. полная вверх и вполне дистрибутивная решетка с наименьшим 0 и наибольшим 1 элементами, рассматриваемая относительно операций конечного пересечения $\wedge: \mathcal{P}^{\text{fin}}(\Omega) \to \Omega$ и произвольного объединения $\vee: \mathcal{P}(\Omega) \to \Omega$ ее элементов. Здесь $\mathcal{P}(X)$ обозначает семейство всех подмножеств X, а $\mathcal{P}^{\text{fin}}(X)$ – семейство всех конечных подмножеств X.

Функцию вида $f: \Omega_1 \to \Omega_2$ называют **квазиморфизмом** (соответственно **морфизмом**), если:

1) $\forall P_1, P_2, P_\alpha \in \Omega_1 (f(P_1 \wedge P_2) = f(P_1) \wedge f(P_2))$,

2) $f(\vee_\alpha P_\alpha) = \vee_\alpha f(P_\alpha)$,

3) $f(0) = 0$ (в случае морфизма, кроме того, $f(1) = 1$).

Типичный пример cHa – совокупность $\mathcal{T}(X)$ всех открытых подмножеств произвольного топологического пространства X, для которой операции $\wedge$ и $\vee$ совпадают с обычными теоретико-множественными операциями. С помощью канонических операций $\wedge$ и $\vee$ определяются и такие операции, как $\wedge Y$, $u \to v$, $u \leftrightarrow v$. Операцию $u \to 0$ обычно называют **псевдодополнением**.

Существенным частным случаем cHa является понятие **полной булевой алгебры** (cBa) **B**, в котором операции обладают дополнительным свойством $u \vee (u \to 0) = 1$. Благодаря этому свойству, псевдодополнение обладает всеми свойствами, характерными для обычного дополнения. На топологическом языке этот случай соответствует тому, что **B** – совокупность $\mathcal{T}^0(S)$ всех открыто-замкнутых подмножеств экстремально несвязного топологического пространства, которое обозначается S или $S(\mathbf{B})$ и называется **стоуновским пространством** **B**. Булеву алгебру можно понимать и как кольцо $\langle \mathbf{B}, +, \cdot, 0, 1 \rangle$, где $u + v = (u \wedge (v \to 0)) \vee (v \wedge (u \to 0))$ и $u \cdot v = u \wedge v$. Оно называется **булевым** и определяется как произвольное кольцо, для которого $\forall u (u^2 = u)$. По булеву кольцу канонически образуется булева алгебра. Пространство $S(\mathbf{B})$ определяется как спектр (с топологией Зарисского) булева кольца **B**.

Примеры cBa: сильно замкнутое семейство попарно коммутирующих ортогональных проектов в гильбертовом пространстве; факторизация семейства борелевских множеств по идеалу из множеств меры нуль или первой категории; совокупность всех аннуляторных идеалов полупервичного кольца; совокупность центральных идемпотентов подходящего кольца, например, полного правого кольца частных полупервичного кольца; база К-пространства.

В статье [1], знакомство с которой в дальнейшем предполагается, определяются понятия отделимого Ω-множества A, оценки $[\![\cdot = \cdot]\!]_A : A^2 \to \Omega$, оценки произвольной формулы $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, в которую вместо ее свободных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ подставлены элементы из A (обозначение $[\![\varphi(a_1, a_2, \ldots \ldots, a_n)]\!]$, при этом $[\![\cdot]\!]$ – функция из множества всех таких формул в Ω, и в случае $[\![\varphi]\!] = 1$ говорят, что "φ выполняется с вероятностью 1", или, короче, "φ выполняется"), синглетона.

Легко увидеть эквивалентность понятий пучка на Ω в обычном смысле этого слова и отделимого Ω-множества со свойством пучковости (или полноты):

$$\forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega \quad \forall \{a_\alpha\} \subseteq A \quad (\forall_{\alpha,\beta} \quad (u_\alpha \wedge u_\beta \leqslant [\![a_\alpha = a_\beta]\!]) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists! a \in A \quad ([\![a = a]\!] \leqslant \bigcup_\alpha u_\alpha \wedge \forall_\alpha ([\![a = a_\alpha]\!] \geqslant u_\alpha))$$

(такое a обозначим $\sum_\alpha u_\alpha \cdot a_\alpha$); мы не будем различать эти два понятия. Примеры пучка: нестандартный в смысле А. Робинсона универсум* ([2], стр. 71–72), булевозначный универсум $V^{\mathbf{B}}$ и гейтинговозначный универсум V^Ω, универсум $V^\Omega(\mathcal{F})$ (который отличается от V^Ω только тем, что его первый слой – не пустое множество, как в случае V^Ω, а $\mathcal{F} = \bigcup_{u\in\Omega} \mathcal{F}(u)$, где $\mathcal{F}(\cdot)$ – пучок на Ω) ([3], с. 57–60), конструкция B^X [4, 5], полное правое кольцо частных полупервичного кольца.

Для любого $g \in V^\Omega$ (или $V^\Omega(\mathcal{F})$) $\hat{g}^u$ по определению равно множеству $\{f \in V^\Omega \mid [\![f \in g]\!] = u\}$, факторизованному отношением эквивалентности $[\![f = g]\!] \geqslant u$; соответствующий класс эквивалентности обозначим $[f]_u$. Вместо $\hat{g}^1$ пишут $\hat{g}$. Множество $\hat{g}^u$ автоматически имеет структуру Ω_u-множества, где $\Omega_u = \{v \in \Omega \mid v \leqslant u\}$ – компонента в Ω. А именно, $[\![[f_1]_u = [f_2]_u]\!] = [\![f_1 = f_2]\!] \wedge u$.

Если дан некоторый фильтр в Ω, например, фильтр j всех квазиединиц в Ω, то $\hat{g}^j$ по определению обозначает множество $\{f \in V^\Omega \mid [\![f \in g]\!] \in j\}$. Это множество имеет естественную структуру Ω-множества. Пусть $j_u = \{v \in \Omega \mid v \geqslant u\}$. Оказывается, что $V^\Omega(\mathcal{F})$ также вкладывается в V^Ω; иными словами, произвольное $\mathcal{F}$ можно описать таким элементом $\mathcal{F}'$ из V^Ω, что $\mathcal{F}(1) = \widehat{\mathcal{F}'}$. При этом $\mathcal{F}'$ адекватно отражает свойства $\mathcal{F}(1)$, в частности операции и отношения, имеющиеся в $\mathcal{F}(1)$, задаются как операции и отношения в $\mathcal{F}'$ с вероятностью 1. Смысл такого перехода от $\mathcal{F}(1)$ к $\mathcal{F}'$ в том, что $\mathcal{F}'$, как правило, гораздо более простая структура, чем $\mathcal{F}(1)$ (например, многие свойства, общезначимые в слоях $\mathcal{F}(\cdot)$, выполняются в $\mathcal{F}'$ с вероятностью 1), и свойства $\mathcal{F}'$, выполняющиеся с некоторой вероятностью, переносятся на $\mathcal{F}(1)$.

Отождествим V и $\{\check{x} \mid x \in V\}$ и, в частности, отождествим k из $\mathcal{F}$ и $\check{k}$ из $\check{\mathcal{F}}$. Обозначим $\Pi = \{P\colon \mathcal{F} \to \Omega \mid \forall k,\ k_1 \in \mathcal{F}\ (P(k) \leqslant E(k)) \wedge (P(k) \wedge [\![k = k_1]\!]_{\mathcal{F}} \leqslant P(k_1))\}$. Учитывая предыдущее отождествление, имеем $\Pi \subset V^\Omega$. Обозначим $E(\cdot)\colon \mathcal{F} \to \Omega$ функцию $k \mapsto E(k)$, $E \in \Pi$. Положим $k \mapsto f_k(P) = P(k)$, здесь и далее $k \in \mathcal{F}$ и $P \in \Pi$. Тогда $f_k \in V^\Omega$ для любого k. Это отображение инъективно, и мы будем отождествлять k и f_k. Действительно, обозначим $P_{k_1}(\cdot) = [\![\cdot = k_1]\!]_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F} \to \Omega$, такие $P_{k_1} \in \Pi$. Если бы $k_1 \neq k_2$ и $f_{k_1}(\cdot) \equiv f_{k_2}(\cdot)$, то $P_{k_1}(k_1) = Ek_1$, $P_{k_1}(k_2) = [\![k_1 = k_2]\!]_{\mathcal{F}}$, $Ek_1 = [\![k_1 = k_2]\!]_{\mathcal{F}}$ и аналогично $Ek_2 = [\![k_1 = k_2]\!]_{\mathcal{F}}$, $k_1 = k_2$ и получаем противоречие. Одно из возможных описаний $\mathcal{F}'$ таково: $\mathcal{F}'(f_k) = Ek$, $\mathcal{F}' \in V^\Omega$.

Теорема. *Для любого фиксированного u Ω-множества $\mathcal{F}(u)$ и $\widehat{\mathcal{F}'}^u$ изоморфны**. Если $\{f_u\}$ $\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ – морфизм пучков $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, то $\underline{f}_1\colon \mathcal{F}'_1 \to \mathcal{F}'_2$ – также морфизм с вероятностью 1 и $\hat{f}_u^u = f_u$.*

Для доказательства нужно проверить только сюръективность функции $k \to [f_k]_u$. Для любого f, $[\![f \in \mathcal{F}']\!] = u$, положим $g(k) = f(P_k)$. Такое $g(\cdot)$ – синглетон, т.е. $g(\cdot) = [\![\cdot = k_g]\!]_{\mathcal{F}}$, и $f = f_{k_g}$, т.е. $k_g \mapsto [f]_u$.

Более подробное изложение доказательства, как и всей заметки в целом, депонировано в работе авторов с одноименным названием. Можно уменьшить Π, ограничившись только синглетонами, суженными на $\mathcal{F}(1)$.

Обозначим Ω^{Ω_1} все морфизмы cHa Ω_1 в cHa Ω вида $\Omega_1 \to \Omega$, и обозначим $(\Omega^{\Omega_1})_u$ все квазиморфизмы вида $f\colon \Omega_1 \to \Omega$, для которых $f(E) = u$, где E – единица Ω_1. В $\mathcal{F} = \bigcup_u (\Omega^{\Omega_1})_u$, как и в любом $(\Omega^{\Omega_1})_u$, определим струк-

---

* Который, как показано в [6], с. 45, в точности совпадает с $V^{\mathcal{P}(I)}$ или $\mathcal{P}(I)^X$, где I – какое-то фиксированное множество.

** В частности, выполняется $[\![f_{k_1} \in \mathcal{F}' \wedge f_{k_2} \in \mathcal{F}' \wedge f_{k_1} = f_{k_2}]\!] = [\![k_1 = k_2]\!]_{\mathcal{F}}$.

туру Ω-множества $[\![f=g]\!]_{\mathscr{F}} = \bigwedge_{P\in\Omega_1} (f(P) \leftrightarrow g(P)) \wedge f(E) \wedge g(E)$. Множеству Ω^{Ω_1} соответствует пучок $\mathscr{F}(\cdot)$ на Ω, для которого $(\Omega^{\Omega_1})_u = \mathscr{F}(u)$, $\Omega^{\Omega_1} = \mathscr{F}(1)$. Послойным морфизмом (послойным квазиморфизмом) назовем такой морфизм f: $\Omega_1 \to \Omega$, для которого $(f\circ\pi)(\cdot) \equiv (\cdot)$ (соответственно такой квазиморфизм, для которого $(f\circ\pi)(\cdot) = f(\cdot) \wedge (\cdot))$, где $\pi(\cdot)$ – фиксированный морфизм $\Omega \to \Omega_1$. В дальнейшем $\Omega_1 = \Pi$ и $\pi(v)$ – функция от k, определяемая условием $\pi(v)(k) = E(k) \wedge v$. Семейство таких морфизмов (квазиморфизмов) обозначим $\Omega_s^{\Omega_1}$ (соответственно $(\Omega_s^{\Omega_1})_u$). На них индуцируется Ω-структура из Ω^{Ω_1} и $(\Omega^{\Omega_1})_u$.

Следствие 1. *Для любого фиксированного u Ω-множества $\mathscr{F}(u)$ и $(\Omega_s^{\Pi})_u$ изоморфны.*

Таким образом, любой абстрактный пучок $\mathscr{F}(\cdot)$ на Ω реализуется как пучок специального вида $u \mapsto (\Omega_s^{\Pi})_u$, где $u\in\Omega$. Отметим для сравнения, что любой пучок на $\mathbf{B}$ реализуется как пучок сечений некоторого накрывающего пространства над $S(\mathbf{B})$.

Следствие 2. *Если $\mathscr{F}(\cdot)$ – пучок колец, полей и т.п., то $\mathscr{F}'$ – одноименная алгебраическая система и $\forall k_1, k_2 \in \mathscr{F}(1)$ $(k_1 + k_2 = k_3 \Longleftrightarrow [\![f_{k_1} + f_{k_2} = f_{k_3}]\!] = 1)$. Если $\mathscr{F}(\cdot)$ – пучок модулей над пучком колец $K(\cdot)$, то $\mathscr{F}'$ – модуль над кольцом K' и $k\cdot x = y \Longleftrightarrow [\![f_k\cdot f_x = f_y]\!] = 1$ и аналогично для пучков модульных решеток, тел с абсолютным значением, банаховых пространств или решеток и т.п. Морфизмы таких пучков, так же как и в теореме, превращаются в морфизмы соответствующих объектов в V^{Ω} и по ним восстанавливаются.*

Пусть K – локально-компактное тело. Тогда $\mathbf{B}^K$ – алгебра над K, в которую канонически вкладывается $\mathbf{B}$, а именно: $u \mapsto u\cdot 1 + (u \to 0)\cdot 0$.

Следствие 3. *Произвольный $\mathbf{B}^K$-модуль $\mathscr{X}$ имеет вид $\mathscr{X}'$ для некоторого $\mathscr{X}' \in V^{\mathbf{B}}$, где $[\![\mathscr{X}'$ – модуль над $\tilde{K}]\!] = 1$, тогда и только тогда, когда $\forall \{u_\alpha\}$ – разбиения единицы $\forall \{x_\alpha\} \subseteq \mathscr{X}$ $\exists!\, x\in\mathscr{X}\ \forall_\alpha (u_\alpha\cdot x = u_\alpha\cdot x_\alpha)$. Если f: $\mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$ – модульный оператор, то f: $\mathscr{X}'_1 \to \mathscr{X}'_2$ – модульный оператор и $\hat{f} = f$.*

Доказательство. Напомним, что разбиением единицы называется такое подмножество $\mathbf{B}$, которое дизъюнктно и $\bigvee_\alpha u_\alpha = 1$. Если $\mathscr{X}'$ – модуль над $\tilde{K}$, то в качестве x образуем элемент $\sum_\alpha u_\alpha x_\alpha \in \mathscr{X}'$. Наоборот: определим в $\mathscr{X}$ оценку $[\![x_1 = x_2]\!]_{\mathscr{F}} = \bigvee \{u\in\mathbf{B} \mid u\cdot x_1 = u\cdot x_2\}$, относительно которой $\hat{\mathscr{X}}$ совпадает с $\mathscr{F}(1)$ для подходящего пучка $\mathscr{F}(\cdot)$ на $\mathbf{B}$. По теореме $\mathscr{X} = \hat{\mathscr{F}}'$ и на это $\mathscr{F}'$ по экстенсиональности поднимаются операции с $\mathscr{X}$ и K. Положим $\mathscr{F}' = \mathscr{X}'$. Такое же доказательство проходит для случаев, когда на $\mathscr{X}$ задана $\mathbf{B}^K$-форма, $\mathbf{B}^K$-норма, порядок, определено свойство полноты в метрическом или порядковом смысле. Тогда $\mathscr{X}'$ обладает соответствующими структурой и свойствами и структура в $\mathscr{X}$ определяется по структуре в $\mathscr{X}'$, как в следствии 2.

Назовем формулу сильно хорновской, если кроме обычных ограничений выполняется то, что для каждого из ее кванторов существования $\exists x\varphi(x)$ к ней конъюктивно добавлено $\forall x_1, x_2 (\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

Следствие 4. *Если θ сильно хорновская или если $\Omega\subset\mathrm{Ba}$ и θ хорновская, то $[\![\theta(k_1, k_2, \ldots, k_n)]\!] = 1 \Rightarrow \theta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$, где в посылке кванторы в θ релятивизованы к $\mathscr{F}'$, а в заключении – к $\mathscr{F}(1)$ и операции в $\mathscr{F}(1)$, соответствующие функциональным знакам, переходят в операции в $\mathscr{F}'$ по следствию 2. Если θ не содержит знака отрицания, то импликацию можно заменить на эквивалентность.*

Можно показать, что для достижимого пространства K и пополнения равномерного пространства $\check{K}$ в V^{Ω}, где $\Omega = \mathscr{T}(X)$, которое мы обозначаем $\tilde{K}$, выполняется: Ω-множества $(\widetilde{K})^{\wedge j_0}$ и $(\widetilde{K})^{\wedge j}$ изоморфны соответственно пучку непрерывных функций вида $X \to K$ и его части, состоящей из функций, определенных на открытых плотных множествах. Это представляет интерес в связи со следующим рассуждением, которое для краткости мы приведем для случая формально-аксиоматической теории анализа. Если в ней выводимо θ, то в ее интуиционистском варианте выводим $\neg\neg$-перевод θ, который обозначим θ^+; тогда в интуиционистской теории множеств выводимо θ^+, в которой переменные теории анализа заменены на теоретико-множественные переменные, релятивизованные соответственно к $\check{N}$ и N^N (или $\mathcal{P}(\check{N})$), и $[\![\theta^+]\!] = 1$. Поэтому в случае хорновской θ выполняется $\langle (\check{N})^{\wedge j}, (\widetilde{R})^{\wedge j}\rangle \vDash \theta$ или $\langle C'(X, N), \ C'(X, R)\rangle \vDash \theta$.

В заключение коснемся некоторых приложений нестандартного анализа. Пусть $Я$ – некоторый язык и $Ак$ – произвольное множество формул в этом языке. Если Ω есть сНа, но не сВа, то под выводом в какой-либо теории понимается вывод в интуиционистском исчислении предикатов. Предположим, что теория $\langle Я, \ Ак\rangle$ интерпретируется в теории ZFC. Это означает, что каждому сорту переменных, каждой константе c, каждому функциональному f и предикатному A знаку сопоставляются формулы языка ZF, для которых выводимы в ZFC формулы вида $\exists x (x = t)$, где t – один из следующих термов: $\{x \mid \varphi(x)\}$, $\{x \mid \varphi_c(x)\}$, $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n, y\rangle \mid \varphi_f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)\}$, $\{\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle \mid \varphi_A(x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n)\}$ и выводимо в ZFC, что термы второго типа являются элементами первого терма, термы третьего типа являются функциями вида $\{x \mid \varphi(x)\}^n \to \{x \mid \varphi(x)\}$ и термы четвертого типа являются предикатами вида $\subseteq \{x \mid \varphi(x)\}^n$ и, кроме того, перевод всех формул из $Ак$ выводим в ZFC.

Ради краткости формулировок мы здесь считаем, что имеется только один сорт переменных. Переменные этого сорта "пробегают" множество X, определяемое первым термом, и $X \in V$. Термы второго типа определяют множества $\bar{c} \in X$. Термы третьего типа определяют функции $\bar{f}\colon X^n \to X$, термы четвертого типа определяют предикаты $\bar{A} \subseteq X^n$.

Из свойств V^{Ω} следует, что существуют X', $\bar{c}'$, $\bar{f}'$, $\bar{A}' \in V^{\Omega}$, для которых с вероятностью 1 выполняется: $\bar{c}' \in X'$, $\bar{f}'\colon X'^n \to X'$, $\bar{A}' \subseteq X'^n$. Образуем элементы V вида $\widehat{X'}$, $(\bar{c}')^\wedge$, $(\bar{f}')^\wedge$, $(\bar{A}')^\wedge$, при этом $(\bar{c}')^\wedge \in \widehat{X'}$, $(\bar{f}')^\wedge\colon \widehat{X'^n} \to \widehat{X'}$, $(\bar{A}')^\wedge \subseteq (\widehat{X'})^n$. Пусть φ – любая замкнутая формула в языке $Я$ или φ – формула, полученная из некоторой формулы $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в языке $Я$ подстановкой вместо всех ее свободных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ элементов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ из V, имеющих Δ^1_3-описание в ZFC. Во втором случае обозначим φ формулу, полученную из $\varphi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ заменой множеств $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ их описаниями. Перевод формулы φ на язык ZF будем обозначать также φ.

Пусть φ_1 и φ_2 – интерпретации φ в $\langle X, \ldots, \bar{c}, \ldots, \bar{f}, \ldots, \bar{A}\rangle$ и в $\langle \widehat{X'}, \ldots$ $\ldots, (\bar{c}')^\wedge, \ldots, (\bar{f}')^\wedge, \ldots, (\bar{A}')^\wedge\rangle$ соответственно. Если φ_1 истинна и теория $\langle Я, \ Ак\rangle$ полна, то φ выводима в ZFC. Если эта теория неполна, то непосредственно предположим, что в теории $\langle Я, \ Ак\rangle$ (и, следовательно, в ZFC) выводимо φ. Тогда $[\![\varphi]\!]_\Omega = 1$. Если исходное φ содержало элементы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$, то заменим их описания в φ на соответствующие этим описаниям элементы V^{Ω}. В силу абсолютности Δ^1_3-писаний эти элементы совпадают с $\check{\bar{x}}_1, \check{\bar{x}}_2, \ldots, \check{\bar{x}}_n$, т.е. $[\![\varphi(\check{\bar{x}}_1, \check{\bar{x}}_2, \ldots$ $\ldots, \check{\bar{x}}_n)]\!] = 1$. Если φ сильно хорновская или если φ хорновская и Ω есть сВа, то φ_2 истинна.

Несмотря на очевидность этих замечаний, они являются основой многих применений нестандартного анализа. Например, они позволяют переносить хорновские утверждения о любых конечномерных алгебрах X над локально-компактными полями K с Δ^1_3-определимыми структурными константами на алгебры вида $\mathbf{B}^X$ над $\mathbf{B}^K$. Рассмотрим простейший пример. Пусть X-алгебра всех матриц какого-то фиксированного порядка над C и E – единичная матрица. На ней определены функции $T_1, T_2 \mapsto T_1 \cdot T_2$; $\lambda, T \mapsto \lambda \cdot T$; $T \mapsto T^*$, где $\lambda \in C$, $T, T_1, T_2 \in X$. Она содержит константы

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 0 \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \ddots & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

которые мы обозначим $\bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_n$ соответственно. В X истинна формула

$$\varphi = \forall x_1 \exists x_2, x_3 \exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n((x_2 \cdot x_3 = x_3 \cdot x_2 = E) \wedge (x_2^* = x_3^*) \wedge$$
$$\wedge (x_1 \cdot x_1^* = x_1^* \cdot x_1 \Rightarrow x_2 x_1 x_3 = \lambda_1 \cdot \bar{c}_1 + \ldots \lambda_n \cdot \bar{c}_n)).$$

Следовательно, любая "нормальная" матрица над $\mathbf{B}^C$ диагонализируема в $\mathbf{B}^C$. Таким образом, практически любые утверждения о числовых матрицах переносятся на $\mathbf{B}^X \simeq C'(S, X)$.

Другой пример. Если T: $\mathcal{S}(R^n) \to L(R^n, C)$ и B – лебегова алгебра R^n, то при широких условиях на T (которые легко выписать) T: $(\mathcal{S}(R^n))^{\vee} \to \tilde{C}$ непрерывно и по линейности продолжается до T': $(\mathcal{S}(R^n))^{\sim} = \mathcal{S}(\tilde{R}^n) \to C$ и T' становится обобщенной функцией. Например, тождественный оператор T: $L(R^n) \to$ $\to L(R^n)$ превращается в δ_{id}, где $id \in \tilde{R}$. Таким образом, утверждения, касающиеся обобщенных функций, "автоматически" переносятся на соответствующие операторы.

Результаты заметки, относящиеся к случаю, когда Ω есть сНа, но не сВа, получены первым автором.

Результаты заметки и их доказательства докладывались на алгебраическом семинаре и семинаре по нестандартному анализу в МГПИ им. В.И. Ленина в апреле 1981 г.

Авторы выражают глубокую благодарность А.Г. Драгалину за подробное стимулирующее обсуждение этих результатов.

Московский государственный педагогический
институт им. В.И. Ленина

Горьковский государственный университет
им. Н.И. Лобачевского

Поступило
19 V 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fourman M., Scott D.* – Lecture Notes Math., 1979, № 753, p. 302. 2. *Девис М.* Прикладной нестандартный анализ. М.: Мир, 1980. 3. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973. 4. *Гордон Е.И., Любецкий В.А.* – ДАН, 1981, т. 256, № 5, с. 1037. 5. *Гордон Е.И., Любецкий В.А.* Деп. ВИНИТИ, № 711–80, 1980. 6. *Гордон Е.И., Любецкий В.А.* Деп. ВИНИТИ, № 2640–81, 1981.