УДК 514.1 DOI: 10.12737/25118

А.В. Селиверстов
Канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник,
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича Российской академии наук,
Россия, 127051, г. Москва, Большой Каретный переулок,
д. 19, стр. 1

О поиске особых точек алгебраической кривой

Аннотация. В статье рассмотрены новые и уже известные методы для обнаружения особых точек на плоской кривой и подтверждения гладкости этой кривой. Наш подход основан на построении касательных прямых к данной кривой, проходящих через выделенные точки вне кривой. В особой точке кривой пересекается много таких прямых, что позволяет быстро определить особую точку на выпуклой кривой. В общем случае число вещественных касательных зависит от выделенной точки на плоскости. Однако существование хотя бы одной особой точки у алгебраической кривой накладывает ограничение на алгебраическое уравнение, определяющее совокупность касательных, проходящих через выделенную точку плоскости. Так проверка гладкости плоской алгебраической кривой сводится к проверке несовместности системы линейных уравнений.

С другой стороны, эти касательные можно строить графически. Так построение вещественных касательных позволяет доказать отсутствие не только вещественных, но и комплексных особых точек на проективной кривой, которые в любом случае не принадлежали бы вещественной плоскости. Это показывает эффективность графических методов для решения задач комплексной геометрии.

Метод допускает непосредственное обобщение на многомерный случай, важный для решения комбинаторных задач. В этом случае надо рассматривать не отдельные касательные прямые, а конусы с вершинами в различных точках пространства. Поиск особых точек важен и для решения задач машинного зрения, в том числе для обнаружения угла у препятствия по последовательности кадров с одной камеры на движущемся транспортном средстве.

Ключевые слова: плоская кривая, особая точка, касательная, выпуклая область, распознавание образов, машинное зрение.

A.V. Seliverstov
Ph.D. of Physics and Mathematics, Leading Researcher
Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute)
19 Build.1, Bolshoy Karetny Pereulok, Moscow, 127051, Russia

On Search For Singular Points of Algebraic Curve

Abstract. New as well as already known methods for detection of singular points on a plane curve and for this curve's smoothness confirmation have been considered in the present paper. Our approach based on the plotting of tangent straight lines to the curve, which pass through distinguished points out of the curve. At the singular point of the curve many such lines intersect each other, because of this it is possible quickly identify the singular point on the convex curve. In general, the number of real tangent lines depends on the distinguished point on the plane. However, the existence of at least one singular point in the algebraic curve imposes a restriction on the algebraic equation determining the set of tangent lines passing through the distinguished point of the plane. So a plane algebraic curve's smoothness checking reduces to checking the incompatibility of a linear equation system.

On the other hand, it's possible to generate the tangent lines graphically. So generation of real tangent lines allows prove the absence of not only real but also complex singular points on the projective curve, which in any case would not belonged to the real plane. This demonstrates the effectiveness of graphical methods for complex geometry's tasks solution.

The method allows the direct generalization to the multidimensional case, which is important for combinatorial problems solution. In the case, it is necessary to consider not separate tangent lines, but cones with vertices at different points in space. Search for singular points is also important for solution the problems of machine vision, including detection of an obstacle's corner by means of the frame sequence obtained with one camera on a moving vehicle.

Keywords: plane curve, singular point, tangent line, convex domain, pattern recognition, machine vision.

Введение

Если плоская кривая C задана известным алгебраическим уравнением, то поиск особой точки сводится к решению системы алгебраических уравнений от двух переменных. Исключение одной переменной сводит решение этой системы к поиску корней многочлена от одной переменной. Для аппроксимации корней известны эффективные алгоритмы [14]. Исключение одной из двух переменных легко выполняется алгоритмами, основанными на вычислении базиса Гребнера [25] и реализованными во многих пакетах программ для символьных вычислений [13], например, можно использовать облачный сервис *MathPartner* [10]. Также известны другие методы, обзор которых сделан в работе [27].

Однако во многих прикладных задачах уравнение кривой изначально неизвестно, но доступны некоторые данные о касательных к этой кривой. В этом случае для поиска особых точек чисто алгебраическими методами приходится решать систему уравнений от большого числа неизвестных, а вычислительная сложность увеличивается. Это объясняет интерес к созданию новых методов поиска особых точек или проверки гладкости, при которых геометрические построения позволяют более эффективно использовать методы компьютерной алгебры. Автор надеется, что его работа послужит не для противопоставления, но для сочетания различных методов друг с другом. В работе обсуждается графический метод, основанный на идее Юлиуса Плюккера, но полезный для иллюстрации рассматриваемых задач и развития интуиции при обобщении на многомерный случай. Поиск особых точек связан с задачами машинного зрения в случае, когда необходимо сопоставлять изображения, полученные с разных ракурсов [28].

Предварительные сведения

Во многих случаях важно рассматривать вещественную проективную плоскость [19; 22]. Она гомеоморфна поверхности, получающейся при склеивании круга и листа Мебиуса по краю; при погружении проективной плоскости в трехмерное аффинное пространство неизбежно самопересечение поверхности. Другая модель получается отождествлением антиподальных точек на двумерной сфере. Соединяющий антиподальные точки путь на сфере соответствует неориентируемой замкнутой проективной кривой, которая не служит границей. Точка проективной плоскости служит образом прямой в трехмерном аффинном пространстве при центральной проекции. Поэтому солнечные часы служат наглядным пособием по проективной геометрии [15]. С другой стороны, проективная плоскость получается присоединением к аффинной плоскости бесконечно удаленной проективной прямой. В свою очередь, проективная прямая получается присоединением к аффинной прямой одной бесконечно удаленной точки.

Сечения аффинного конуса в трехмерном пространстве плоскостями, не проходящими через вершину конуса, являются аффинными кривыми, проективные замыкания которых эквивалентны. Гладкая проективная кубическая кривая, определенная над полем вещественных чисел, содержит три вещественные точки перегиба, лежащие на одной прямой [16, с. 31]. Другие шесть комплексных точек перегиба не принадлежат вещественной плоскости, хотя несут информацию о кривой [1]. Исследования кривых упрощаются, если многочлен f приведен к специальному виду. Например, линейная замена переменных приводит кубическую форму к виду без мономов от двух переменных, т.е. ко второй нормальной форме [21].

Дискриминант многочлена степени d от одной переменной пропорционален квадрату произведения разностей корней этого многочлена над полем комплексных чисел. Дискриминант сам является однородным многочленом с целыми коэффициентами от всех коэффициентов исходного многочлена. Многочлен степени d над полем комплексных чисел имеет ровно d корней с учетом кратности. Дискриминант равен нулю, если некоторый корень кратный. Явное выражение дискриминанта общего многочлена от одной переменной высокой степени весьма громоздкое, но сводится к вычислению определителя матрицы порядка $O(d)$.

Случай выпуклой кривой

Для начала рассмотрим простую задачу машинного зрения. Дана плоская кривая C, ограничивающая выпуклую область S. Кривая может быть гладкой или иметь особую точку (излом). Пусть на плоскости выделено некоторое направление. Рассмотрим некоторую точку U, не принадлежащую S. Измерением в точке U называется прямая, проходящая через точку U и ровно одну точку на кривой C. Если кривая гладкая, то эта прямая — касательная к кривой. Выпуклость гарантирует существование ровно двух касательных прямых; если точка U лежит на кривой C, эти касательные совпадают. Одно измерение определяется точкой U и углом (азимутом), отсчет которого ведется от выделенного направления. Задача состоит в поиске особой точки или доказательстве гладкости кривой C посредством минимального числа измерений. Выпуклое множество на плоскости не определяется своими ортогональными проекциями на прямые, которые соответствуют измерениям из бесконечно удаленной точки, поскольку существуют различные фигуры постоянной ширины, например, круг и треугольник Рёло (*Reuleaux triangle*) [26].

Менее формально эта задача состоит в том, чтобы, обходя вокруг выпуклой колонны (высокого препятствия), проверить гладкость или определить положение угла, если он существует. Близкая задача о маршрутизации с препятствиями рассмотрена в работе [6]. В этом случае оптимальный маршрут содержит отрезки прямых, которые касаются препятствий или проходят через их особые точки. При этом мы не используем расстояния; все необходимые измерения могут быть вычислены по последовательности кадров, сделанных в известные моменты времени одной камерой, движущейся равномерно и прямолинейно, как описано в работе [5]. Более того, здесь не используется расположение посторонних объектов (текстурированность сцены).

Решение основано на том, что если кривая C гладкая, то при последовательных измерениях никакие три касательные прямые не пересекаются в одной точке. Напротив, в особой точке кривой пересекается бесконечно много таких прямых, соответствующих удачно выбранным точкам U, в которых проводятся измерения.

При двух измерениях из одной точки мы не обязательно проведем хотя бы одну прямую через особую точку кривой C. Если угол между близкими касательными к кривой в окрестности особой точки равен $1/r$ доле развернутого угла, то требуется не меньше r пар измерений, чтобы при одном из них провести нужную прямую. С другой стороны, достаточно выполнить $3r$ пар измерений из точек, равномерно расположенных на окружности большого радиуса с центром внутри области S, чтобы определить все такие особые точки. Величина r дает численное описание отличия кривой от гладкой. Чем больше величина r, тем меньше отличие. Таким образом, выполняя адаптивную последовательность измерений из разных точек, можно быстро аппроксимировать величину r.

Задача становится более сложной, если отбросить условие выпуклости, но предполагать возможность построения касательных прямых к любой точке кривой C. При этом касательная может трансверсально пересекать кривую в другой точке или касаться кривой в нескольких точках. В этом случае в одной точке может пересекаться много касательных к гладкой кривой, а число вещественных касательных прямых, проходящих через данную точку плоскости, может зависеть от выбора этой точки. Близкая задача возникает в рентгеновской томографии [17].

Случай алгебраической кривой

Рассмотрим плоскую кривую, которая может быть задана алгебраическим уравнением $f = 0$ степени d, причем эту кривую нельзя задать уравнением меньшей степени. Согласно формуле Плюккера, если кривая C гладкая, то через точку U, которая не принадлежит кривой C, проходит не более $m = d(d-1)$ касательных прямых. Число вещественных касательных может быть меньше, поскольку некоторые из них определены лишь над полем комплексных чисел. Похожие примеры обсуждаются в работах [1–3; 7; 11]. Если прямая, проходящая через точку U, касается кривой в точке перегиба, то хотя бы две касательные прямые, проходящие через точку U, совпадают друг с другом. То есть при неудачном выборе точки U точку перегиба трудно отличить от особой точки. Если кривая особая, то число различных касательных строго меньше числа m. Совокупность касательных прямых, проходящих через точку U, определяется приводимым многочленом от двух переменных степени m.

Аффинная прямая, проходящая через начало координат, может быть задана параметрически как множество точек с абсциссой xt и ординатой yt, где t — это координата на прямой. Ограничение на эту прямую многочлена f является многочленом $r(t)$ от одной переменной степени не выше d. Обозначим через $D[f]$ дискриминант многочлена $r(t)$. При этом если степень многочлена $r(t)$ меньше d, то дискриминант вычисляется по формуле для многочленов степени d; формально многочлен $r(t)$ можно считать многочленом степени d с нулевыми коэффициентами при старших мономах. Многочлен $D[f]$ зависит от переменных x и y степени m. Если прямая касается проективного замыкания кривой или проходит через ее особую точку, то многочлен $r(t)$ имеет нулевой дискриминант. Если начало координат не является особой точкой кривой, то множество касательных прямых, проходящих через начало координат, определяется одним уравнением $D[f](x, y) = 0$.

Отметим, что $D[f]$ — это однородный многочлен от переменных x и y; если на некоторой прямой, проходящей через начало координат,он обращается в нуль при некотором ненулевом значении координаты t, то это же верно для всех значений координаты t, т.е. в каждой точке этой прямой. Если начало координат — это особая точка на кривой, то многочлен $D[f]$ тождественно равен нулю. Аналогично определяется уравнение совокупности касательных, проходящих через произвольную точку U.

Если кривая особая, то этот многочлен делится на квадрат некоторого многочлена, что наглядно соответствует совпадению двух или большего числа касательных. В каждой особой точке этот многочлен равен нулю. Следовательно, если кривая особая, то совокупность многочленов для разных точек U порождает собственное линейное подпространство в пространстве всех многочленов от двух переменных степени не выше m. В силу двойственности это эквивалентно разрешимости некоторой системы линейных уравнений. Так получено необходимое условие гладкости кривой, основанное на анализе неявно заданных касательных (всех, а не только вещественных), проходящих через выделенные точки общего положения. Число таких точек должно быть не меньше размерности пространства многочленов. Подчеркнем, что рассматриваемый метод позволяет доказывать отсутствие не только вещественных, но и комплексных особых точек на проективном замыкании кривой.

С другой стороны, если известна только степень d многочлена f, но через некоторую точку плоскости, не лежащую на кривой, проходит $m(d)$ попарно различных вещественных касательных к кривой, то кривая гладкая. Эти касательные можно строить графически, не зная коэффициенты многочлена f. Так построением только вещественных касательных можно доказать отсутствие комплексных особых точек на проективном замыкании кривой, которые в любом случае не принадлежали бы вещественной плоскости. Это иллюстрирует эффективность графических методов для решения задач комплексной геометрии.

Более того, вещественная проективная кривая может проходить через бесконечно удаленные точки, тогда как для доказательства гладкости достаточно рассмотреть касательные в аффинном пространстве. Так, для доказательства гладкости проективного замыкания параболы достаточно указать две касательные, пересекающиеся в точке, не принадлежащей параболе. Такие касательные легко провести через точку, лежащую вне области проективной плоскости, ограниченной параболой. Напротив, невозможно построить шесть касательных к кубической параболе, которые пересекаются в одной точке, не принадлежащей параболе. Причина в том, что проективное замыкание этой кривой не гладкое, а имеет особую точку на пересечении с бесконечно удаленной прямой. Эта кривая проективно эквивалентна полукубической параболе, у которой особая точка (или точка возврата) расположена в начале координат.

Если проективное замыкание гладкой кубической кривой связное, то шесть попарно различных касательных можно провести через любую точку внутри треугольника, образованного касательными к кривой в трех вещественных точках перегиба, причем стороны этого треугольника не пересекают кривую. Среди касательных, проходящих через точку, принадлежащую стороне этого треугольника, найдутся две совпадающие. А среди касательных, проходящих через вершину этого треугольника, найдутся две пары совпадающих. Отметим, что на аффинной плоскости получится обычный треугольник в случае, когда три точки перегиба принадлежат бесконечно удаленной прямой. Иначе он может быть разделен бесконечно удаленной прямой.

Шесть попарно различных касательных, пересекающихся в одной точке вне кривой, можно построить и для гладкой кубической кривой, проективное замыкание которой состоит из двух компонент связности. При этом две точки касания лежат на ориентируемой компоненте кривой, четыре — на ее неориентируемой компоненте.

Обсуждение графического и алгебраического методов

Суть обсуждаемого графического метода состоит в определении степени двойственной кривой. Напомним, что касательная прямая соответствует точке двойственной кривой, а касательные, пересекающиеся в одной точке, — точкам пересечения прямой и двойственной кривой.

Использование уравнений, определяющих совокупность всех касательных, проходящих через выделенную точку, позволяет избежать вычислительных трудностей, возникающих при переходе к двойственной кривой. Если многочлен f известен заранее, то обсуждаемый метод позволяет проверить гладкость плоской кривой $f = 0$ без явного построения касательных. В частности, некоторые касательные прямые могут быть комплексными. С другой стороны, известны эффективные алгоритмы разложения многочленов от нескольких переменных на множители [9], что позволяет найти уравнения касательных прямых, например, используя облачный сервис *MathPartner* [10; 13].

Очевидно, из-за погрешностей вычислений трудно отличить особую точку от гладкой точки с высокой кривизной. Однако во многих задачах это несущественно, наоборот, эти точки нужно рассматривать как особые.

Правильный выбор точек, через которые проводятся касательные, — это нетривиальная задача. Известно лишь число точек *в общем положении*, которые достаточны для проверки гладкости. Однако при неудачном выборе этих точек многочлены могут быть линейно зависимыми даже для гладкой кривой. Это очевидно, если точки совпадают. Требование общности положения упрощает вычисления и в других задачах [24; 27]. Естественным подходом к решению проблемы служит случайный выбор точек на плоскости. При этом возможна параллельная обработка данных на многопроцессорном вычислительном устройстве [18].

При некотором выборе точки U вещественных касательных к кривой, проходящих через U, может не быть. Например, так будет, если кривая — это эллипс, а точка U выбрана внутри него. Однако в общем случае это не означает отсутствия комплексных особых точек. Близкое явление возникает при построении огибающей семейства кривых [2].

Предложенный метод легко обобщается на случай поверхности в трехмерном пространстве. Однако в этом случае уравнение определяет конус с вершиной в точке U. Каждый такой конус содержит все особые точки поверхности. Если поверхность гладкая, то пересечение всех таких конусов пустое. Важно, что все эти конусы определяются многочленами, степень которых зависит только от степени исходной поверхности. Многие комбинаторные задачи сводятся к поиску особой точки на кубической гиперповерхности [12; 29], что объясняет интерес к многомерному обобщению методов проверки гладкости. С другой стороны, графические методы широко применяются для исследования поверхностей. Например, в работе [4] предложен графический метод для аппроксимации геодезической на линейчатой поверхности. Графические методы применяются также для решения других задач о поверхностях [23], включая задачи квадратичного программирования [20]. Представляет интерес и случай более высоких размерностей [8; 24].

Заключение

Во-первых, рассмотрено эффективно проверяемое графически достаточное условие гладкости плоской кривой, подразумевающей отсутствие комплексных особых точек в проективном замыкании. Для алгебраической кривой степени d достаточно указать $m(d)$ попарно различных касательных, пересекающихся в одной точке, не лежащей на кривой.

Во-вторых, для плоской алгебраической кривой, заданной уравнением, найдено эффективно проверяемое достаточное условие гладкости. Это условие состоит в несовместности системы линейных уравнений, определяемых по набору точек плоскости в общем положении, число которых определяется степенью кривой. Метод допускает непосредственное обобщение на многомерный случай с тем отличием, что надо рассматривать не отдельные касательные прямые, а конусы с вершинами в различных точках пространства.

Литература

1. *Гирш А.Г.* Мнимости в геометрии [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2014. — Т. 2. — № 2. — С. 3–8. — DOI: 10.12737/5583.
2. *Гирш А.Г.* Огибающая семейства линий [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 4. — С. 14–18. — DOI: 10.12737/22839.
3. *Гирш А.Г.* Фокусы алгебраических кривых [Текст] / А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 3. — С. 4–17. — DOI: 10.12737/14415.
4. *Джанабаев Ж.Ж.* Об алгоритме графического построения геодезической линии на линейчатой поверхности [Текст] / Ж.Ж. Джанабаев, Н.С. Умбетов // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 4. — С. 15–18. — DOI: 10.12737/17346.
5. *Ершов Е.И.* Алгоритмы стереозрения на основе параллакса движения монокулярной камеры бокового обзора [Текст] / Е.И. Ершов, В.Н. Карнаухов, М.Г. Мозеров // Информационные процессы. — 2015. — Т. 15. — № 4. — С. 414–427.
6. *Заева К.А.* Метод маршрутизации с препятствиями на основе параллельных вычислений [Текст] / К.А. Заева, А.Б. Семенов // Вестник Тверского государственного университета. Серия «Прикладная математика». — 2016. — № 3. — С. 85–95.
7. *Иванов Г.С.* О задачах начертательной геометрии с мнимыми решениями [Текст] / Г.С. Иванов, И.М. Дмитриева // Геометрия и графика. — 2015. — Т. 3. — № 2. — С. 3–8. — DOI: 10.12737/12163.
8. *Иванов Г.С.* Принцип двойственности — теоретическая база взаимосвязи синтетических и аналитических способов решения геометрических задач [Текст] / Г.С. Иванов, И.М. Дмитриева // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 3. — С. 3–10. — DOI: 10.12737/21528.
9. *Ивашов Д.С.* Об алгоритме факторизации полиномов многих переменных [Текст] / Д.С. Ивашов // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. — 2012. — Т. 17. — № 2. — С. 591–597.
10. *Ильченко Е.А.* Инструменты математического сервиса MathPartner для выполнения параллельных вычислений на кластере [Текст] / Е.А. Ильченко // Труды Института системного программирования РАН. — 2016. — Т. 28 — № 3. — С. 173–188. — DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(3)-11.
11. *Короткий В.А.* Графические алгоритмы реконструкции кривой второго порядка, заданной мнимыми элементами [Текст] / В.А. Короткий, А.Г. Гирш // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 4. — С. 19–30. — DOI: 10.12737/22840.
12. *Латкин И.В.* Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел [Текст] / И.В. Латкин, А.В. Селиверстов // Вестник Карагандинского университета. Серия «Математика». — 2015. — № 1. — С. 47–55.
13. *Малашонок Г.И.* Новое поколение систем символьных вычислений [Текст] / Г.И. Малашонок // Вестник Тамбовского университета. Серия «Естественные и технические науки». — 2016. — Т. 21. — № 6. — С. 2026–2041. — DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2026-2041.
14. *Мёллер Х.* Алгоритм Лагерра сумм степеней для эффективной и надежной аппроксимации всех корней многочлена [Текст] / Х. Мёллер // Проблемы передачи информации. — 2015. — Т. 51. — № 4. — С. 47–59.
15. *Милосердов Е.П.* Расчет параметров конструкции и разработка алгоритмов реализации аналемматических солнечных часов [Текст] / Е.П. Милосердов, М.А. Глебов // Геометрия и графика. — 2014. — Т. 2. — № 3. — С. 14–16. — DOI: 10.12737/6520.
16. *Прасолов В.В.* Эллиптические функции и алгебраические уравнения [Текст] / В.В. Прасолов, Ю.П. Соловьев. — М.: Факториал, 1997.
17. *Прун В.Е.* Вычислительно эффективный вариант алгебраического метода компьютерной томографии [Текст] / В.Е. Прун [и др.] // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 10. — С. 86–97.
18. *Рубанов Л.И.* Параллельное моделирование Монте-Карло на системах с распределённой памятью [Текст] / Л.И. Рубанов // International Journal of Open Information Technologies. — 2014. — Т. 2. — № 2. — С. 12–20.
19. *Рубанов Л.И.* Проективно-инвариантное описание излучины реки [Текст] / Л.И. Рубанов, А.В. Селиверстов //

Информационные процессы. — 2016. — Т. 16. — № 3. — С. 281–290.

20. *Сальков Н.А.* Графо-аналитическое решение некоторых частных задач квадратичного программирования [Текст] / Н.А. Сальков // Геометрия и графика. — 2014. — Т. 2. — № 1. — С. 3–8. — DOI: 10.12737/3842
21. *Селиверстов А.В.* Кубические формы без мономов от двух переменных [Текст] / А.В. Селиверстов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — 2015. — Т. 25. — № 1. — С. 71–77.
22. *Селиверстов А.В.* О симметрии проективных кривых [Текст] / А.В. Селиверстов // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2016. — № 3. — С. 59–66.
23. *Хейфец А.Л.* Сравнение методов начертательной геометрии и 3D-компьютерного геометрического моделирования по точности, сложности и эффективности [Текст] / А.Л. Хейфец // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Строительство и архитектура». — 2015. — Т. 15. — № 4. — С. 49–63. — DOI: 10.14529/build150408.
24. *Юрков В.Ю.* Формальное представление условий инцидентности в многомерных проективных пространствах [Текст] / В.Ю. Юрков // Геометрия и графика. — 2016. — Т. 4. — № 4. — С. 3–13. — DOI: 10.12737/22838.
25. *Eder C.* A survey on signature-based algorithms for computing Gröbner bases [Текст] / C. Eder, J.-C. Faugère // Journal of Symbolic Computation. 2017. V. 80. № 3. P. 719–784. — DOI: 10.1016/j.jsc.2016.07.031.
26. *Harrell E.M.* A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue [Текст] / E.M. Harrell // The Journal of Geometric Analysis. 2002. V. 12. No. 1. P. 81–88. DOI: 10.1007/BF02930861.
27. *Herrero M.I.* Affine solution sets of sparse polynomial systems [Текст] / M.I. Herrero, G. Jeronimo, J. Sabia // Journal of Symbolic Computation. 2013. V. 51. P. 34–54. DOI: 10.1016/j.jsc.2012.03.006.
28. *Mishkin D.* MODS: Fast and robust method for two-view matching [Текст] / D. Mishkin, J. Matas, M. Perdoch // Computer Vision and Image Understanding. 2015. V. 141. P. 81–93. DOI: 10.1016/j.cviu.2015.08.005.
29. *Seliverstov A.V.* On cubic hypersurfaces with involutions [Текст] / A.V. Seliverstov // International Conference Polynomial Computer Algebra'2016, Russian Academy of Sciences, St.Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, Euler International Mathematical Institute / Ed. by N.N. Vassiliev. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2016. — С. 74–77. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=26437524/

References

1. Girsh A.G. Mnimosti v geometrii [Ostensibilities in geometry]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2014, v. 2, i. 2, pp. 3–8 (in Russian). DOI: 10.12737/5583.
2. Girsh A.G. Ogibayushchaya semeystva liniy [Envelope of a family of curves]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016, v. 4, i. 4, pp. 14–18 (in Russian). DOI: 10.12737/22839.
3. Girsh A.G. Fokusy algebraicheskikh krivykh [Foci of algebraic curves]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2015, v. 3, i. 3, pp. 4–17 (in Russian). DOI: 10.12737/14415.
4. Dzhanabaev Z.Z., Umbetov N.S. Ob algoritme graficheskogo postroeniya geodezicheskoy linii na lineychatoy poverkhnosti [On algorithms of graphical plotting of geodesic line on a ruled surface]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2015, v. 3, i. 4, pp. 15–18 (in Russian). DOI: 10.12737/17346.
5. Ershov E.I., Karnaukhov V.N., Mozerov M.G. Algoritmy stereozreniya na osnove parallaksa dvizheniya monokulyarnoy kamery bokovogo obzora [Stereovision algorithms applicability investigation for motion parallax of monocular camera case]. *Informatsionnye protsessy* [Iformation Process]. 2016, v. 61, i. 6, pp. 695–704. DOI: 10.1134/S1064226916060073.
6. Zaeva K.A., Semenov A.B. Metod marshrutizatsii s prepyatstviyami na osnove parallel'nykh vychisleniy [Method of routing with obstacles based on parallel computing]. *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya Matematika* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]. 2016, i. 3, pp. 85–95 (in Russian).
7. Ivanov G.S., Dmitrieva I.M. O zadachakh nachertatel'noy geometrii s mnimymi resheniyami [About the tasks of descriptive geometry with imaginary solutions]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2015, v. 3, i. 2, pp. 3–8 (in Russian). DOI: 10.12737/12163.
8. Ivanov G.S., Dmitrieva I.M. Printsip dvoystvennosti — teoreticheskaya baza vzaimosvyazi sinteticheskikh i analiticheskikh sposobov resheniya geometricheskikh zadach [The duality principle is the theoretical basis of interrelation of synthetic and analytical methods of solving geometric problems]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016, v. 4, i. 3, pp. 3–10 (in Russian). DOI: 10.12737/21528.
9. Ivashov D.S. Ob algoritme faktorizatsii polinomov mnogikh peremennykh [An algorithm of factorization of multivariate polynomials]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences]. 2012, v. 17, i. 2, pp. 591–597 (in Russian).
10. Ilchenko E.A. Instrumenty matematicheskogo servisa MathPartner dlya vypolneniya parallel'nykh vychisleniy na klastere [Tools of mathematical service MathPartner for parallel computations on a cluster]. *Trudy ISP RAN* [Proc. ISP RAS]. 2016, vol. 28, no. 3, pp. 173–188 (in Russian). DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28(3)-11.
11. Korotkiy V.A., Girsh A.G. Graficheskie algoritmy rekonstruktsii krivoy vtorogo poryadka, zadannoy mnimymi elementami [Graphic reconstruction algorithms of the second-order curve, given by the imaginary elements]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016, v. 4, i. 4, pp. 19–30 (in Russian). DOI: 10.12737/22840.

12. Latkin I.V., Seliverstov A.V. Vychislitel'naya slozhnost' fragmentov teorii polya kompleksnykh chisel [Computational complexity of fragments of the theory of complex numbers]. *Vestnik Karagandinskogo universiteta. Ser. Matematika* [Bulletin of University of Karaganda. Ser. Mathematics]. 2015, i. 1, pp. 47–55 (in Russian).
13. Malaschonok G.I. Novoe pokolenie sistem simvol'nykh vychisleniy [New generation of symbolic computation systems]. *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki* [Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences]. 2016, v. 21, i. 6, pp. 2026–2041 (in Russian). DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2026-2041
14. Möller H. Algoritm Lagerra summ stepeney dlya effektivnoy i nadezhnoy approksimatsii vsekh korney mnogochlena [The Laguerre-and-sums-of-powers algorithm for the efficient and reliable approximation of all polynomial roots]. *Problemy peredachi informatsii* [Problems of Information Transmission]. 2015, v. 51, i. 4, pp. 361–370. DOI: 10.1134/S0032946015040055
15. Miloserdov E.P., Glebov M.A. Raschet parametrov konstruktsii i razrabotka algoritmov realizatsii analemmaticheskikh solnechnykh chasov [Calculation of construction parameters and algorithm design of analemmatic sundial]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2014, v. 2, i. 3, pp. 14–16 (in Russian). DOI: 10.12737/6520
16. Prasolov V.V., Solovyev Yu.P. Ellipticheskie funktsii i algebraicheskie uravneniya [Elliptic Functions and Elliptic Integrals]. Moscow, Faktorial Publ., 1997.
17. Prun V.E., Buzmakov A.V., Nikolaev D.P., Chukalina M.V., Asadchikov V.E. Vychislitel'no effektivnyy variant algebraicheskogo metoda komp'yuternoy tomografii [A computationally efficient version of the algebraic method for computer tomography]. *Avtomatika i telemekhanika* [Automation and Remote Control]. 2013, v. 74, i. 10, pp. 1670–1678. DOI: 10.1134/S000511791310007X.
18. Rubanov L.I. *Parallel'noe modelirovanie Monte-Karlo na sistemakh s raspredelennoy pamyat'yu* [Parallel Monte Carlo modeling on distributed memory systems]. International Journal of Open Information Technologies [International Journal of Open Information Technologies]. 2014, v. 2, i. 2, pp. 12–20 (in Russian).
19. Rubanov L.I. Seliverstov A.V. Proektivno-invariantnoe opisanie izluchiny reki [Projective-invariant description of meandering river]. *Informatsionnye protsessy* [Information processes]. 2016, v. 16, i. 3, pp. 281–290 (in Russian).
20. Sal'kov N.A. Grafo-analiticheskoe reshenie nekotorykh chastnykh zadach kvadratichnogo programmirovaniya [Graph-analytic solution of some special problems of quadratic programming]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics].2014, v. 2, i. 1, pp. 3–8 (in Russian). DOI: 10.12737/3842.
21. Seliverstov A.V. Kubicheskie formy bez monomov ot dvukh peremennykh [Cubic forms without monomials in two variables]. *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki* [The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science]. 2015, v. 25, i. 1, pp. 71–77 (in Russian).
22. Seliverstov A.V. O simmetrii proektivnykh krivykh [On symmetry of projective curves]. *Vestnik TvGU. Seriya "Prikladnaya Matematika"* [Herald of Tver State University. Series: Applied Mathematics]. 2016, i. 3, pp. 59–66 (in Russian).
23. Kheyfets A.L. Sravnenie metodov nachertatel'noy geometrii i 3D komp'yuternogo geometricheskogo modelirovaniya po tochnosti, slozhnosti i effektivnosti [Comparison of methods of descriptive geometry and computer 3D geometric simulation according to the accuracy, complexity, and effectiveness]. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Stroitel'stvo i arkhitektura* [Bulletin of the South Ural State University. Series Construction Engineering and Architecture]. 2015, v. 15, i. 4, pp. 49–63 (in Russian). DOI: 10.14529/build150408.
24. Yurkov V.Yu. Formal'noe predstavlenie usloviy intsidentnosti v mnogomernykh proektivnykh prostranstvakh [Formal representation of incidence conditions in multidimensional projective space]. *Geometriya i grafika* [Geometry and Graphics]. 2016, v. 4, i. 4, pp. 3–13 (in Russian). DOI: 10.12737/22838.
25. Eder C., Faugère J.-C. A survey on signature-based algorithms for computing Gröbner bases. Journal of Symbolic Computation. 2017, vol. 80, no. 3, pp. 719–784. DOI: 10.1016/j.jsc.2016.07.031.
26. Harrell E.M. A direct proof of a theorem of Blaschke and Lebesgue.The Journal of Geometric Analysis. 2002, vol. 12, no. 1, pp. 81–88. DOI: 10.1007/BF02930861.
27. Herrero M.I., Jeronimo G., Sabia J. Affine solution sets of sparse polynomial systems. Journal of Symbolic Computation. 2013, vol. 51, pp. 34–54. DOI: 10.1016/j.jsc.2012.03.006.
28. Mishkin D., Matas J., Perdoch M. MODS: Fast and robust method for two-view matching. Computer Vision and Image Understanding. 2015, vol. 141, pp. 81–93. DOI: 10.1016/j.cviu.2015.08.005.
29. Seliverstov A.V. On cubic hypersurfaces with involutions.International Conference Polynomial Computer Algebra'2016. Russian Academy of Sciences, St.Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute, Euler International Mathematical Institute, ed. by N.N. Vassiliev, VVM Publishing, St.Petersburg, 2016, pp. 74–77. URL: http://elibrary.ru/item.asp?id=26437524/