УДК 517.11+513.88 МАТЕМАТИКА

В.А. ЛЮБЕЦКИЙ

О НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВОПРОСАХ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

(Представлено академиком А.Н. Колмогоровым 11 XI 1983)

Идея нестандартного анализа, как нам представляется, состоит в том, что для многих "сложных" математических объектов k можно подобрать такие модели M, что k отождествляется с "простым" математическим объектом в M (который, допуская вольность, также обозначают k или, если это может привести к недоразумению, более развернуто f_k). Например, если k – нормальный оператор в гильбертовом пространстве, то с помощью множества значений его спектральной меры можно канонически образовать такую модель M, что $k \in M$ и $M \models$ "k – некоторое комплексное число". Последняя запись понимается обычным образом: пусть $\varphi(k)$ – формула, которая говорит "x – комплексное число"; подставляя в эту формулу вместо переменной x объект k из M, получаем суждение" k – комплексное число"; затем определяется понятие "в M выполняется (=истинно = значимо) суждение $\psi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$", которое записывается $M \models \psi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – любая формула с переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $f_1, f_2, \ldots, f_n \in M$; итак, последняя запись означает: в M выполняется (=значимо) суждение "k – комплексное число".

Обычно математические объекты k рассматриваются как элементы некоторой совокупности X и в связи с определенной структурой в этой совокупности. Например, нормальный оператор k рассматривается как элемент некоторой алгебры операторов X. С учетом этого идею нестандартного анализа можно выразить так: подбирается такая модель M, что для некоторого объекта X' из M ("простого" по сравнению со "сложным" объектом X) выполняется

(1) $\quad \forall k\, ((k \in X) \Leftrightarrow (M \models (k \in X')))$.

И структурные операции, и отношения в X и X' взаимно определяют друг друга:

(2) $\quad (k_1 + k_2 = k_3) \Leftrightarrow (M \models (k_1 + k_2 = k_3))$,

$\quad (k_1 \leqslant k_2) \Leftrightarrow M \models k_1 \leqslant k_2$

и т.д., и, как следствие этого, для широкого класса свойств ψ из $M \models \psi_X(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ вытекает $\psi_X(k_1, k_2, \ldots, k_n)$.

Запись вида $\psi_X(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ означает, что все связанные переменные в формуле $\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пробегают множество X, т.е. имеют вид $\exists x \in X$ и $\forall x \in X$. Такая ситуация позволяет автоматически получать из некоторых свойств структуры X' в модели M те же свойства структуры X. Таким образом, возникают утверждения, которые принято называть теоремами переноса. Окончательно сформулируем эту идею в той конкретной ситуации, которая нас будет интересовать в дальнейшем.

В качестве модели M будем рассматривать так называемые гейтинговозначные модели V^{Ω}, где Ω – любая полная гейтингова алгебра (*cHa*) или любая полная булева алгебра (*cBa*); во втором случае вместо Ω будем писать $\mathbf{B}$; понятие $V^{\mathbf{B}}$ определяется в [1], стр. 67, а понятие V^{Ω} определяется так же, как и $V^{\mathbf{B}}$, если вместо $\mathbf{B}$ употребить Ω. Понятие *cBa* есть частный случай понятия *cHa* и поэтому понятие булевозначного универсума $V^{\mathbf{B}}$ – частный случай понятия гейтинговозначного универсума V^{Ω}. Для V^{Ω}, как и для $V^{\mathbf{B}}$, определяется функция $[\![\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)]\!]$: $\mathrm{ZF}(V^{\Omega}) \mapsto \Omega$, где $\mathrm{ZF}(V^{\Omega})$ – множество всех формул в языке ZF с константами из V^{Ω}, подставленными вместо свободных переменных в эти формулы. Если $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – одна из таких формул, $f_1\, f_2, \ldots, f_n \in V^{\Omega}$, то интуитивный смысл значения этой функции $u = [\![\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)]\!] \in \Omega$ в том, что "с вероятностью u выполняется суждение $\varphi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$". Тогда $M \models \psi(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ мы понимаем как $[\![\psi(f_1, f_2, \ldots, f_n)]\!] = 1$. Положим $\hat{f} = \{ g \in V^{\Omega} \mid [\![g \in f]\!] = 1 \}$, где $f \in V^{\Omega}$, тогда (1) означает, что должно выполняться

(3) $\quad X = \hat{X}', \ X' \in V^{\Omega}.$

Объекты X и X', связанные соотношением (3), будем называть соответственно внешним и внутренним объектами. Автор доказал, что если $X = F(1)$, где $F(\cdot)$ – любой пучок на $cHa\,\Omega$ со значениями, например, в категории множеств, то канонически определяется такой объект X' из V^{Ω}, для которого выполняется соотношение (3); и, главное, структура в X взаимно определяется по структуре в X' по формулам вида (2). Это результат содержится в [2], стр. 13, 14; [3], а в более простом булевом случае – в [4], стр. 25, 38–43. Содержание последней работы повторяется в сборнике работ [5], стр. 101, 117–121. Эта заметка посвящена применению нестандартного анализа в чисто алгебраической ситуации в отличие от топологической ситуации работ [4, 5]. Мы хотим привести алгебраические условия существования внутреннего объекта X', т.е. условия представимости X в виде $X = F(1)$, где $F(\cdot)$ на Ω или B (во втором случае назовем объект X пучковым), и показать, как связан внутренний объект X' с внешним объектом X. В качестве математических структур выберем для определенности кольца и модули.

Везде далее обозначим: K – ассоциативное кольцо с единицей (последнее обстоятельство не существенно), $\mathscr{X}$ – правый модуль над K, B – множество всех центральных идемпотентов кольца K. Множество B относительно операций $e_1 \cdot e_2$ и $1 - e$ в качестве соответственно "пересечения" и "дополнения", очевидно, есть булева алгебра. На B определим предпучок $F(e) = \mathscr{X} \cdot e$, где $e \in B$, и $\rho^{e_2}_{e_1}(x) = xe_1 : \mathscr{X} e_2 \to \mathscr{X} e_1$, $F(1) = \mathscr{X}$. Назовем его **к а н о н и ч е с к и м п р е д п у ч к о м.** В частности, он представляет и K в виде $K = F(1)$, $F(e) = e \cdot K$. Если B – cBa, то кольцо K назовем B-кольцом. Предпучок $F(\cdot)$ на, вообще говоря, неполной гейтинговой алгебре Ω назовем п у ч к о м, если

$$\forall u \in \Omega \ \forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega \ \forall x_\alpha \in F(u_\alpha) \, (u = \bigvee_\alpha u_\alpha \wedge \forall \alpha, \beta (\rho_{u_\alpha \wedge u_\beta}(x_\alpha) =$$
$$= \rho_{u_\alpha \wedge u_\beta}(x_\beta) \Rightarrow \exists ! \, x \in F(u) \forall \alpha (\rho_{u_\alpha}(x_\alpha) = \rho_{u_\alpha}(x)) .$$

Это условие состоит из двух частей: одна из них утверждает существование такого x (полупучковоть), а вторая – его единственность (отделимость).

Легко проверить, что пучок на, вообще говоря, неполной $cHa\,\Omega$ (единственным образом) продолжается на любое ее пополнение $\overline{\Omega}$ (достаточно даже потребовать предыдущее условие только для таких u, $\{u_\alpha\}$, что $u = \bigvee_{\alpha}{}_{\overline{\Omega}} u_\alpha$). Напомним что п о п о л н е н и е м $\overline{\Omega}$ называется любая гейтингова алгебра, в которой Ω плотно. Для B это, например, дедекиндово пополнение B до cBa **B** или топология $\mathscr{T}$ стоуновского пространства булевой алгебры B. Так как от B всегда можно перейти к **B**, то в дальнейшем ограничимся случаем B-колец. Кольцо K или модуль $\mathscr{X}$ назовем п у ч к о в ы м, если канонический предпучок на B является пучком. К в а з и н о р м а л ь н ы м назовем кольцо K, для которого выполняется условие: $\forall k \in K$ $\exists e_0 \in B$ $\forall e \in B$ $(e \cdot k = 0 \Leftrightarrow e \leqslant e_0)$. Н о р м а л ь н ы м назовем кольцо, для которого выполняется $\forall k \in K$ $\exists e \in B$ $(\langle k^* \rangle = e \cdot K)$, где $\langle k \rangle$ – главный идеал, порожденный k, и a^* – правый аннулятор a. Аналогичные определения формулируются и для других структур в роли K.

Т е о р е м а 1. а) *Из квазинормальности и рациональной полноты (РП) или только из инъективности В-кольца вытекает его полупучковость. Из квазинормальности кольца вытекает его отделимость. В частности, полупервичное, РП, строгое кольцо – пучковое кольцо.*

(б) *Если K – пучковое кольцо и $\mathscr{X}$ – инъективный модуль и для любого плотного идеала a в K и любого x из $\mathscr{X}$ выполняется*

(4) $\quad x \cdot a = 0 \Rightarrow x = 0,$

то $\mathscr{X}$ – пучковый модуль.

в) *Канонический предпучок продолжается до пучка на топологии $\mathscr{T}$.*

Используемые в п. а) теоремы 1 определения приводятся в [6].

Следовательно, по замечанию после формулы (3), найдутся K' и $\mathscr{X}'$, которые являются внутренними объектами для K и $\mathscr{X}$ соответственно, и выполняются формулы (2); в случаях а), б) $K, \mathscr{X}$ из V^B, а в случае в) $K, \mathscr{X}$ из $V\mathscr{T}$. Кроме того, $[\![K'$ – кольцо и $\mathscr{X}'$ – правый модуль над $K']\!] = 1$. Определение оценки $[\![\cdot]\!]$ приводится в [2–5].

Если $K = F(1)$ и $F(\cdot)$ – пучок на какой-то *cBa* B, то найдется такая правильная полная булева подалгебра *rcBa* в B, изоморфная **B**, что сужение на нее канонического предпучка на B будет пучком, изоморфным $F(\cdot)$. Таким образом, все **B**-пучки, представляющие K, канонически определяются всевозможными *rcBa* в B.

Итак, фактически изучается кольцо K с помощью правильной полной булевой подалгебры в булевой алгебре идемпотентов. В докладе Е.И. Бейдара и А.В. Михилева на XV Всесоюзной алгебраической ее конференции в Красноярске в июле 1979 г. развивалась такая "пучковая" точка зрения на полное правое кольцо частных $Q(K)$ и содержится несколько глубоких результатов, в частности, о полиномиальных тождествах в $Q(K)$, полученных авторами доклада по существу на основе изучения канонического пучка. Там же содержалось интересное определение ортогонально полного кольца.

Автором доказано, что для любой хорновой формулы φ и любых $k_1, \ldots, k_n$ из K выполняется $[\![\varphi_{K'}]\!] = 1 \Rightarrow \varphi_K$ [2], стр. 19. Поэтому задача проверки φ_K сводится к проверке $[\![\varphi_{K'}]\!] = 1$. На этом основаны следующие утверждения.

Т е о р е м а 2. а) *Выполняется* $\varphi_K \Leftrightarrow ([\![\varphi'_{K'}]\!]_{\mathscr{T}} = 1)$, *где* $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ – *любая из следующих пар свойств: произвольное* $\leftrightarrow$ *неразложимое, нормальное* $\leftrightarrow$ *первичное, бирегулярное* $\leftrightarrow$ *квазипростое, строго регулярное* $\leftrightarrow$ *тело.*

б) *Обозначим* $\mathscr{K} \leftrightarrow \mathscr{K}'$ *классы колец, обладающие соответственно вышеуказанными свойствами.* AE-*хорновы и специальные хорновы теории классов* $\mathscr{K}$ *и* $\mathscr{K}'$ *совпадают.*

в) AE-*хорновы и специальные хорновы теории модулей над строго регулярными кольцами и векторных пространств над телами совпадают.*

Например, условие алгебраической или вещественной замкнутости поля записывается AE-хорновой формулой. С другой стороны, нетрудно проверить, что пучку $C(X, K)$ непрерывных K-значных функций на вполне несвязном компакте X соответствует в $V\mathscr{T}$ как раз поле комплексных (если $K = \mathbf{C}$) или вещественных (если $K = \mathbf{R}$) чисел (или в общем случае K). Отсюда тривиально получаем, что $C(X, K)$ – соответственно алгебраически или вещественно замкнутое поле. Другой пример: теория Галуа для полей хорошо известна, теоремы 2, 3 позволяют переносить ее на соответствующие кольца.

Т е о р е м а 3. а) *Выполняется* $\varphi_K \leftrightarrow [\![\varphi'_{K'}]\!]_B = 1$, *где* $\varphi \leftrightarrow \varphi'$ – *любая из следующих пар свойств (при этом свойство* φ *обеспечивает пучковость* K): *полупервичное, РП, строгое* $\leftrightarrow$ *строго первичное; рационально полное, бирегулярное В-кольцо* $\leftrightarrow$ $\leftrightarrow$ *квазипростое; инъективное, строго регулярное В-кольцо* $\leftrightarrow$ *тело; РП, бэровское В-кольцо* $\leftrightarrow$ *без делителей нуля.*

б) *Обозначим* $\mathscr{K} \leftrightarrow \mathscr{K}'$ *классы колец, обладающие соответственно вышеуказанными свойствами. Хорновы теории классов* $\mathscr{K}$ *и* $\mathscr{K}'$ *совпадают.*

в) *Пусть выполнено условие* (4). *Хорновы теории модулей над инъективными* *строго регулярными B-кольцами и векторных пространств над телами совпадают.*

Условие коммутативности можно добавить одновременно в левые и правые части всех упомянутых эквивалентностей.

Разумеется, в теоремах 2, 3 для модулей можно повторить все те соответствия, которые явно выписаны для колец.

Эти теоремы в булевом случае докладывались автором на VI Всесоюзной конференции по математической логике (Тбилиси, ноябрь 1982 г.) и в общем случае – на VII Международном конгрессе по логике (Зальцбург, июль 1983 г.).

С л е д с т в и е. *Если K – строго регулярное кольцо, то следующие условия эквивалентны: K пучковое и K рациональное полное.*

Формулу в языке теории колец второго порядка назовем Ω- х о р н о в о й, если она сильно хорнова, когда ΩCHa, и хорнова, когда ΩcBa. Один сорт переменных (будем их обозначать K) интерпретируется как пробегающий $K = F(1)$, где $F(\cdot)$ – произвольный пучок на Ω. Переменные второго сорта (будем их обозначать x) пробегают семейство всех пучковых подмножеств K; подмножество $x \subseteq K$ называется п у ч к о в ы м, если $\forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega\ \forall \{k_\alpha\} \subseteq x\ (\bigvee\limits_\alpha u_\alpha = 1 \Rightarrow \sum\limits_\alpha{}_f u_\alpha \cdot k_\alpha \in x)$; запись $\sum\limits_\alpha{}_f u_\alpha \cdot k_\alpha$ обозначает такой элемент k из K, что $\rho_{u_\alpha}(k) = \rho_{u_\alpha}(k_\alpha)\ \forall\alpha$, и эта запись предполагает, что семейства $\{u_\alpha\}$ и $\{k_\alpha\}$ согласованы, т.е. $\forall\alpha, \beta\ (\rho_{u_\alpha \cap u_\beta}(k_\alpha) = \rho_{u_\alpha \wedge u_\beta}(k_\beta))$.

Вторая интерпретация этих переменных, когда они входят в формулу, для которой подсчитывается $[\![\cdot]\!]$, такова: k пробегает K' (канонически образованное по $F(\cdot)$), а x пробегает семейство всех подмножеств K'. Далее используются обозначения из работы [2].

Л е м м а. а) *Если x – пучковое подмножество K, то* $(\underline{x}) = x$;

б) $(\underline{\Pi})\hat{} = \Pi$; в) $[\![\underline{\Pi} = \mathcal{P}(K')]\!] = 1$.

Т е о р е м а 3. *Если $\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n, x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – Ω-хорнова формула, то для любых $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K$ и $x_1, x_2, \ldots, x_m$-пучковых подмножеств K выполняется* $[\![\varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n, \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_m)]\!] \Rightarrow \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_n, x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

С л е д с т в и е. *Если формула φ из теоремы 3 не содержит отрицания и импликации, то в формулировке теоремы выполняется эквивалентность.*

Утверждение теоремы 3 в кратком виде содержалось в работе [2], стр. 19.

Примечание при корректуре. Утверждение а) теоремы 1, б) теоремы 2, а также б) теоремы 3 добавлены автором 15 VI 1984 года.

Московский государственный
педагогический институт
им. В.И. Ленина

Поступило
21 XI 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973. 2. *Любецкий В.А., Гордон Е.И.* Вложение пучков в гейтинговозначный универсум. Деп. ВИНИТИ, № 4782-82, 1982. 3. *Любецкий В.А., Гордон Е.И.* – ДАН, 1983, т. 268, № 4, с. 794. 4. *Гордон Е.И., Любецкий В.А.* Булевы расширения равномерных структур. Деп. ВИНИТИ, № 711-80, 1980. 5. *Любецкий В.А., Гордон Е.И.* В сб.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983, с. 82–153. 6. *Ламбек И.* Кольца и модули. М.: Мир, 1971.