# О РЕЛАКСАЦИОННОМ МНОГОГРАННИКЕ ДЛЯ КВАДРАТИЧНОГО БУЛЕВА ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.В. Селиверстов

Согласно [1], те $\{0,1\}$-точки, где квадратичный многочлен от $n$ переменных достигает минимума, соответствуют вершинам многогранника $\mathrm{BQP}_n$ в $\mathrm{R}^n \oplus \mathrm{R}^N$, где $N = \frac{n(n-1)}{2}$. Релаксационный многогранник $\mathrm{L}_n$ задан системой $(2n^2 - 2n)$ неравенств

$$\begin{array}{rcl} x_i + x_j - x_{ij} & \leq & 1 \\ -x_i + x_{ij} & \leq & 0 \\ -x_j + x_{ij} & \leq & 0 \\ -x_{ij} & \leq & 0 \end{array}$$

где $x_i$ — координаты $\mathrm{R}^n$, $x_{ij}$ при $i < j$ — координаты $\mathrm{R}^N$. Координаты вершин многогранника $\mathrm{L}_n$ принадлежат множеству $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, а вершины многогранника $\mathrm{BQP}_n$ — это все целые вершины многогранника $\mathrm{L}_n$. Число целых вершин у $\mathrm{L}_n$ равно $2^n$. Общее число $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-точек в многограннике $\mathrm{L}_n$ равно

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} 2^{n-k+\frac{k(k-1)}{2}}$$

Из них $2^{n-1}(2^n - 1)$ точек являются серединами отрезков, соединяющих целые вершины, следовательно, не являются вершинами $\mathrm{L}_n$. Вычисления программой lrs 4.2c (http://cgm.cs.mcgill.ca) показали, что при $n < 7$ остальные $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$-точки в $\mathrm{L}_n$ являются его вершинами, а при $n < 8$ число рёбер в $\mathrm{L}_n$ при целой вершине $\mathbf{0}$ равно числу связных подграфов полного графа $\mathrm{K}_n$ с $n$ вершинами [2]. Отметим, что группа симметрий $n$-мерного куба вкладывается в группу автоморфизмов решётки граней $\mathrm{L}_n$ и транзитивно действует на множестве целых вершин $\mathrm{L}_n$. Рёбра, соединяющие целые и нецелые вершины, дают информацию о фасетах $\mathrm{BQP}_n$.

**Утверждение 1.** Существует взаимно однозначное соответствие между связными подграфами полного графа $\mathrm{K}_n$ и рёбрами многогранника $\mathrm{L}_n$, содержащими начало координат $\mathbf{0}$.

**Утверждение 2.** Даны три попарно различные $\{0, \frac{1}{2}\}$-точки $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}''$ многогранника $\mathrm{L}_n$. Если вершина $\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$, то $\mathbf{v}$ не смежна с $\mathbf{0}$.

**Утверждение 3.** Любые две целые вершины многогранника $\mathrm{L}_n$ смежны.

Работа частично поддержана грантом Минобрнауки России 8481 от 07.09.2012.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. — 1989. — V. 45, № 1–3. — P. 139–172.

2. Divianszky P. Sequence A167939 in The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. 2009. Published electronically at http://oeis.org

Селиверстов Александр Владиславович,
Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, Москва,
e-mail: slvstv@iitp.ru