СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 42, № 3, 1978

УДК 51.01.16

В. Г. КАНОВЕЙ

О НЕПУСТОТЕ КЛАССОВ В АКСИОМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Введение. Формулировки теорем

Как и предсказывал Н. Н. Лузин [(1), стр. 268, 308], классическими методами дескриптивной теории множеств не удается решать нетривиальные задачи в области проективных множеств для уровней, начиная с третьего, а иногда со второго и даже первого уровня. Например, нельзя ни доказать, ни опровергнуть утверждение об измеримости по Лебегу всякого множества действительных чисел класса A_2 (в одну сторону это установил П. С. Новиков (2), в другую — Р. Соловай (6)). Таким образом, как указанное утверждение, так и его отрицание совместимы с аксиоматической теорией множеств Цермело — Френкеля ZF. Многие другие задачи такого рода также допускают решение только на уровне совместимости с ZF или ZFC ($=ZF+$аксиома выбора).

Доказываемые в предлагаемой статье теоремы можно было бы назвать «теоремами о совместимости непустоты разностей». Теоремы 1 и 2 имеют следующий общий вид:

Утверждение «в классе $\mathscr{K}_1$ существуют элементы, удовлетворяющие некоторому свойству Λ» совместимо (относительно ZF или ZFC) с утверждением «в классе $\mathscr{K}_2$ не существует элементов, удовлетворяющих (этому же) свойству Λ»,

где $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ — некоторые фиксированные классы множеств (например, в теореме 2 в качестве $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ берутся соответственно проективные классы CA_n и A_n Н. Н. Лузина [(1), стр. 586]).

Таким образом, разность $\mathscr{K}_1 - \mathscr{K}_2$ оказывается «непустой» (в смысле совместимости) по отношению к свойству Λ. В теореме 3 «совместимость непустоты» разности $\mathscr{K}_1 - \mathscr{K}_2$ понимается несколько иначе.

Перед формулировками теорем сделаем некоторые терминологические замечания. Через R обозначаем $\mathcal{P}(\omega) = \{x : x \subseteq \omega\}$ — совокупность всех подмножеств натурального ряда ω. Мы будем применять стандартные обозначения [см. (5), § 16.1, 16.6] для классов подмножеств пространств вида $\omega^m \times R^k$, а также обозначения для соответствующих совокупностей формул арифметики второго порядка с переменными типа 1 по R (там же, § 16.2). В частности, Σ^i_n (где $i < 2$ и $n \in \omega$) — совокупность всех подмножеств таких пространств, определимых Σ^i_n-формулами без параметров;

$\Sigma_n^{i,x}$ — то же с разрешением использовать фиксированное $x \subseteq \omega$ в качестве параметра типа 1. Аналогично, Π_n^i и $\Pi_n^{i,x}$ — совокупности всех подмножеств указанных пространств, определимых Π_n^i-формулами без параметров и с параметром x соответственно. Далее, $\Delta_n^i = \Sigma_n^i \cap \Pi_n^i$ и $\Delta_n^{i,x} = \Sigma_n^{i,x} \cap \Pi_n^{i,x}$. Дополнительно определяются $\Sigma_n^i = \bigcup\limits_{x \subseteq \omega} \Sigma_n^{i,x}$ (совпадает с классом A_n для пространств вида R^k) и $\Pi_n^i = \bigcup\limits_{x \subseteq \omega} \Pi_n^{i,x}$ (совпадает с CA_n). При этом в Σ_n^1-префиксе не допускается, чтобы квантор типа 0 стоял левее квантора 1; то же для Π_n^1.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $n \geqslant 2$. Предложение «в классе Δ^1_{n+1} существует неконструктивное подмножество множества ω» совместимо с ZFC + «в классе Σ_n^1 все подмножества множества ω конструктивны».*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $n \geqslant 2$. Предложение «в классе CA_n существует бесконечное D-конечное подмножество множества R» совместимо с ZF + «в классе A_n нет бесконечных D-конечных подмножеств множества R».*

(*Бесконечным* называется множество, не равномощное никакому натуральному числу, т. е. не являющееся конечным; *D-конечным* называется множество, которое не равномощно никакому своему собственному подмножеству; см. ([4]), раздел 5).

Перед формулировкой теоремы 3 введем еще несколько определений. Через $L(U)$ (где U — произвольное множество) обозначается класс всех множеств, конструктивных относительно U [см. ([4]), стр. 45]. Для $a \subseteq \omega$ определяем $[a] = \{x \subseteq \omega : L(x) = L(a)\}$ — совокупность всех подмножеств множества ω, «равноконструктивных» с a, т. е. *L-степень*, или степень конструктивности a. Далее, если X, Y, $Z \subseteq R$ и выполняется $[X \cap Z = 0 \,\&\, Y \cap Z \neq 0] \vee [X \cap Z \neq 0 \,\&\, Y \cap Z = 0]$, то пишем, что Z *различает* множества X и Y.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $n \geqslant 2$. Предложение «существуют такие неконструктивные a, $b \subseteq \omega$, что в классе Π_n^1 найдется множество $Z \subseteq R$, различающее $[a]$ и $[b]$, а в классе Σ_n^1 таких множеств $Z \subseteq R$ нет», совместимо с ZFC.*

§ 2. Комментарии к теоремам

2.1. О т е о р е м е 1. Непротиворечивость предложения о существовании неконструктивного подмножества множества ω доказана П. Коэном ([3]). Первый нетривиальный результат о положении таких подмножеств в аналитической иерархии принадлежит Дж. Шенфилду ([10]):

У т в е р ж д е н и е (A). *Если $x, y \subseteq \omega$ и $y \in \Sigma_2^{1,x}$, то $y \in L(x)$ и в $L(x)$ истинно $y \in \Sigma_2^{1,x}$.*

Утверждение (A) легко вытекает из известного принципа абсолютности:

П р и н ц и п а б с о л ю т н о с т и ([10]). *Если M — транзитивный класс, являющийся моделью ZF, $\omega_1 \subseteq M$, φ — замкнутая Π_2^1-формула с параметрами из M, то φ одновременно истинна в M и в универсуме (т. е. классе всех множеств) V.*

Из (А) следует, в частности, конструктивность всякого $x\subseteq\omega$ класса Σ^1_2. Таким образом, теорема 1 не верна при $n=0$, 1.

Фактически в предлагаемой статье доказывается не теорема 1, а следующая (более сильная)

ТЕОРЕМА 1′. *Пусть* $n\geqslant 2$. *Предложение «существует* L*-минимальное* $a\subseteq\omega$, *удовлетворяющее условиям* $V=L(a)$ (*т. е. все множества конструктивны относительно* a) *и* $\{a\}\in\Pi^1_n$» *совместимо с* $ZFC+$«*если* x, $y\subseteq\omega$, $x\in L$ *и* $y\in\Sigma^{1,x}_n$, *то* $y\in L$ и $L\models y\in\Sigma^{1,x}_n$».

(Множество $a\subseteq\omega$ называется L*-минимальным* ([8]), если a неконструктивно и для всякого $b\in L(a)$, $b\subseteq\omega$, из $b\notin L$ следует $a\in L(b)$).

Теорема 1 вытекает из теоремы 1′ в силу того, что всякое L-минимальное подмножество множества ω неконструктивно по определению, а из $\{a\}\in\Pi^1_n$ легко следует $a\in\Delta^1_{n+1}$.

Непротиворечивость предложения о существовании L-минимального $a\subseteq\omega$, удовлетворяющего условию $V=L(a)$, доказана Дж. Саксом в ([8]). Позже Р. Енсен ([7]) усилил результат Сакса требованием $\{a\}\in\Pi^1_2$. В свете утверждения (А) результат Енсена совпадает с частным случаем $n=2$ теоремы 1′.

Теорема 1′ объявлена автором в ([16]) и доказана в ([17]) несколько иным методом, чем в предлагаемой статье. Некоторые другие результаты о минимальных подмножествах ω объявлены в ([14]).

2.2. О т е о р е м е 2. Аксиома выбора влечет эквивалентность двух определений конечности: каждое множество X конечно, если и только если оно D-конечно [([4]), разд. 5]. Таким образом, в ZFC доказуемо отсутствие бесконечных D-конечных множеств. Тут же отметим, что любое множество X будет D-конечным, если и только если оно не содержит подмножества, равномощного натуральному ряду ω (([4]), разд. 5); доказательство не использует аксиому выбора.

Существование бесконечных D-конечных множеств, будучи несовместимым с ZFC, совместимо тем не менее с ZF (([3]), гл. 4, § 9). Бесконечные D-конечные множества могут быть проективными (([15]), теорема Т4) и даже входить в Π^1_2 (([13]), без доказательства). С другой стороны, в ZF (без аксиомы выбора!) имеет место.

У т в е р ж д е н и е (Б). *Не существует такого бесконечного* D*-конечного множества* X, *что* $X\subseteq R$ *и* $X\in\underline{\Sigma}^1_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X\subseteq R$, $X\in\underline{\Sigma}^1_2$, X бесконечно. Построим множество $Y\subseteq X$, равномощное ω. Определим G как совокупность всех таких пар $(n, x)\in\omega\times R$, что $(x)_i\in X$ для любого $i<n$ (где $(x)_i=\{k\in\omega : 2^i\cdot 3^k\in x\}$) и $(x)_i\neq(x)_j$ при $i, j<n$, $j\neq i$. Ясно, что $G\in\underline{\Sigma}^1_2$ и $\mathrm{dom}(G)=\omega$ (последнее — из бесконечности X). По теореме Новикова — Кондо — Аддисона об униформизации (([5]), стр. 545) находим такую функцию $F\subseteq G$, что $\mathrm{dom}(F)=\mathrm{dom}(G)=\omega$. Теперь $Y=\{(F(m))_i : i<m\in\omega\}$ — искомое подмножество X, равномощное ω. Утверждение (Б) доказано.

Утверждение (Б) опровергает теорему 2 при $n=0$, 1. Из него также следует эквивалентность упомянутого результата ([13]) и частного случая $n=2$ теоремы 2.

Теорему 2 мы также доказываем в следующей более сильной форме:

ТЕОРЕМА 2′. *Пусть* $n \geqslant 2$. *Предложение «в классе* Π^1_n *существует бесконечное D-конечное подмножество множества R» совместимо с ZF +* $+$ *«в классе* $\underline{\Sigma}^1_n$ *нет бесконечных D-конечных подмножеств R».*

Вывод теоремы 2 из теоремы 2′ тривиален в силу того, что класс Π^1_n является подклассом класса $CA_n = \underline{\Pi}^1_n$. Теорема 2′ объявлена автором в ([16]).

2.3. О т е о р е м е 3. Пусть X, $Y \subseteq R$ и $\mathscr{K}$ — произвольный класс. Множества X и Y называем *$\mathscr{K}$-различимыми*, если найдется множество $Z \in \mathscr{K}$, $Z \subseteq R$, различающее X и Y. В противном случае называем X и Y *$\mathscr{K}$-неразличимыми.*

Проблема различимости L-степеней подмножеств ω не рассматривалась в литературе. Отметим, что если одно или оба из a, b конструктивны, то ситуация тривиализуется (именно, $[a]=[b]$ при $a, b \in L$; $\{0\}$ различает $[a]$ и $[b]$ при $a \in L$ и $b \notin L$).

У т в е р ж д е н и е (В). *Если a, b — неконструктивные (например, L-минимальные) подмножества множества* ω, *то* $[a]$ *и* $[b]$ *являются* $\Sigma^{1,L}_2$*-неразличимыми.*

(Через $\Sigma^{1,L}_n$ обозначается $\bigcup\limits_{x \in L, x \subseteq \omega} \Sigma^{1,x}_n$, т. е. совокупность всех $\underline{\Sigma}^1_n$-множеств «с конструктивным кодом»).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Z \subseteq R$, $Z \in \Sigma^{1,L}_2$, $Z \cap [a] \neq 0$. Ясно, что $Z \not\subseteq L$ (так как $a, b \notin L$). Согласно теореме ([12]) в этом случае существует совершенное в R множество $P \subseteq Z$ «с конструктивным кодом». Такое множество, очевидно, непусто пересекается со всяким $[x]$, $x \subseteq \omega$. Значит, $Z \cap [b]$ непусто, что и требовалось.

Из (В) следует несправедливость теоремы 3 при $n=0$, 1.

Теорема 3 также доказывается в более сильной форме:

ТЕОРЕМА 3′. *Пусть* $n \geqslant 2$. *Предложение «существуют такие L-минимальные* $a, b \subseteq \omega$, *что множества* $R \cap L(a)$ *и* $R \cap L(b)$ *являются* Π^1_n*-различимыми, но* $\Sigma^{1,L}_n$*-неразличимыми», совместимо с ZFC.*

Вывод теоремы 3 из теоремы 3′ опирается на следующую лемму.

ЛЕММА. *Пусть* $n \geqslant 2$; $a, b \subseteq \omega$ *являются L-минимальными, а множества* $X = R \cap L(a)$ *и* $Y = R \cap L(b)$ *являются* Π^1_n*-различимыми, но* $\Sigma^{1,L}_n$*-неразличимыми. Тогда множества* $[a]$ *и* $[b]$ *являются* Π^1_n*-различимыми, но* $\Sigma^{1,L}_n$*-неразличимыми.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим два вспомогательных факта:

(1) $X=[a] \cup L^*$ *и* $Y=[b] \cup L^*$, *где* $L^*=L \cap R$ (следует из определения L-минимальности).

(2) $L^* \in \Sigma^1_2$ (см., например, ([9])).

Пусть теперь $Z \subseteq R$, $Z \in \Pi^1_n$ и Z различает X и Y. Тогда $Z' = Z - L^*$ различает $[a]$ и $[b]$ в силу (1) и $Z' \in \Pi^1_n$ в силу $Z \in \Pi^1_n$, $n \geqslant 2$ и (2).

Наоборот, пусть $Z \subseteq R$, $Z \in \Sigma^{1,L}_n$ и Z различает $[a]$ и $[b]$. При этом из (B) следует $n \geqslant 3$. Значит, множество $Z' = Z - L^*$ принадлежит $\Sigma^{1,L}_n$ по (2). С другой стороны, Z' различает X и Y в силу (1). Лемма доказана.

Вывод теоремы 3 из теоремы 3′ и доказанной леммы тривиален. В несколько иной форме теорема 3′ объявлена автором в ([16]).

2.4. Формулировка основной теоремы (ОТ). Теоремы 1′, 2′, 3′ являются следствиями сформулированной ниже основной теоремы ОТ. Перед формулировкой ОТ вводим для всякого n предложение $\mathfrak{B}_n(A)$ как конъюнкцию следующих девяти предложений:

$\mathfrak{A}1(A)$: $A \subseteq R$, $V = L(A)$, *элементы A имеют попарно различные L-степени*;

$\mathfrak{A}2(A)$: A бесконечно и D-конечно;

$\mathfrak{A}3(A)$: *элементы A являются L-минимальными*;

$\mathfrak{A}4'_n(A)$: *A является множеством класса* Π^1_n;

$\mathfrak{A}4''_n(A)$: в *классе* $\underline{\Sigma}^1_n$ *нет бесконечных D-конечных подмножеств множества R*;

$\mathfrak{A}5'_n(A)$: *если $a \in A$, то в $L(a)$ истинно* $\{a\} \in \Pi^1_n$;

$\mathfrak{A}5''_n(A)$: *если $a \in A$, $x \in R \cap L$ и $y \in R \cap L(a)$, причем в $L(a)$ истинно* $y \in \Sigma^{1,x}_n$, *то* $y \in L$ *и в L истинно* $y \in \Sigma^{1,x}_n$;

$\mathfrak{A}6'_n(A)$: *если $a, b \in A$ и $a \neq b$, то множества $L(a) \cap R$ и $L(b) \cap R$ являются Π^1_n-различимыми в $L(a, b)$*;

$\mathfrak{A}6''_n(A)$: *если $a, b \in A$, то множества $L(a) \cap R$ и $L(b) \cap R$ являются $\Sigma^{1,L}_n$-неразличимыми в $L(a, b)$*.

Мы доказываем, что при любом $n \geqslant 2$ предложение $\exists A\, \mathfrak{B}_n(A)$ совместимо с ZF; отсюда тривиально получаются теоремы 1′, 2′, 3′. Именно, для теоремы 1′ нужно воспользоваться частями $\mathfrak{A}1$, $\mathfrak{A}3$, $\mathfrak{A}5'_n$ и $\mathfrak{A}5''_n$ предложения $\mathfrak{B}_n$; для теоремы 2′ — частями $\mathfrak{A}1$, $\mathfrak{A}2$, $\mathfrak{A}4'_n$ и $\mathfrak{A}4''_n$; для теоремы 3′ — частями $\mathfrak{A}1$, $\mathfrak{A}3$, $\mathfrak{A}6'_n$ и $\mathfrak{A}6''_n$.

Совместимость $\exists A\, \mathfrak{B}_n(A)$ доказывается в следующей форме:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (ОТ). *Пусть $n \geqslant 2$ и $(\omega_2)^L$ (конструктивное ω_2, ([7])) счетно в универсуме. Тогда найдется такое множество A, что предложение $\mathfrak{B}_n(A)$ истинно в $L(A)$.*

Совместимость посылки этой теоремы с ZF хорошо известна (см. ([3]), гл. 4, § 10); таким образом, эта теорема влечет совместимость с ZF предложения $\exists A\, \mathfrak{B}_n(A)$ при $n \geqslant 2$. Тем самым, из ОТ следуют теоремы 1′, 2′, 3′ (и 1, 2, 3).

2.5. План доказательства. Во всем оставшемся тексте (§ 3—§ 7) мы предполагаем счетность $(\omega_2)^L$. В § 3 рассматривается общая конструкция генерических расширений $L(A)$ конструктивного универсума L с помощью множества $A \subseteq R$. При этом в качестве множеств вынуждающих условий (м. в. у.) берутся множества вида P^∞,

где P — некоторая конструктивная совокупность совершенных деревьев в ${}^{<\omega}2$. Для доказательства ОТ достаточно выбрать множество $P\in L$, $P\subseteq{}^{<\omega}2$, так, чтобы во всех P-генерических расширениях вида $L(A)$ выполнялось $\mathfrak{B}_n(A)$ (существование же таких расширений обычным путем получается из счетности $(\omega_2)^L$ в универсуме). Свойства $\mathfrak{A}1(A)$ и $\mathfrak{A}2(A)$ носят тривиальный характер; их выполнение во всех расширениях вида $L(A)$ также доказано в § 3 (теорема 3.4).

В § 4 изучаются свойства расширений вида $L(A)$ при условии, что м. в. у. P имеет вид $P=\bigcup\limits_{\alpha\in\omega_1} P_\alpha$ в L, где $(P_\alpha,\ \alpha\in\omega_1)$ — последовательность типа построенной в ([7]) (последовательность Енсена, определение 4.2). Мы показываем, что если при этом A является P-генерическим над L подмножеством множества R, то всякое $a\in A$ будет L-минимальным (теорема 4.6), а само A будет совокупностью всех P-генерических над L подмножеств ω из $L(A)$ (4.4). Если, кроме того, последовательность P_α удовлетворяет соответствующему условию определимости в L (в ([7]) такое условие следует из построения), то в $L(A)$ будут выполняться свойства $\mathfrak{A}i_n'(A)$, $i=4, 5, 6$ (4.5).

Для обеспечения истинности в $L(A)$ «дуальных» свойств $\mathfrak{A}i_n''(A)$ (теорема 6.1) мы накладываем в § 6 на последовательность P_α требование «элементарной эквивалентности» P и совокупности P' всех конструктивных совершенных деревьев ($P\subseteq P'$) относительно вынуждения формул класса Π^1_{n-1} (определение 6.1).

Отметим, что в P'-генерических расширениях L вида $L(A)$ свойства $\mathfrak{A}i_n''(A)$, $i=4, 5, 6$, выполняются при любом n; это объясняется наличием достаточного числа порядковых автоморфизмов множества P'. Мы однако не рассматриваем P'-генерические расширения; вместо них рассматривается соответствующее отношение forc (5.4), изучению которого посвящен § 5.

Наконец, в § 7 для фиксированного $n\geqslant 2$ строится последовательность $(P_\alpha,\ \alpha\in\omega_1)$, удовлетворяющая одновременно требованиям § 4 и § 6; тем самым заканчивается доказательство ОТ. Таков план доказательства.

Вся стандартная теоретико-множественная символика берется из ([4]) с таким изменением: мощность обозначается $\mathrm{card}(x)$, а не $|x|$.

Автор глубоко признателен проф. В. А. Успенскому и В. Н. Гришину за внимание к статье и ценную помощь.

§ 3. Генерические расширения, используемые при доказательстве ОТ

Мы предполагаем знакомство читателя с общей теорией генерических расширений и методом вынуждения, а также с элементарной теорией иерархий подмножеств пространств вида $\omega^k\times R^m$ и формул арифметики второго порядка в рамках ([3], гл. 16). Конструкция рассматриваемых генерических расширений перестановочного (симметрического) типа и свойства симметрии таких расширений берутся из ([3]) (гл. 4, § 9). В изложении связи между вынуждением и истинностью

в генерических расширениях мы следуем ([6]). Наконец, из ([7]) берется идея замены генерических фильтров генерическими подмножествами множества ω и использования генерических расширений конструктивного универсума L, а не счетной модели теории $ZF+V=L$. При этом существование генерических расширений обеспечивается введением дополнительной аксиомы о счетности $(\omega_2)^L$ в условие OT.

Начнем с определения вынуждающих условий — совершенных деревьев в множестве ${}^{<\omega}2$.

3.1. Совершенные деревья. Через ${}^{Y}X$ обозначается множество $\{f : f$ — функция из Y в $X\}$ ([4], стр. 10) (не путать с декартовой степенью X^m, см. ниже). Вводим множество ${}^{<\omega}2 = \bigcup\limits_{n\in\omega} {}^{n}2$ — совокупность всех конечных последовательностей нулей и единиц (включающая последовательность 0 нулевой длины). Для $e\in{}^{<\omega}2$ и $i\in 2$ определяем $e^\frown i = e\cup\{(\mathrm{dom}(e), i)\}$ («продолжение» последовательности e) ([4], стр. 67).

Непустое $p\subseteq{}^{<\omega}2$ называем *совершенным деревом* (в ${}^{<\omega}2$), если: (1) для $e\in p$ и $e'\in{}^{<\omega}2$ из $e'\subseteq e$ следует $e'\in p$ и (2) для любого $e_0\in p$ найдется такое $e\in p$, что $e_0\subseteq e$ и $e^\frown 0, e^\frown 1$ принадлежат p. Через Perf обозначаем совокупность всех совершенных деревьев.

Для всякого $p\in$Perf можно определить Cl_p как совокупность всех таких $x\subseteq\omega$, что при любом $n\in\omega$ найдется $e\in p\cap{}^{n}2$, удовлетворяющее $(\forall i<n)[i\in x\equiv e(i)=1]$; Cl_p — совершенное подмножество пространства $R=\mathcal{P}(\omega)$.

Если $e\in{}^{<\omega}2$, то через $\langle e\rangle$ обозначаем $\{e'\in{}^{<\omega}2 : e'\subseteq e$ или $e\subseteq e'\}$; $\langle e\rangle\in$Perf и $\mathrm{Cl}_{\langle e\rangle}$ открыто-замкнуто.

Перед дальнейшими определениями условимся, что кортеж (m-ка) $(s_0, \ldots, s_{m-1})$ совпадает с 0 при $m=0$ и с s_0 при $m=1$. Тогда декартова степень X^m всякого непустого X равна $\{0\}=1$ при $m=0$ и равна X при $m=1$.

Пусть теперь $p=(p_0, \ldots, p_{m-1})\in\mathrm{Perf}^m$ (m-ка совершенных деревьев). Определяем $\mathrm{Cl}_p=\{(x_0, \ldots, x_{m-1}) : x_i\in\mathrm{Cl}_{p_i}$ при всяком $i<m\}$ (если $m=0$, то $\mathrm{Cl}_p=\mathrm{Cl}_0=\{0\}=R^0$; если $m=1$, то $\mathrm{Cl}_p=\mathrm{Cl}_{p_0}$). Для этого же p определяем $\|p\|=m$ («размерность»). Если $k\leqslant m$, то полагаем $p\restriction k=(p_0, \ldots, p_{k-1})$ ($=0$ при $k=0$), а для $k\geqslant m$ определяем:

$$p\restriction k = (p_0, \ldots, p_{m-1}, \underbrace{{}^{\langle\omega}2, \ldots, {}^{\langle\omega}2}_{k-m \text{ раз}}).$$

Аналогично, если $a=(a_0, \ldots, a_{m-1})\in R^m$, $k\leqslant m$, то полагаем $a\restriction k = (a_0, \ldots, a_{k-1})$. Если $a=(a_i, i\in\omega)\in{}^{\omega}R$ и $k\in\omega$, то через $a\restriction k$ обозначаем кортеж $(a_0, \ldots, a_{k-1})$ $(\in R^k)$.

3.2. Генерические последовательности и кортежи. Для всякого $P\subseteq$Perf определяем $P^\infty = \bigcup\limits_{m\in\omega} P^m$ (совокупность всех кортежей элементов P). Множество Perf^∞ упорядочивается отношением $\leqq$: $(p_0, \ldots, p_{k-1})\leqq(q_0, \ldots, q_{m-1})$, если и только если $k\leqslant m$ и $q_i\subseteq p_i$ выполняется при всяком $i<k$.

В качестве множеств вынуждающих условий мы будем рассматривать множества вида P^∞ (упорядоченные отношением $\leqq$), где $P\subseteq\mathrm{Perf}$ удовлетворяет такому условию:

$$\text{если } e\in p\in P, \text{ то } p\cap\langle e\rangle\in P.$$

Совокупность всех P, удовлетворяющих этому условию, обозначается Spl («расщепляющиеся» множества).

Введем теперь важное понятие генерических последовательностей и кортежей подмножеств множества ω. Пусть K — транзитивный класс, модель ZF (ниже, как правило, $K=L$), $P\in L\cap\mathrm{Spl}$ фиксировано. Последовательность (функцию) $a\in{}^\omega R$ называем *P-генерической над K последовательностью*, если множество $G_a=\{p\in P^\infty : a\restriction\|p\|\in\mathrm{Cl}_p\}$ непусто пересекается со всяким плотным в P^∞ множеством $Q\in K$ (если $Q\subseteq U\subseteq\subseteq\mathrm{Perf}^\infty$ и имеют место: (1) $q\in Q\&u\in U\&u\geqq q\to u\in Q$ и (2) $(\forall u\in\in U)(\exists q\in Q)[q\geqq u]$, то Q называется *плотным в U* ([6], I.1.2)). P-генерические *над L* последовательности называем просто *P-генерическими последовательностями.*

Метод рассмотрения P-генерических последовательностей вместо генерических фильтров на P^∞ взят нами из [7]. При этом принадлежность P к Spl влечет $K(a)=K(G_a)$, а также то обстоятельство, что G_a будет P-генерическим над K фильтром, при любой P-генерической над K последовательности a (см. [7], рассуждения на стр. 124).

Аналогично, если $a\in R^m$, то определяем $G_a=\{p\in P^m : a\in\mathrm{Cl}_p\}$; кортеж a называем *P-генерической над K* m-кой в случае, когда $G_a\cap Q$ непусто для любого плотного в P^m множества $Q\in K$. В частности, $a\subseteq\omega$ будет P-генерическим над K подмножеством множества ω, если $(a)=a$ есть P-генерическая над K 1-ка (это совпадает с определением [7]). Как и выше, P-генерические над L m-ки называем просто *P-генерическими m-ками.*

Мы используем следующие свойства генерических над L последовательностей и кортежей. Пусть $P\in\mathrm{Spl}$ конструктивно.

1. *Если $(a_0, \ldots, a_m)$ есть P-генерическая $(m+1)$-ка, то $a_m\notin L(a_0, \ldots, a_{m-1})$.* Действительно, по «лемме о произведении» [([6], 1.2.3], a_m будет P-генерическим над $K=L(a_0, \ldots, a_{m-1})$. Отсюда и из $P\in\mathrm{Spl}$ легко вытекает $a_m\notin K$, что и требовалось.

2. *Если $a=(a_i, i\in\omega)$ есть P-генерическая (над L) последовательность, $m\in\omega$, то $a_m\notin L(\{a_i : i\neq m\})$* (аналогично).

3. *Если a — такое, как выше, $i, j\in\omega$ и a' получается из a перестановкой a_i и a_j, то a' также P-генерическая (над L) последовательность* (легко следует из определений).

4. *Если $m\in\omega$, $a\in R^m$ есть P-генерическая m-ка и $Q\in L$, Q предплотно в P^m, то $a\in\bigcup\limits_{q\in Q}\mathrm{Cl}_q$* (очевидно).

Множество $Q\subseteq P^m$ называется *предплотным в P^m*, если $\{p\in P^m :$ $: (\exists q\in Q)[p\geqq q]\}$ плотно в P^m ([7]).

5. *Пусть $p\in P^\infty$. Тогда существует P-генерическая (над L) последовательность $a\in{}^\omega R$, удовлетворяющая $p\in G_a$.*

Действительно, из счетности $(\omega_2)^I$ (см. 2.5) легко вытекает счетность (в универсуме) совокупности всех конструктивных плотных в P^∞ множеств; дальше применяем аргумент ([6]), I.1.8.

3.3. Вынуждение. Фиксируем некоторое $P\in L\cap \mathrm{Spl}$. Множество $A\subseteq R$ называем *P-генерическим множеством, если* $A=\mathrm{rng}(a)=\{a_i : i\in\omega\}$ для некоторой P-генерической (над L) последовательности $a=(a_i,\ i\in\omega)$. Для изучения генерических расширений вида $L(A)$, где A является P-генерическим множеством, введем соответствующее отношение вынуждения.

Сперва определим язык $\mathcal{L}$ как расширение обычного $\in$-языка с помощью констант $\underline{A}$, $\underline{a_k}$ $(k\in\omega)$ и $\underline{x}$ $(x\in L)$. Если φ — формула $\mathcal{L}$ и $a=(a_i,\ i\in\omega)\in {}^\omega R$, то определяем интерпретацию φ^a формулы φ, меняя $\underline{A}$, $\underline{a_k}$, $\underline{x}$ на $\{a_i : i\in\omega\}$, a_k, x соответственно. Следуя ([6]), I.1.9, вводим отношение вынуждения: $p\,|\!|\!-_P\varphi$, *если и только если* φ^a *истинно в* $L(\mathrm{rng}(a))$, *какова бы ни была P-генерическая (над L) последовательность a, удовлетворяющая* $p\in G_a$.

В этом определении предполагается, что $p\in P^\infty$, а φ — замкнутая формула языка $\mathcal{L}$. Если P явно фиксировано в контексте (как в этом пункте), то пишем $|\!|\!-$ вместо $|\!|\!-_P$.

Основные свойства отношения $|\!|\!-_P$:

1. Отношение $|\!|\!-$ (т. е. $|\!|\!-_P$ для рассматриваемого $P\in\mathrm{Spl}$) выразимо в L в следующем смысле: если $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ есть $\in$-формула без параметров, то $\{(p, c_1, \ldots, c_m) : p\in P,\ c_1, \ldots, c_m$ — *константы языка* $\mathcal{L}$ *и* $p\,|\!|\!-\varphi(c_1, \ldots, c_m)\}$ — класс в L.

2. Пусть a есть P-генерическая последовательность, $A=\mathrm{rng}(a)$, φ — формула языка $\mathcal{L}$ и φ^a истинно в $L(A)$. Тогда найдется такое $p\in G_a$, что $p\,|\!|\!-\varphi$.

Мы ссылаемся на ([6]), I.1.9.

3.4. Свойства симметрии и обеспечение $\mathfrak{A}1(A)$ и $\mathfrak{A}2(A)$ в $L(A)$. Множество P из 3.3 остается фиксированным. Сформулируем некоторые свойства генерических расширений типа 3.3, подробно изученные в ([3]), гл. 4, § 9.

1. *Пусть* φ *есть замкнутая формула языка* $\mathcal{L}$. *Тогда множество* $\{p\in P^\infty : p\,|\!|\!-\varphi$ *или* $p\,|\!|\!-\sim\varphi\}$ *плотно в* P^∞ *и принадлежит* L (легко следует из 3.3.1, 3.3.2).

2. *Пусть* $p\in P^\infty$, φ *есть формула языка* $\mathcal{L}$, $m\in\omega$ *и всякая константа* $\underline{a_i}$, *входящая в* φ, *удовлетворяет* $i<m$. *Тогда* $p\,|\!|\!-\varphi$ *и* $p\restriction m\ |\!|\!-\varphi$ *выполняются одновременно.*

3. *Если* φ *и* m — *такие же, как в* 2, *то множество* $\{p\in P^m : p\,|\!|\!-\varphi$ *или* $p\,|\!|\!-\sim\varphi\}$ *плотно в* P^m *и принадлежит* L.

4. *Если* $A\subseteq R$ *является P-генерическим множеством и* $z\in L(A)$, $z\subseteq\omega$, *то найдутся такие* $m\in\omega$ *и* $a_0, \ldots, a_{m-1}\in A$, *что* $z\in L(a_0, \ldots, a_{m-1})$.

Утверждения 2 и 4 — общие для всех «перестановочных» расширений ([3]), доказательство леммы на стр. 261), а 3 следует из 1,2.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $A\subseteq R$ *есть P-генерическое множество. Тогда в* $L(A)$ *выполняются* $\mathfrak{A}1(A)$ *и* $\mathfrak{A}2(A)$.

Доказательство проводим в $L(A)$. Выполнение $\mathfrak{A}1(A)$ очевидно из 3.2.2. Докажем, что A бесконечно и D-конечно. Бесконечность A следует вновь из 3.2.2. Предположим, что f — биекция из ω в A ($f\in L(A)$). Применяя утверждение 4, легко получаем: $f\in L(a_0, \ldots, a_{m-1})$ для некоторых $m\in\omega$ и $a_0, \ldots, a_{m-1}\in A$. Тогда и $\mathrm{rng}(f)\subseteq L(a_0, \ldots, a_{m-1})$. Опять в силу 3.2.2 и $\mathrm{rng}(f)\subseteq A$ это дает $\mathrm{rng}(f)\subseteq\{a_0, \ldots, a_{m-1}\}$, что противоречит биективности f. Противоречие завершает доказательство теоремы.

§ 4. Применение метода Енсена для обеспечения свойств $\mathfrak{A}3(A)$ и $\mathfrak{A}i_n'(A)$, $i=4,5,6$ в $L(A)$

Итак, мы умеем строить такие множества $A\subseteq R$, что в $L(A)$ истинны $\mathfrak{A}1(A)$ и $\mathfrak{A}2(A)$. Именно, нужно взять произвольное конструктивное $P\in\mathrm{Spl}$ (например, $P=\mathrm{Perf}\cap L$) и произвольное P-генерическое (над L) множество A.

В этом параграфе рассматривается способ построения таких конструктивных $P\in\mathrm{Spl}$, что в $L(A)$ дополнительно выполняются $\mathfrak{A}3(A)$ и $\mathfrak{A}i_n'(A)$, $i=4, 5, 6$. Этот способ состоит в построении P (в L) в виде $P=\bigcup\limits_{\alpha} P_\alpha$, где $(P_\alpha,\ \alpha\in(\omega_1)^L)$ — последовательность, построенная методом ([7]) (такие последовательности мы называем *последовательностями Енсена*, определение 4.2). Наложив на последовательность Енсена $(P_\alpha,\ \alpha\in(\omega_1)^L)$ дополнительное требование определимости в L, мы получаем выполнение в $L(A)$ свойств $\mathfrak{A}3(A)$ и $\mathfrak{A}i_n'(A)$, $i=4, 5, 6$ (при соответствующем $n\geqslant 2$), теоремы 4.5 и 4.6.

Ниже в § 6 будет указано еще одно требование к последовательности Енсена, ведущее к выполнению в $L(A)$ свойств $\mathfrak{A}i_n''(A)$. В связи с этим в § 4 рассматривается не конкретная последовательность Енсена (как это делается в ([7])), а «произвольная». Конкретный выбор последовательности Енсена для доказательства ОТ осуществляется в § 7.

Основу рассуждений этого параграфа составляют идеи ([7]).

4.1. Р а с щ е п л е н и я. Введем некоторые предварительные определения. Если $p,\ q\in\mathrm{Perf}$ и $p=q\cap(\langle e_1\rangle\cup\ldots\cup\langle e_m\rangle)$ для некоторых $e_1, \ldots, e_m\in q$, то называем p *открыто-замкнутым* (о-з) в q; в этом случае $\mathrm{Cl}_p\cap\mathrm{Cl}_q$ будет открыто-замкнутым в Cl_q в топологическом смысле. Называем $p=(p_0, \ldots, p_{m-1})\in\mathrm{Perf}^m$ *компонентно-дизъюнктным*, если $p_i\cap p_j$ конечно (т. е. $\mathrm{Cl}_{p_i}\cap\mathrm{Cl}_{p_j}$ пусто) при $i\neq j$. Если $p\in\mathrm{Perf}^m$, $U\subseteq\mathrm{Perf}^m$ и для некоторого конечного $Q\subseteq U$ выполняется $p\subseteq\bigcup Q$, то пишем $p\geqq\bigvee U$.

Пусть $P,\ Q\in\mathrm{Spl}$, Ξ — произвольное множество. Называем Q *расщеплением P над Ξ*, если выполняются утверждения (1)—(4):

(1) *для всякого $p\in P$ найдется такое $q\in Q$, что $q\subseteq p$;*

(2) *для всякого $q\in Q$ найдется такое $p\in P$, что $q\subseteq p$;*

(3) *если $p\in P$ и $q\in Q$, то p о-з в q;*

(4) *если $m\in\omega$, $U\in\Xi$ предплотно в P^m, а $q\in Q^m$ компонентно-дизъюнктно, то $q\geqq\bigvee U$.*

Покажем, что если (1), (2), (3) имеют место, то (4) эквивалентно:

(5) *если* $m\in\omega$, $U\in\Xi$ *предплотно в* P^m, $a_0, \ldots, a_{m-1}\in \bigcup\limits_{q\in Q} \mathrm{Cl}_q$ *попарно различны, то* $(a_0, \ldots, a_{m-1})\in \bigcup\limits_{u\in U} \mathrm{Cl}_u$.

Докажем сперва (5)$\rightarrow$(4). Пусть $q\in Q^m$ компонентно-дизъюнктно. Тогда всякое $a=(a_0, \ldots, a_{m-1})\in\mathrm{Cl}_q$ очевидно удовлетворяет $a_i\neq a_j$ при $i\neq j$. Согласно (5) это дает: $a\in \bigcup\limits_{u\in U} \mathrm{Cl}_u$. Таким образом, $\mathrm{Cl}_q\subseteq \bigcup\limits_{u\in U} \mathrm{Cl}_u$. Но в силу (3) множество $\mathrm{Cl}_u\cap\mathrm{Cl}_q$ открыто-замкнуто в Cl_q, каково бы ни было $u\in U$. Отсюда с помощью компактности R^m получаем $q\geqq\bigvee U$, т. е. (4).

Докажем обратную импликацию. В силу $Q\in\mathrm{Spl}$ нетрудно подобрать такое компонентно-дизъюнктное $q\in Q^m$, что $a=(a_0, \ldots, a_{m-1})\in\mathrm{Cl}_q$. Но по (4) будет $q\geqq\bigvee U$; это и дает $a\in \bigcup\limits_{u\in U} \mathrm{Cl}_u$, т. е. (5) доказано. Это завершает доказательство эквивалентности.

4.2. Последовательности Енсена. Пусть $\pi=(P_\alpha, \alpha\in\nu)\in L$ есть последовательность счетных в L элементов Spl. Называем π Spl-*последовательностью* (длины ν), если при всяком $\beta\in\nu$ множество P_β является расщеплением $P_{<\beta}= \bigcup\limits_{\alpha\in\beta} P_\alpha$ над $L_{\gamma^*(\pi|\beta)}$, где через $\gamma^*(\pi|\beta)$ обозначено наименьшее $\gamma\in\mathrm{On}$, для которого $\pi|\beta\in L_\gamma$ и β счетно в L_γ. Spl-последовательности длины $(\omega_1)^L$ называем *последовательностями Енсена*. Отметим, что всякая Spl-последовательность (и последовательность Енсена) конструктивна по определению.

Впервые последовательность Енсена построена в ([7]). Сформулируем несколько тривиальных свойств Spl-последовательностей.

ЛЕММА 1. *Пусть* $\pi=(P_\alpha, \alpha\in\nu)$ *является* Spl-*последовательностью и* $\alpha\in\nu$. *Тогда* P_α *предплотно в* $P= \bigcup\limits_{\alpha\in\nu} P_\alpha$ (см. ([7]), следствие 5).

Доказательство легко получается индукцией по α и ν с учетом того, что $\{P_\alpha : \alpha\in\beta\}\subseteq L_{\gamma^*(\pi|\beta)}$ при любом $\beta\in\nu$.

Из леммы и определений вытекает

Следствие 2. *Пусть* π — *такое же, как в лемме* 1, *и* $\alpha\in\beta\in\nu$. *Тогда*:

(1) *если* $q\in P_\beta$, *то* $q\geqq\bigvee P_\alpha$;

(2) *если* $p\in P_\alpha$, *то найдется такое* $q\in P_\beta$, что $q\geqq p$.

4.3. Свойство антицепей. Если $Q\subseteq U\subseteq\mathrm{Perf}^\infty$ и для любых p, $q\in Q$ и $u\in U$ из $u\geqq p\,\&\,u\geqq q$ вытекает $p=q$, то называем Q *антицепью* в U. Максимальная антицепь в U является, очевидно, предплотным в U множеством.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\pi=(P_\alpha, \alpha\in(\omega_1)^L)$ *является последовательностью Енсена,* $P= \bigcup\limits_{\alpha\in(\omega_1)^L} P_\alpha$, $m\in\omega$ *и* $Q\in L$ *есть максимальная антицепь в* P^m. *Тогда* Q *счетно в* L *и найдется такое* $\lambda\in(\omega_1)^L$, *что выполняются условия*:

(i) $Q\subseteq P^m_{<\lambda}$ (*где* $P_{<\lambda}= \bigcup\limits_{\alpha\in\lambda} P_\alpha$);

(ii) *если* $a_0, \ldots, a_{m-1}\in \bigcup\limits_{p\in P_\lambda} \mathrm{Cl}_p$ *попарно различны, то* $(a_0, \ldots, a_{m-1})\in \bigcup\limits_{q\in Q} \mathrm{Cl}_q$;

(iii) *если* $q \in P^m_\lambda$ *компонентно дизъюнктно, то* $q \geqq \bigvee Q$.

Доказательство. Начало рассуждений в L. Введем обозначение

$$Q_{<\lambda} = (P^m_{<\lambda}) \cap Q$$

(где $P_{<\lambda} = \bigcup_{\alpha\in\lambda} P_\alpha$) для всякого $\lambda \in \omega_1$. Ясно, что ω_1, π, P, Q — элементы L_{ω_2}. Это позволяет выбрать счетное множество $M \in L_{\omega_2}$, содержащее указанные множества и такое, что:

(1) M — *элементарная подмодель* L_{ω_2}.

Очевидно, M — экстенсиональное множество. Значит, найдутся транзитивное N и $\in$-изоморфизм $\varphi : M$ на N. Определяем $\lambda = \varphi(\omega_1)$ и покажем, что λ искомое. Учитывая (1) и выбор φ, N, получаем такую последовательность утверждений:

(2) *Если* $x \in M$ *счетно, то* $x \subseteq M$ (используется (1) и формула «существует функция из ω на x»).

(3) *Если* $x \in M$ *наследственно счетно, что* $\varphi(x) = x$ (из (2) индукцией по рангу x).

(4) $\lambda = M \cap \omega_1$ (из (2) и (3)).

(5) $\varphi(\pi) = \pi|\lambda = (P_\alpha, \alpha \in \lambda)$ (из (1), (3), (4) и выбора φ).

(6) $\varphi(P) = P_{<\lambda}$, $\varphi(Q) = Q_{<\lambda}$ (из (3), (5)).

(7) $Q_{<\lambda}$ — *максимальная антицепь в* $P^m_{<\lambda}$ (из (1), (6) и условия); *следовательно,* $Q_{<\lambda}$ *предплотно в* $P^m_{<\lambda}$.

(8) $N = L_\delta$ *для некоторого* $\delta \in \omega_1$.

(9) λ *несчетно в* $N = L_\delta$ (так как ω_1 несчетно в L_{ω_2}); *таким образом,* $\delta < \gamma^*(\pi|\lambda)$ *и* $N \subseteq L_{\gamma^*(\pi|\lambda)}$.

(10) $Q_{<\lambda} \in L_{\gamma^*(\pi|\lambda)}$ (из (7) и (9)).

(11) $Q = Q_{<\lambda}$, т. е. $Q \subseteq P^m_{<\lambda}$. Действительно, предположим противное, т. е. пусть $v \in Q - Q_{<\lambda}$. В силу 4.2.2 (2) можно подобрать такое $\beta \in \omega_1$, $\beta \geqslant \lambda$, и такое [компонентно-дизъюнктное $q \in P^m_\beta$, что $q \geqq v$ (используется также $P_\beta \in \mathrm{Spl}$). Применяя (7), (10) и учитывая определение 4.2, получаем $q \geqq \bigvee Q_{<\lambda}$. Отсюда в силу $P_\beta \in \mathrm{Spl}$ вытекает существование такого $u \in Q_{<\lambda}$ и такого $w \in P^m_\beta$, что $w \geqq q$, $w \geqq u$. Таким образом, $w \geqq u$ и $w \geqq v$, $w \in P^m$. Но u, v — заведомо различные элементы Q ($u \in Q_{<\lambda}$, $v \in Q - Q_{<\lambda}$) — противоречие с выбором Q как антицепи. (11) доказано.

Конец рассуждений в L. Завершаем доказательство теоремы. Из (11) следует (i) и счетность Q в L, а (ii) и (iii) вытекают из (7), (10), определения 4.2 и частей 4.1 (4), 4.1 (5) определения 4.1.

Итак, λ — искомое, теорема доказана.

4.4. Определимость A в $L(A)$. Пусть $\pi = (P_\alpha, \alpha \in (\omega_1)^L)$ — последовательность Енсена, $P = \bigcup_{\alpha\in(\omega_1)^L} P_\alpha$. В [7] с помощью аналога теоремы 4.3 установлено, что если $a \subseteq \omega$ является P-генерическим над L, то в $L(a)$ истинно

$$\{a\} = \bigcap_{\alpha\in(\omega_1)^L} \bigcup_{p\in P_\alpha} \mathrm{Cl}_p.$$

Мы доказываем здесь аналог этого утверждения для расширений типа 3.3.

ТЕОРЕМА. *Пусть* π, P — *такие, как выше, и* $A\subseteq R$ *есть* P-*генерическое множество. Тогда* $(\omega_1)^L=(\omega_1)^{L(A)}$ *и*

$$L(A)\models A=\bigcap_{\alpha\in(\omega_1)^L}\bigcup_{p\in P_\alpha}\mathrm{Cl}_p.$$

Доказательство. Пусть $A=\{a_k : k\in\omega\}$, где $a=(a_k,\ k\in\omega)$ есть P-генерическая (над L) последовательность. Отметим сперва, что всякая конструктивная антицепь в P^ω не более чем счетна в L в силу 4.3. Отсюда обычным путем ([4], лемма 56) получаем: $(\omega_1)^L=(\omega_1)^{L(A)}$. Далее, всякое P_α, $\alpha\in(\omega_1)^L$, предплотно в P по 4.2.1, а всякое a_k является P-генерическим. Применяя 3.2.4, получаем отсюда включение слева направо в утверждении теоремы. Для доказательства обратного включения доказываем лемму:

ЛЕММА 1. *Пусть* $m\in\omega$, $b\subseteq\omega$, $b\notin\{a_0,\ \ldots,\ a_{m-1}\}$ *и* $b\in\bigcup_{p\in P\alpha}\mathrm{Cl}_p$ *для всякого* $\alpha\in(\omega_1)^L$. *Тогда* $b\notin L(a_0,\ \ldots,\ a_{m-1})$.

Доказательство леммы. В силу 3.2.1 достаточно проверить, что $\mathbf{b}=(a_0,\ \ldots,\ a_{m-1},\ b)$ есть P-генерическая $(m+1)$-ка. Пусть $U\in L$, U плотно в P^{m+1}. Выбираем $Q\subseteq U$, $Q\in L$, так, что Q — максимальная антицепь в U. Тогда Q — максимальная антицепь в P^{m+1} (так как U плотно в P^{m+1}). Пусть $\lambda\in(\omega_1)^L$ таково, что выполняется требование 4.3(ii) (существует по теореме 4.3).

Отметим, что $a_0,\ \ldots,\ a_{m+1},\ b$ суть попарно различные ($a_i\neq a_j$ по 3.2.2) элементы множества $\bigcup_{p\in P_\lambda}\mathrm{Cl}_p$ (для b это следует из условия леммы, для a_i — из доказанного выше включения слева направо в теореме). По выбору λ это дает $\mathbf{b}\in\bigcup_{q\in Q}\mathrm{Cl}_q$. Тем более $\mathbf{b}\in\bigcup_{u\in U}\mathrm{Cl}_u$ ($Q\subseteq U$). Это значит, что $G_{\mathbf{b}}\cap U\neq 0$, что и требовалось. Лемма доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Пусть $b\subseteq\omega$ и $b\in\bigcup_{p\in P_\alpha}\mathrm{Cl}_p$ при всяком $\alpha\in(\omega_1)^L$. Покажем, что $b\in A$. Действительно, из 3.4.4 следует $b\in L(a_0,\ \ldots,\ a_{m-1})$ для некоторого $m\in\omega$. Теперь по лемме 1 получаем $b\in\{a_0,\ \ldots,\ a_{m-1}\}$, т. е. $b\in A$. Включение справа налево и теорема доказаны.

4.5. Обеспечение $\mathfrak{Mi}'_n(A)$, $i=4,5,6$. Пусть π, P — такие же, как в 4.4, и $A\subseteq R$ является P-генерическим множеством. Предыдущая теорема показывает, что A определимо в $L(A)$ некоторой $\in$-формулой (с параметром π). Таким образом, наложив на π некоторое условие определимости в L, мы можем ожидать выполнения в $L(A)$ свойств $\mathfrak{Mi}'_n(A)$, $i=4,5,6$, для подходящего n. Сделаем небольшую паузу для ввода некоторых понятий, связанных с $\in$-определимостью в совокупности T *всех наследственно не более чем счетных множеств* (отметим, что $T=L_{\omega_1}$ при выполнении аксиомы конструктивности $V=L$).

Σ_n, Π_n — стандартные обозначения для классов $\in$-формул ([9]). Через Σ_n^T обозначаем совокупность всех $X\subseteq T$, определимых в T некоторой Σ_n

формулой без параметров. Аналогично определяется Π_n^T; $\Delta_n^T = \Sigma_n^T \cap \Pi_n^T$. Имеется замечательная связь между определимостью в T и аналитической определимостью:

Утверждение 1 [([11]), лемма на стр. 281]. *Пусть* $n \geqslant 1$, $X \subseteq R$. *Тогда* $X \in \Sigma_{n+1}^1 \equiv X \in \Sigma_n^T$ *и аналогично для* Π, Δ.

Используем это утверждение для доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. *Пусть* π, P, $A = \{a_k : k \in \omega\}$ — *такие, как выше,* $n \geqslant 2$ *и в* L *истинно* $\pi \in \Sigma_{n-1}^T$. *Тогда в* $L(A)$ *выполняются* $\mathfrak{A}i_n'(A)$, $i = 4, 5, 6$.

Доказательство проводим в $L(A)$. Из теоремы 4.4 следует, что $(\omega_1)^L = \omega_1 (= (\omega_1)^{L(A)})$. Отсюда по условию и из равенства $T = L_{\omega_1}$ в L получаем: $\pi \in \Sigma_{n-1}^{L_{\omega_1}}$ (в $L(A)$).

С другой стороны, $L_{\omega_1} \in \Sigma_1^T$ (см., например, ([7]), доказательство следствия 9). Это дает $\pi \in \Sigma_{n-1}^T$. В силу теоремы 4.4 последнее означает $A \in \Pi_{n-1}^T$. Наконец, используя утверждение 1, получаем $A \in \Pi_n^1$, т. е. $\mathfrak{A}4_n'(A)$ (истинно в $L(A)$).

Переходим к $\mathfrak{A}5_n'(A)$. Пусть $a = a_k \in A$. Из 3.2.2 следует, что $A \cap L(a) = \{a\}$. Отсюда совершенно аналогично доказательству $\mathfrak{A}4_n'(A)$ получаем $L(A) \models \{a\} \in \Pi_n^1$, т. е. $\mathfrak{A}5_n'(A)$.

Рассмотрим наконец $\mathfrak{A}6_n'(A)$. Пусть $k, l \in \omega$, $k \neq l$. Тогда $L(a_k) \cap \{a_l\} = 0$ по 3.2.2, а $L(a_l) \cap \{a_l\} \neq 0$ (очевидно). Достаточно доказать, таким образом, что $\{a_l\} \in \Pi_n^1$ в $L(a_k, a_l)$. Но $\{a_k, a_l\} = A \cap L(a_k, a_l)$ (из 3.2.2); отсюда, как и выше, получаем $\{a_k, a_l\} \in \Pi_n^1$ в $L(a_k, a_l)$. Теперь $L(a_k, a_l) \models \{a_l\} \in \Pi_n^1$ очевидно, что и требовалось. Теорема доказана.

4.6. Обеспечение минимальности элементов A. Объекты π, P, $A = \{a_k : k \in \omega\}$ из 4.5 остаются фиксированными. Докажем, что всякое $a \in A$ будет L-минимальным. Отметим, что предлагаемое доказательство отличается от доказательства минимальности в ([7]).

ТЕОРЕМА. $L(A) \models \mathfrak{A}3(A)$, *т. е. всякое* a_k *будет* L-*минимальным.*

Доказательство. В силу 3.2.3 достаточно доказывать L-минимальность a_0. $a_0 \notin L$ следует из 3.2.2. Пусть теперь $x \in L(a_0) — L$, $x \subseteq \omega$. Докажем, что $a_0 \in L(x)$. Из выбора x ясно, что существует формула $\chi(k)$ языка $\mathscr{L}$ (3.3), содержащая только константу a_0 и константы вида c, $c \in L$ и удовлетворяющая $x = \{k \in \omega : L(a_0) \models \chi^a(k)\}$. Пишем $\Vdash$ вместо $\Vdash_P$ (см. 3.3). Можно считать, что если $p \in P^\infty$, то

$$p \Vdash [\{k \in \omega : L(\underline{a_0}) \models \chi(\underline{k})\} \notin L$$

(если это не так, то рассматриваем формулу $\chi'(k) \rightleftharpoons [\chi(k)$ при $\{k \in \omega : L(\underline{a_0}) \models \chi(\underline{k})\} \notin L$; $k \in a_0$ иначе]). Тогда множество $U = \{(p, q) \in P^2$: для некоторого $k \in \omega$ будет $p \Vdash \chi(\underline{k}) \,\&\, q \Vdash \sim \chi(\underline{k})$ или $p \Vdash \sim \chi(\underline{k}) \,\&\, q \Vdash \Vdash \chi(\underline{k})\}$ плотно в P^2 (в силу 3.4.3 и выбора χ), $U \in L$ (по 3.3.1).

Теперь с помощью выбора максимальной антицепи и теоремы 4.3 аналогично доказательству 4.4 подбираем такое $\lambda\in(\omega_1)^L$, что

(1) *если* $u, v\in P_\lambda$ *и* $u\cap v$ *конечно* (*т. е.* (u, v) *компонентно дизъюнктно*), *то* $(u, v)\geqq\bigvee U$.

Пусть Φ — совокупность всех формул, получающихся из формул вида $\underline{\chi}(\underline{k})$, $k\in\omega$, с помощью знаков $\sim$, &, $\bigvee$. Из (1) и определения U легко следует:

(2) *если* $u, v\in P_\lambda$, $u\cap v$ *конечно, то найдется такая формула* $\varphi\in\Phi$, *что* $u\Vdash\varphi$, *но* $v\Vdash\sim\varphi$.

Далее, для $\varphi\in\Phi$ определяем ее интерпретацию $x\models\varphi$, интерпретируя $\underline{\chi}(\underline{k})$ как $k\in x$. Заметим теперь, что из 4.2.1 и 3.2.4 следует:

$$a_0\in\bigcup_{p\in P_\lambda}\mathrm{Cl}_p.$$

Отсюда с учетом $P_\lambda\in\mathrm{Spl}$, (2) и 3.4.2, 3.3.2 получаем: a_0 есть единственный элемент множества $\bigcap\{\mathrm{Cl}_u: u\in P_\lambda$ и если $\varphi\in\Phi$ и $x\models\varphi$, то $\sim u\Vdash\sim\varphi\}$. Теперь $a_0\in L(x)$ очевидно. Теорема доказана.

§ 5. Язык λ и разветвлённое вынуждение

5.1. Арифметические функции. Теперь мы хотим ввести язык для описания действительных чисел в расширениях вида $L(A)$, где $A\subseteq R$ есть P-генерическое множество, а $P=\bigcup_{\alpha\in(\omega_1)^L}P_\alpha$ для некоторой последовательности Енсена $(P_\alpha, \alpha\in(\omega_1)^L)$. Мы хотим, в частности, чтобы этот язык содержал константы для всех подмножеств ω из $L(A)$.

Известные способы введения «разветвленного» языка и вынуждения (параметрическое пространство ([3]) или булевозначный универсум ([4])) не могут быть использованы по причине большой сложности (в смысле определимости) и «недескриптивного» характера. Мы предлагаем гораздо более простую конструкцию, связанную с использованием арифметических функций в качестве констант для подмножеств множества ω в расширениях вида $L(A)$.

Функцию $F: R\to R$ мы называем *арифметической* (а. ф.), если $\{(x, m): x\subseteq\omega\ \&\ m\in F(x)\}$ — множество класса $\underline{\Sigma}^0_\infty\ (=\bigcup_{n\in\omega}\underline{\Sigma}^0_n)$.

Ясно, что совокупность $\mathscr{F}$ всех а. ф.— континуальное множество, $\mathscr{F}=\{F_f: f\subseteq\omega\}$, причем нумерацию F_f можно подобрать так, что

$$\{(x, f, m): x, f\subseteq\omega\ \&\ m\in F_f(x)\}\in\Delta^1_1. \tag{1}$$

Действительно, всякому $f\subseteq\omega$ можно некоторым каноническим образом сопоставить построение $\underline{\Sigma}^0_\infty$-множества $X_f\subseteq R\times\omega$, исходя из элементарных интервалов; далее F_f полагается равным $\{(x, X_f^{''}\{x\}): x\subseteq\omega\}$. (1) выполняется в силу канонического характера выбора X_f по f.

Продолжим действие F_f на R^m, $m\in\omega$. Если $m\geqslant 1$, то определим гомеоморфизм Φ_m условием $\Phi_m(x_0, \ldots, x_{m-1})=\{mk+i: i<m\&k\in x_i\}$ и по-

лагаем $F_f(x_0, \ldots, x_{m-1}) = F_f(\Phi_m(x_0, \ldots, x_{m-1}))$. Отдельно для $m=0$: $F_f(0) \rightleftharpoons f$.

5.2. ТЕОРЕМА О ПРЕДСТАВЛЕНИИ. *Пусть* $\pi = (P_\alpha, \alpha \in (\omega_1)^L)$ *является последовательностью Енсена,* $P = \bigcup_{\alpha \in (\omega_1)^L} P_\alpha$, $a = (a_k, k \in \omega)$ *есть* P*-генерическая последовательность и* $A = \{a_k : k \in \omega\}$. *В этой ситуации всякое* $x \in R \cap L(A)$ *можно представить в виде а. ф. с конструктивным кодом в смысле следующей теоремы.*

ТЕОРЕМА. *Пусть* $m \in \omega$, $x \in L(a \restriction m)$, $x \subseteq \omega$. *Тогда найдется такое* $f \in L$, $f \subseteq \omega$, *что* $x = F_f(a \restriction m)$.

Доказательство. Пусть $\varphi(k)$ — формула языка $\mathscr{L}$, содержащая из констант только константы вида $\underline{a_k}$, $k < m$, и $\underline{c}$, $c \in \mathscr{L}$, и удовлетворяющая $x = \{k \in \omega : L(A) \models \varphi^a(\underline{k})\}$.

Рассуждаем в L. Определяем $U_k = \{p \in P^m : p \Vdash \varphi(\underline{k})$ или $p \Vdash \sim \sim \varphi(\underline{k})\}$ (индекс P у $\Vdash$ опускается, см. 3.3.). Из 3.4.3 с учетом выбора φ получаем: всякое U_k плотно в P^m. Это позволяет, применяя теорему 4.3, подобрать такую последовательность $(Q_k, k \in \omega)$ счетных максимальных в P^m антицепей, что $Q_k \subseteq U_k$ $\forall k$. Положим

$$Q_k^0 = \{p \in Q_k : p \Vdash \sim \varphi\}, \quad Q_k^1 = \{p \in Q_k : p \Vdash \varphi\} \quad (Q_k^0 \cup Q_k^1 = Q_k),$$

$$Z_k^i = \bigcup_{p \in Q_k^i} \mathrm{Cl}_p.$$

Ясно, что всякое Z_k^i есть $\underline{\Sigma}_2^0$-подмножество множества R^m.

Значит, существует такое $f \subseteq \omega$, что

(1) *если* $z \in Z_k^0 - Z_k^1$, *то* $k \notin F_f(z)$ *и*

(2) *если* $z \in Z_k^1 - Z_k^0$, *то* $k \in F_f(z)$.

Конец рассуждений в L. Докажем, что f — искомое, т. е. $x = F_f(a \restriction m)$. Пусть $k \in x$; покажем, что $k \in F_f(a \restriction m)$. Установим сперва, что:

(3) $G_a \cap Q_k^1 \neq 0$ *и* $G_a \cap Q_k^0 = 0$ (определение G_a см. в 3.2).

Действительно, из 3.2.4 и выбора Q_k как максимальной антицепи в P^m получаем $Q_k \cap G_a \neq 0$. Пусть $q \in Q_k \cap G_a$. Из $k \in x$, выбора φ и 3.3.2 следует: $q \in Q_k^1 - Q_k^0$, что и означает искомое. (3) доказано. Теперь, определяя

$$Y_k^i = \bigcup_{p \in Q_k^i} \mathrm{Cl}_p$$

(аналог Z_k^i в универсуме), получаем из (3):

(4) $a \restriction m \in Y_k^1 - Y_k^0$.

Заметим наконец, что (2) эквивалентно некоторой Π_1^1-формуле с параметрами из L (одной и той же в L и в универсуме). С учетом принципа абсолютности (см. 2.1) это дает:

(5) *если* $z \in Y_k^1 - Y_k^0$, *то* $k \in F_f(z)$ (*в универсуме*).

Из (4) и (5) и получаем $k \in F_f(z)$.

Вывод $k\notin x\to k\notin F_f(z)$ аналогичен. Итак, f — искомое, теорема доказана.

5.3. λ-формулы. Доказанная теорема дает основание ввести разветвленный язык для описания элементов $R\cap L(A)$, используя в качестве констант типа 1 (т. е. для R) арифметические функции с кодом из L (точнее, мы используем сами коды, придавая им смысл а. ф.). Точное определение таково.

Пусть $n\geqslant 1$. Через $\Sigma\lambda_n^1$ обозначается «расширение» совокупности всех Σ_n^1-формул (без констант) с помощью:

(1) *разрешения брать символы вида* l, $l\in\omega$, *в качестве констант типа* 0 *и символы вида* m^*f, *где* $m\in\omega$, $f\in R\cap\bar{L}$,— *в качестве констант типа* 1;

(2) *разрешения снабжать некоторые кванторы типа* 1 *индексами* из ω.

При этом потребуем:

(3) *кванторы типа* 1, *входящие в самый правый блок таких кванторов, не имеют индекса.*

Аналогично определяем $\Pi\lambda_n^1$. Формулы, входящие в $\Sigma\lambda_n^1$ или $\Pi\lambda_n^1$ для какого-нибудь $n\geqslant 1$, называем λ-формулами. Отметим, что λ-формулы конструктивны (т. е. их записи — конструктивные кортежи), так как всякая константа m^*f удовлетворяет $f\in L$.

Пусть φ есть λ-формула. Через $\|\varphi\|$ обозначаем наименьшее из таких $m_0\in\omega$, что: (i) если m^*f входит в φ, то $m\leqslant m_0$, и (ii) если квантор с индексом m входит в φ, то $m\leqslant m_0$. Через $|\varphi|$ обозначаем наименьшее из таких $m_0\in\omega$, что выполняется (i) ($|\varphi|\leqslant\|\varphi\|$). Если $\varphi\in\Sigma\lambda_n^1$, то через φ^- обозначаем результат канонического приведения $\sim\varphi$ к $\Pi\lambda_n^1$-виду; аналогично для $\varphi\in\Pi\lambda_n^1$.

Перейдем к интерпретации λ-формул. Пусть φ есть λ-формула, $a\in{}^\omega R$. Определяем φ^a как результат замены в φ всех констант вида l и m^*f на l и $F_f(a\restriction m)$ соответственно (определение $a\restriction m$ в 3.1) и кванторов вида $\exists(\forall)_m x$ на $\exists(\forall)x\in R\cap L(a\restriction m)$ (кванторы без индексов не меняются). Отметим, что если при этом $\varphi\in\Sigma\lambda_1^1\cup\Pi\lambda_1^1$, то φ^a — формула арифметики второго порядка с параметрами из $R\cup\omega$ (следует из (3)).

5.4. Вынуждение forc. Определяемое ниже отношение вынуждения forc для λ-формул мы не связываем формально с истинностью в P-генерических расширениях вида $L(A)$ для какого-либо P. Однако можно показать, что на самом деле оно соответствует $(\mathrm{Perf}\cap L)$-генерическим расширениям указанного вида (это обстоятельство полезно иметь в виду, хотя нигде в дальнейшем оно использоваться не будет).

Определяем отношение $p\,\mathrm{forc}\,\varphi$, где предполагается, что φ есть замкнутая λ-формула, а $p\in\mathrm{Perf}^\infty\cap L$, индукцией по сложности φ: (1) *Если* $\varphi\in\Sigma\lambda^1\cup\Pi\lambda_1^1$ *и для всякого* $a\in{}^\omega R$, *удовлетворяющего* $a\restriction\|p\|\in\mathrm{Cl}_p$, *истинно* φ^a, *то* p forc φ (как указано в 5.3, φ^a будет формулой арифметики второго порядка с параметрами из $R\cup\omega$ при $\varphi\in\Sigma\lambda_1^1\cup\Pi\lambda_1^1$ и поэтому можно говорить об истинности φ^a).

(2) *Если* φ *есть* $\exists_m x\psi(x)$, $\psi \in \Sigma\lambda^1_{k+1} \cup \Pi\lambda^1_k$, $k \geqslant 1$, *то*
$p \operatorname{forc} \varphi \rightleftharpoons$ (*существует такое* $f \in R \cap L$, *что* $p \operatorname{forc} \psi(m^*f)$).

(3) *Если* φ *есть* $\exists x\psi(x)$, $\psi \in \Sigma\lambda^1_{k+1} \cup \Pi\lambda^1_k$, $k \geqslant 1$, *то*
$p \operatorname{forc} \varphi \rightleftharpoons$ (*существуют такие* m *и* $f \in R \cup L$, *что* $p \operatorname{forc} \psi(m^*f)$).

(4) *Если* $\varphi \in \Pi\lambda^1_k$, $k \geqslant 2$, *то*
$p \operatorname{forc} \varphi \rightleftharpoons$ (*для всякого* $q \in \mathrm{Perf}^\omega \cap L$, $q \geqq p$, *не имеет места* $q \operatorname{forc} \varphi^-$).

В (2) и (3) x — переменная типа 1.

5.5. Некоторые свойства forc.

1. *Отношение* forc *выразимо в* L; *более того*, $[p \operatorname{forc} \varphi] \equiv [L \models p \operatorname{forc} \varphi]$.

Действительно, в записи $p \operatorname{forc} \varphi$ по определению 5.3 предполагается конструктивность p и (записи) φ. Далее, утверждение $(\forall a \in {}^\omega R)[a \restriction \|p\| \in \mathrm{Cl}_p \to \varphi^a$ *истинно*], записанное в 5.4 (1), есть, очевидно, формула класса Π^1_1 (для $\varphi \in \Pi\lambda^1_1$) или Π^1_2 (для $\varphi \in \Sigma\lambda^1_1$) с конструктивными параметрами. Таким образом, это утверждение абсолютно при релятивизации к L (см. принцип абсолютности из 2.1). Отсюда получаем искомое для $\varphi \in \Sigma\lambda^1_1 \cup \Pi\lambda^1_1$. Если же формула φ более сложна, то проводим доказательство индукцией по сложности φ, учитывая очевидную абсолютность определений 5.4 (2, 3, 4). Подробности тривиальны и оставляются читателю.

В следующих утверждениях фиксируем замкнутую λ-формулу φ и некоторое $p \in \mathrm{Perf}^\omega \cap L$.

2. $p \operatorname{forc} \varphi$ *и* $p \operatorname{forc} \varphi^-$ *не могут выполняться одновременно.*

3. *Если* $\varphi \in \Pi\lambda^1_k$, $k \geqslant 2$, *и* $\sim p \operatorname{forc} \varphi$, *то найдется такое* $q \in L \cap \mathrm{Perf}^\omega$, *что* $q \geqq p$, *и* $q \operatorname{forc} \varphi^-$.

4. *Если* $q \in \mathrm{Perf}^\omega \cap L$ *и* $q \geqslant p$, $p \operatorname{forc} \varphi$, *то* $q \operatorname{forc} \varphi$.

5. *Если* $\|p\| \leqslant k \in \omega$, *то* $p \operatorname{forc} \varphi \equiv p \restriction k \operatorname{forc} \varphi$.

Доказательство 2 — 4 тривиально, а 5 легко доказывается индукцией по сложности φ с учетом определения $p \restriction k$ в 3.1 (при $k \geqslant \|p\|$ и $a \in {}^\omega R$ выполняется $a \restriction k \in \mathrm{Cl}_{p \restriction k} \equiv a \restriction \|p\| \in \mathrm{Cl}_p$; таким образом, p и $p \restriction k$ несут «одинаковую информацию в смысле forc»).

5.6. Теорема о сужении. Мы хотим доказать в этом пункте утверждение, аналогичное 3.4.2 (для forc). Будет доказано, что отношение $p \operatorname{forc} \varphi$ зависит фактически только от $p \restriction |\varphi|$. Заметим попутно, что в запись φ^a могут входить и a_i с $i > |\varphi|$ (за счет индексов при кванторах типа 1); поэтому следующая теорема выражает более глубокий факт, чем 3.4.2 (непосредственный аналог 3.4.2 должен был бы включать $\|\varphi\|$, а не $|\varphi|$).

ТЕОРЕМА. *Пусть* φ *есть замкнутая* λ*-формула*, $p \in \mathrm{Perf}^\omega \cap L$, $\|p\| \geqslant |\varphi| = m$. *Тогда* $p \operatorname{forc} \varphi$ *и* $p \restriction m \operatorname{forc} \varphi$ *выполняются одновременно.*

Доказательство проводим в L (это допустимо в силу 5.5.1). Ясно, что $p \restriction m \leqq p$. Отсюда и из 5.5.4 легко вытекает импликация справа налево в условии теоремы.

Для доказательства обратной импликации рассмотрим некоторые порядковые автоморфизмы множества Perf^ω (равного $\mathrm{Perf}^\omega \cap L$, так как

доказательство проходит в L) и их продолжения на арифметические функции (а. ф.) и λ-формулы. Введем соответствующие определения.

Если $l\in\omega$, $p=(p_0,\ldots,p_{l-1})$, $q=(q_0,\ldots,q_{l-1})$ — элементы множества Perf^l и последовательность $\eta=(H_i, i\in\omega)$ такова, что каждое H_i есть гомеоморфизм Cl_{p_i} на Cl_{q_i} при $i<l$ и гомеоморфизм R на R при $i\geqslant l$, то пишем $\eta\in\mathrm{Hom}_{pq}$. Если при этом $l\geqslant m$ и $H_i=\{(x, x) : x\in\mathrm{Cl}_{p_i}\}$ (т. е., в частности, $p_i=q_i$) выполняется при всех $i<m$, то η называем *m-сохраняющим*. Следующее утверждение очевидно:

1. *Если* $p, q\in\mathrm{Perf}^l$, $m\leqslant l$ *и* $p\restriction m=q\restriction m$, *то найдется m-сохраняющее* $\eta\in\mathrm{Hom}_{pq}$.

Пусть теперь p, $q\in\mathrm{Perf}^l$, $\eta=(H_i,\ i\in\omega)\in\mathrm{Hom}_{pq}$ фиксировано. Для $k\in\omega$ можно определить гомеоморфизм $H_{<k}:\mathrm{Cl}_{p\restriction k}\xrightarrow{\text{на}}\mathrm{Cl}_{q\restriction k}$ условием

$$H_{<k}(x_0,\ \ldots\ ,\ x_{k-1})=(H_0(x_0),\ \ldots\ ,\ H_{k-1}(x_{k-1})).$$

Если при этом $u\in\mathrm{Perf}^k$, $u\geqslant p$, то множество $H''_{<k}\,\mathrm{Cl}_u$ имеет, очевидно, вид Cl_v для некоторого (единственного) $v\in\mathrm{Perf}^k$, $v\geqq q$; обозначаем $v=[\eta]_1(u)$. Имеем:

2. $[\eta]_1$ — *биекция* $\{u\in\mathrm{Perf}^\infty: u\geqq p\}$ *на* $\{v\in\mathrm{Perf}^\infty: v\geqq q\}$, *сохраняющая* $\leqq u\parallel\ldots\parallel$; $[\eta]_1(p)=q$ (очевидно из определений).

Продолжим действие η на а. ф.. Если $f\subseteq\omega$, $F=F^k_f$ (см. 5.1), то мы можем определить функцию F' из R^k в R условием $F'(H_{<k}(x))=F(x)$ при $x\in\mathrm{Cl}_{p\restriction k}$ и $F'(y)=y$ при $y\notin\mathrm{Cl}_{q\restriction k}(=H''_{<k}\mathrm{Cl}_{p\restriction k})$. Ясно, что F' — а. ф. (из R^k в R), т. е. $F'=F^k_{f'}$ для некоторого (не единственного) $f'\subseteq\omega$; одно из таких f' обозначаем через $[\eta]^k_2(f)$. Отметим такой факт:

3. *Пусть* $k\leqslant m\leqslant l$, η *является m-сохраняющим и* $f\subseteq\omega$. *Тогда имеет место* $F^k_f=F^k_{f'}$, где $f'=[\eta]^k_2(f)$.

Это позволяет дополнительно потребовать:

4. *В ситуации* 3 *выполняется* $[\eta]^k_2(f)=f$.

Продолжим, наконец, действие η на λ-формулы. Если φ есть λ-формула, то через $[\eta]_3\varphi$ обозначаем результат замены в φ всякой константы m^*f на m^*f', где $f'=[\eta]^k_2(f)$. Нетрудно проверить:

5. *Если* $u\in\mathrm{Perf}^\infty$, $u\geqq p$, $k=\|u\|$; $a, a'\in{}^\omega R$, $a\restriction k\in\mathrm{Cl}_u$, $a'\restriction k=H_{<k}(a\restriction k)$, *то* φ^a *совпадает с* $\varphi'^{a'}$, *где* $\varphi'=[\eta]_3\varphi$.

Утверждение 6 (инвариантность forc). *Пусть* $p, q\in\mathrm{Perf}^l$, $\eta\in\mathrm{Hom}_{pq}$, $u\in\mathrm{Perf}^\infty$, $u\geqq p$, φ *есть λ-формула*, $u'=[\eta]_1(u)$, $\varphi'=[\eta]_3\varphi$. *Тогда* u forc φ *и* u' forc φ' *выполняются одновременно.*

Доказательство проходит с помощью тривиальной индукции по сложности φ с учетом определения 5.4. При этом в случае $\varphi\in\Sigma\lambda^1_1\cup\Pi\lambda^1_1$ искомое следует из утверждения 5, переход $\Pi\lambda^1_n\to\Sigma\lambda^1_{n+1}$ очевиден (нужно использовать операторы $[\eta]^k_2$), а переход $\Sigma\lambda^1_n\to\Pi\lambda^1_n$, $n\geqslant 2$, осуществляется с помощью утверждения 2. Подробности оставляются читателю.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Пусть m, p, φ — объекты из условия теоремы и p forc φ; докажем $p\restriction m$ forc φ. Полагаем $q=(p\restriction m)\frown l$,

где $l=\|p\|\,(\geqslant m)$. Ясно, что $p\restriction m=q\restriction m$, $\|p\|=\|q\|=l$. Применяя 1, находим m-сохраняющее $\eta\in \mathrm{Hom}_{pq}$. Из p forc φ и утверждения 6 (при $u=p$) следует $[\eta]_1(p)$ forc $[\eta]_3\varphi$. Но $[\eta]_1(p)=q$ по 2, а $[\eta]_3\varphi=\varphi$ по 4 и в силу $|\varphi|=m$. Таким образом, q forc φ. Отсюда и из 5.5.5 с учетом определения q получаем $q\restriction m$ forc φ, т. е. $p\restriction m$ forc φ, что и требовалось. Теорема доказана.

§ 6. Консервирующие последовательности

6.1. Определение и формулировка основного свойства консервирующих последовательностей. Сперва — некоторая интуитивная мотивировка. Пусть $P=\bigcup\limits_{\alpha} P_\alpha$; $(P_\alpha, \alpha\in(\omega_1)^L)$ является последовательностью Енсена, $a=(a_k, k\in\omega)$ есть P-генерическая (над L) последовательность элементов R, $A=\{a_k: k\in\omega\}$. Какие свойства P могут гарантировать выполнение $\mathfrak{A}i''_n(A)$, $i=4, 5, 6$, в $L(A)$?

Можно доказать, что истинность в $L(A)$ упомянутых утверждений вытекает из следующего общего требования:

(*). *Пусть* $\varphi(k)\in\Sigma\lambda^1_n$, k *— единственная свободная переменная* φ *(типа* 0) *и* $m=|\varphi|$. *Тогда* $\{k\in\omega : L(A)\models\varphi^a(k)\}\in L(a\restriction m)$.

Например, та часть $\mathfrak{A}5''_n(A)$, которая утверждает конструктивность всякого элемента R из $\Sigma^{1,L}_n$, прямо вытекает из (*) при $m=0$.

Но как обеспечить (*)? Если мы докажем, что forc и истинность в $L(A)$ согласованы (по типу 3.3.2) до $\Sigma\lambda^1_n$-формул, то в свете теоремы 5.6 можно ожидать выполнения (*).

Как теперь, в свою очередь, обеспечить упомянутую согласованность? Для формул из $\Sigma[\lambda^1_1]\cup\Pi\lambda^1_1$ согласованность следует из определения 5.4 (1) и принципа абсолютности (см. 2.1). Теорема 5.2 обеспечивает её сохранение при переходе $\varphi(x)\mapsto\exists_m x\,(\exists x)\varphi(x)$. Но при переходе $\varphi^-\mapsto\varphi$, $\varphi\in\Pi\lambda^1_k$, $k\geqslant 2$, трудно ожидать сохранения согласованности, поскольку в определении 5.4 (4) записано $q\in\mathrm{Perf}^\infty\cap L$, а не $q\in P^\infty$. Таким образом, для сохранения согласованности при указанном переходе мы должны потребовать свойство типа «элементарной эквивалентности» P^∞ и $\mathrm{Perf}^\infty\cap L$. Это реализуется в следующем определении.

Последовательность Енсена $(P_\alpha, \alpha\in(\omega_1)^L)$ *называется* n*-консервирующей последовательностью* (n*-к.п.*), *если для всякого* $p\in P^\infty$ (*где* $P=\bigcup\limits_{\alpha\in(\omega_1)^L} P_\alpha$) *и всякой замкнутой формулы* $\varphi\in\bigcup\limits_{1\leqslant k<n}\Pi\lambda^1_k$ *найдется такое* $q\in P^\infty$, *что* $q\geqslant p$ *и либо* q forc φ, *либо* q forc φ^-.

В силу 5.5.1 формула «быть n-к. п.» абсолютна при релятивизации к L.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $n\geqslant 2$, $(P_\alpha, \alpha\in(\omega_1)^L)$ *есть* n*-к. п.*; P, a, $A=\{a_k : k\in\omega\}$ *— такие же, как выше. Тогда в* $L(A)$ *истинно* $\mathfrak{A}i''_n(A)$, $i=4, 5, 6$.

Доказательству этой теоремы посвящена оставшаяся часть § 6. Кратко опишем схему доказательства. В 6.2 с помощью теоремы 5.2 доказы-

вается согласованность forc и истинности в $L(A)$ до $\Sigma\lambda^1_n$-формул. Отсюда и из 5.6 легко следует выполнение утверждения (*) (6.3). Наконец, в 6.4, 6.5, 6.6 доказывается истинность $\mathfrak{Ai}''_n(A)$, $i=4, 5, 6$, в $L(A)$ с помощью уже установленного (*).

Объекты $P, a, A=\{a_k : k\in\omega\}$ из условия теоремы фиксируются в 6.2—6.6.

6.2. ТЕОРЕМА (о связи forc и истинности). *Пусть* $1\leqslant k\leqslant n$ *и* $\varphi\in\Sigma\lambda^1_k$ *замкнута. Тогда* φ^a *истинно в* $L(A)$, *если и только если найдется такое* $p\in G_a$, *что* p forc φ (ср. 3.3.2).

Доказательство начинаем с такой вспомогательной леммы.

ЛЕММА 1. *Найдется такое* $p\in G_a$, *что* p forc φ *или* p forc φ^-.

Доказательство леммы. По определению n-к. п., множество $Q=\{p\in P^\infty : p \text{ forc } \varphi \text{ или } p \text{ forc } \varphi^-\}$ плотно в P^∞, а из 5.5.1 следует, что $Q\in L$. Отсюда и из определения P-генерической последовательности (3.2) имеем искомое.

Переходим к доказательству теоремы индукцией по $k\geqslant 1$.

2. $k=1$. Пусть сперва $p\in G_a$, p forc φ; доказываем, что $L(A)\models\varphi^a$. По определению 5.4(1) p forc φ означает, что φ^b истинно при любом $b\in{}^\omega R$, удовлетворяющем $b\restriction\|p\|\in \mathrm{Cl}_p$. В частности, φ^a истинно ($a\restriction\|p\|\in\mathrm{Cl}_p$ в силу $p\in G_a$). Но φ^a есть, очевидно, Σ^1_1-формула с параметрами из $L(A)$. Значит, по принципу абсолютности (см. 2.1), φ^a истинно в $L(A)$, что и требовалось. Импликация справа налево доказана.

Наоборот, пусть $L(A)\models\varphi^a$. Предположим, что таких $p\in G_a$, что p forc φ, нет. Тогда по лемме 1 найдется $p\in G_a$, удовлетворяющее p forc φ^-. Как и выше, отсюда следует, что $L(A)\models\varphi^{-a}$, т. е. $L(A)\models\sim\varphi^a$, но это противоречит предположению $L(A)\models\varphi^a$.

Случай $k=1$, таким образом, рассмотрен.

3. Предположим, что теорема доказана для некоторого k, $1\leqslant k<n$, и докажем ее для формулы φ из $\Sigma\lambda^1_{k+1}$. Будем для простоты считать, что $\varphi=\exists_m x\psi(x)$ (x — переменная типа 1), $m\in\omega$, $\psi\in\Pi\lambda^1_k$, т. е. самый левый блок кванторов φ содержит всего один квантор $-\exists_m x$ (общий случай нескольких кванторов $\exists$ типа 1 совершенно аналогичен).

Доказываем слева направо. Пусть $L(A)\mid\!\!=\varphi^a$. Согласно определению 5.3 это означает, что найдётся такое $x\in R\cap L(a\restriction m)$, что $L(A)\mid\!\!=\psi^a(x)$. В силу теоремы 5.2 x имеет вид $F^m_f(a\restriction m)$ для некоторого $f\in R\cap L$. Таким образом, $L(A)\mid\!\!=\psi^a(F^m_f(a\restriction m))$, т. е. $L(A)\mid\!\!=\psi(m^*f)^a$, и, наконец, $\sim L(A)\mid\!\!=\psi(m^*f)^{-a}$. Применяя к формуле $\psi(m^*f)^-\in\Sigma\lambda^1_k$ индуктивное предположение и учитывая лемму 1, имеем: найдется такое $p\in G_a$, что p forc $\psi(m^*f)$, т. е. p forc φ (по 5.4(2)). Импликация слева направо доказана.

Наоборот, пусть $p\in G_a$, p forc φ. По 5.4(2) это означает, что p forc $\psi(m^*f)$ для некоторого $f\in R\cap L$. Докажем, что

$$L(A)\mid\!\!=\psi(m^*f)^a. \tag{1}$$

Действительно, в противном случае $L(A) \models \psi(m^*f)^{-a}$. Вновь применяя к $\psi(m^*f)^-$ индуктивное предположение, находим такое $q \in G_a$, что $q \operatorname{forc} \psi(m^*f)^-$. Заметим, что G_a — фильтр (см. 3.2), т. е. найдется такое $r \in G_a$, что $r \geqq p$ и $r \geqq q$. Вместе с 5.5.4 это дает $r \operatorname{forc} \psi(m^*f)$ и $r \operatorname{forc} \psi(m^*f)^-$, что противоречит 5.5.2. Противоречие доказывает (1).

Но (1) означает, что в $L(A)$ истинно $\psi^a(x)$, где $x = F_f^m\ (a \restriction m)$. Из $f \in \boldsymbol{L}$ и 5.1(1) легко следует $x \in L(a \restriction m)$. Отсюда и получаем $L(A) \models (\exists_m x \psi(x))^a$, т. е. $L(A) \models \varphi^a$, что и требовалось.

Индуктивный шаг сделан, теорема доказана.

6.3. Доказательство утверждения (*) из 6.1. Отметим сперва такое усиление теоремы 6.2.

ЛЕММА 1. *Пусть $\varphi \in \Sigma\lambda_n^1$ замкнута. Тогда φ^a истинно в $L(A)$, если и только если найдется такое $p \in G_a \cap P^{|\varphi|}$, что $p \operatorname{forc} \varphi$.*

Доказательство легко следует из 5.6 и 6.2

ТЕОРЕМА 2 ((*) из 6.1). *Пусть $\varphi(k) \in \Sigma\lambda_{n+1}^1$ есть формула с единственной свободной переменной k (типа 0). Тогда множество $z = \{k \in \omega : L(A) \models \varphi^a(k)\}$ принадлежит $L(a \restriction m)$.*

Доказательство. Из леммы 1 следует: $z = \{k \in \omega$: *найдется такое* $p \in P^m$, *что* $a \restriction m \in \mathrm{Cl}_p$ *и* $p \operatorname{forc} \varphi(k)\}$. Отсюда с учетом 5.5.1 легко получаем искомое.

Получим еще одно следствие леммы 1. Перед формулировкой отметим, что $p \restriction 0 = 0$ и $a \restriction 0 \in \mathrm{Cl}_{p \restriction 0}$ для любого $p \in \mathrm{Perf}^\infty$ (см. 3.1).

Следствие 3 (переформулировка леммы 1 при $|\varphi| = 0$) *Пусть $\varphi \in \Sigma\lambda_n^1$ замкнута и $|\varphi| = 0$. Тогда φ^a истинно в $L(A)$, если и только если* $0 \operatorname{forc} \varphi$.

6.4. ТЕОРЕМА. $\mathfrak{A}4_n''(A)$ *истинно в* $L(A)$.

Доказательство. Пусть $X \subseteq R$, $X \in L(A)$, $X \in \underline{\Sigma}_n^1$ в $L(A)$, и X не содержит лежащих в $L(A)$ подмножеств, равномощных ω; докажем, что X конечно. Подберем сперва $\Sigma\lambda_n^1$-формулу, определяющую множество X в $L(A)$.

По выбору X найдутся такая Σ_n^1-формула $\varkappa(x, y)$ (без параметров) и такое $y \in L(A)$, что $X = \{x \in R \cap L(A) : L(A) \models \varkappa(x, y)\}$. Используя 3.4.4 и 5.2, находим такое $f \in R \cap L$, что $y = F_f^m\ (a \restriction m)$. Рассмотрим $\Sigma\lambda_n^1$-формулу $\theta(x) \rightleftharpoons \varkappa(x, m^*f)$. Из определений 5.3 и выбора f ясно, что $\theta^a(x)$ совпадает с $\varkappa(x, y)$. Таким образом, $X = \{x \in L(A) \cap R : L(A) \models \theta^a(x)\}$. Заметим также, что $|\theta| = m$ по определению θ. Докажем два вспомогательных утверждения.

1. *Если $l \in \omega$, то $X \cap L(a \restriction l)$ конечно.*

В самом деле, класс $L(a \restriction l)$ имеет в $L(A)$ каноническое полное упорядочение, а X не содержит подмножеств, равномощных ω и лежащих в $L(A)$.

2. *Если $l \in \omega$, то $X \cap L(a \restriction l) \subseteq L(a \restriction m)$.*

Достаточно доказать это утверждение для $l \geqq m$. Обозначим $X' = X \cap L(a \restriction l)$ и предположим противное, т. е. пусть $x \in X' - L(a \restriction m)$. В силу конечности X' (согласно 1) существуют такие $s_0, \ldots, s_j, s_0', \ldots$

$\ldots, s_j' \in \omega$, что x будет единственным элементом X', содержащим всякое s_i, но не содержащим никакого s_i', $i \leqslant j$. Пусть $\varphi(k)$ — результат канонического приведения формулы

$$\exists_l x\,[\theta(x) \,\&\, \underline{s}_0, \ldots, \underline{s}_j \in x \,\&\, \underline{s}_0', \ldots, \underline{s}_j' \notin x \,\&\, k \in x]$$

к $\Sigma\lambda_n^1$-виду. Тогда из определений 5.3, выбора s_i и s_i' и определения X' легко следует: $x = \{k \in \omega : L(A) \models \varphi^a(k)\}$. Заметим, что $|\varphi| = |\theta| = m$ по построению φ (индекс l не входит в определение $|\varphi|$, см. 5.3). Применяя 6.3.2, получаем отсюда $x \in L(a \restriction m)$, что, очевидно, противоречит выбору x. Противоречие доказывает 2.

Теперь из 2 и 3.4.4 получаем: $X \subseteq L(a \restriction m)$, после чего конечность X вытекает из 1. Теорема доказана.

6.5. ТЕОРЕМА. $\mathfrak{A}5_n''(A)$ *истинно в* $L(A)$.

Доказательство. Пусть $a = a_i \in A$, $x \in R \cap L$, $y \in R \cap L(a)$ и $y \in \Sigma_n^{1,x}$ в $L(a)$. Докажем, что $y \in L$ и $y \in \Sigma_n^{1,x}$ в L. В силу равноправия всех a_i (3.2.3) считаем $i = 0$, т. е. $a = a_0$. Пусть $\psi(k)$ есть Σ_n^1-формула с параметром x, определяющая y в $L(a_0)$, т. е. $y = \{k \in \omega : L(a_0) \models \psi(k)\}$. Определяем следующим образом формулу $\varphi(k) \in \Sigma\lambda_n^1$:

(1) *Меняем в* ψ *всякое вхождение* x *на* 0^*x (отметим здесь, что $F_x^0(a \restriction 0) = F_x^0(0) = x$ согласно определению 5.1).

(2) *Всякий квантор* ψ *типа* 1 *из самого правого блока таких кванторов оставляем без индекса.*

(3) *Все остальные кванторы* ψ *типа* 1 *снабжаем индексом* 1.

Нетрудно проверить, что

$$[L(A) \models \varphi^a(k)] \equiv [L(a_0) \models \psi(k)]$$

при любом $k \in \omega$ (действительно, квантор $\exists(\forall)_1 z$ есть релятивизация к $L(a_0) = L(a \restriction 1)$ квантора $\exists(\forall)z$ согласно определению 5.3; кванторы, упомянутые в (2), можно не релятивизовать в силу принципа абсолютности из 2.1; а константа 0^*x, входящая в φ, превращается в формуле φ^a в параметр x, как указано в (1)). Таким образом,

$$y = \{k \in \omega : L(A) \models \varphi^a(k)\} = \{k : 0 \text{ forc } \varphi(\underline{k})\}$$

(второе равенство — по 6.3.3; $|\varphi| = 0$ очевидно из построения φ). Отсюда и из 5.5.1 следует $y \in L$.

Для доказательства $y \in \Sigma_n^{1,x}$ в L воспользуемся следующим утверждением, которое нам удобно доказать в § 7.

(*). *В* L *истинно* $\{k \in \omega : 0 \text{ forc } \varphi(\underline{k})\} \in \Sigma_n^{1,x}$ (см. 7.5.4).

Из (*) легко получаем: $y \in \Sigma_n^{1,x}$ в L. Теорема доказана.

6.6. ТЕОРЕМА. $\mathfrak{A}6_n''(A)$ *истинно в* $L(A)$.

Доказательство. Нужно доказать, что если $i, j \in \omega$, $Z \in L(a_i, a_j)$ является множеством класса $\Sigma_n^{1,L}$ в $L(a_i, a_j)$, $Z \subseteq R$ и $Z \cap L(a_i) \neq 0$, то $Z \cap L(a_j) \neq 0$. В силу 3.2.3 можно считать $i = 0$, $j = 1$.

Пусть, таким образом, $Z\in L(a_0, a_1)$, $Z\subseteq R$, $Z\cap L(a_0)\neq 0$ и в $L(a_0, a_1)$ имеет место $Z\in\Sigma_n^{1,L}$; докажем, что

$$Z\cap L(a_1)\neq 0. \tag{1}$$

Как и в доказательстве теоремы 6.5, подбираем такую формулу $\varphi(x)\in\Sigma\lambda_n^1$, что $|\varphi|=0$, всякий квантор φ типа 1, кроме входящих в самый правый блок этих кванторов, имеет индекс 2 (это соответствует релятивизации к $L(a\restriction 2)=L(a_0, a_1)$) и, наконец, $L(A)\models Z=\{x\subseteq\omega\colon \varphi^a(x)\}$. Тогда $Z\cap L(a_0)\neq 0$ означает, что $(\exists_1 x\varphi(x))^a$ истинно в $L(A)$ (так как $L(a_0)=L(a\restriction 1)$), т. е. $0\,\mathrm{forc}\,\exists_1 x\varphi(x)$ (по 6.3.3). Пусть теперь $b=(b_l,\ l\in\omega)\in{}^\omega R$ таково, что $a_1=b_0$, $a_0=b_1$ и $b_l=a_l$ при $l\geqslant 2$. Тогда b будет P-генерической последовательностью по 3.2.3 и выполняется $A=\{b_l\colon l\in\omega\}$. Отсюда, применяя 6.3.3 (к b вместо a) в обратном направлении, получаем: $L(A)\models(\exists_1 x\varphi(x))^b$, т. е.

$$(\exists\, x\in R\cap L(b_0))\,[L(A)\models\varphi^b(x)].$$

Отметим теперь, что $b_0=a_1$ по определению b, а φ^b совпадает с φ^a в силу выбора φ. Значит, последнее утверждение мы можем переписать в таком виде:

$$(\exists\, x\in R\cap L(a_1))\,[L(A)\models\varphi^a(x)],$$

т. е. $L(a_1)\cap X\neq 0$ (по выбору φ), что и требовалось. (1) и теорема доказаны.

Соединяя теоремы 6.4, 6.5 и 6.6, получаем доказательство теоремы 6.1.

§ 7. Доказательство основной теоремы

Учитывая результаты 3.4, 4.5, 4.6 и 6.1, мы видим, что для доказательства ОТ при фиксированном $n\geqslant 2$ достаточно построить n-консервирующую последовательность Енсена π, удовлетворяющую $\pi\in\Sigma_{n-1}^T$ в L, а также доказать утверждение (*) из 6.5. Имея такую π и применив 3.2.5, нетрудно получить множество $A\subseteq R$ с требуемыми в условии ОТ свойствами.

В этом параграфе предлагается метод построения π указанного вида. Построение π осуществляется средствами L в виде некоторого трансфинитного процесса.

Начнем со следующей теоремы, утверждающей существование расщеплений (см. 4.1).

7.1. Теорема о расщеплениях. Перед ее формулировкой докажем следующую лемму.

ЛЕММА 1. *Пусть* $P\in\mathrm{Spl}$ *и* Ξ — *счетны. Тогда существует счетное расщепление множества* P *над* Ξ.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что P и Ξ — элементы совокупности T всех наследственно счетных множеств. Определяем $\mathbf{F}$ как совокупность всех конечных (как множества) функ-

ций $f\subseteq(\omega\times{}^{<\omega}2)\times P$, удовлетворяющих свойству: если $(k,e)\in\mathrm{dom}(f)$, $e'\in{}^{<\omega}2$, $e'\subseteq e$, то $(k,e')\in\mathrm{dom}(f)$ и $f(k,e)\subseteq f(k,e')$.

Множество $\mathbf{G}\subseteq\mathbf{F}$ назовем *плотным* в $\mathbf{F}$, если $(\forall f\in\mathbf{F})(\exists g\in\mathbf{G})[f\subseteq g]$. В ([7]) показано, что можно построить такую «тотальную» функцию S из $\omega\times{}^{<\omega}2$ в P, что выполняются условия:

(1) $S(k,e)\subseteq S(k,e')$ *при* $e'\subseteq e$;

(2) *если* $\mathbf{G}\subseteq\mathbf{F}$ *плотно в* $\mathbf{F}$ *и определимо в* T *некоторой* $\in$*-формулой с параметрами из* $P\cup\Xi$ (*счетное число параметров*), *то найдется* $f\in G$ *такое, что* $f\subseteq S$ (т. е. $f=S\,|\,\mathrm{dom}(f)$).

Положим теперь

$$q_k=\bigcap_{m\in\omega}\bigcup_{e\in{}^{m}2}S(k,e).$$

Из (1) и (2) следует, что $q_k\in\mathrm{Perf}$ при любом k [см. ([7])]. Таким образом, $Q=\{q_k\cap\langle e\rangle : k\in\omega\&e\in q_k\}\in\mathrm{Spl}$ и Q счетно. Покажем, что Q будет расщеплением P над Ξ. Действительно, 4.1(1, 2, 3) легко следуют из (1) и (2) (например, для доказательства 4.1(1) достаточно проверить, что $\mathbf{G}=\{f\in\mathbf{F} : f(k,0)\subseteq p$ *для некоторого* $k\in\omega\}$ плотно в $\mathbf{F}$ при любом $p\in P$).

Наконец, свойство 4.1(5) (из которого, как доказано в 4.1, следует 4.1(4)), мы берем из ([7]) (следствие 2).

Подробное доказательство 4.1(5) довольно громоздко в техническом плане и мы оставляем его читателю.

Итак, Q — искомое, лемма доказана.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $P\in\mathrm{Spl}$ *и* Ξ *счетны,* $p\in P^m$, U *плотно в* Perf^m. *Тогда найдутся:* Q *— счетное расщепление* P *над* Ξ *и такое* $q\in Q^m$, *что* $q\geqq p$ *и* $q\in U$.

Доказательство. Пусть Q_0 — счетное расщепление P над Ξ (существует по лемме 1). Выбираем (используя 4.1(1)) такое $q'\in Q_0^m$, что $q'\geqq p$ и, далее, выбираем (используя плотность U) такое $q=(q_0,\ldots,q_{m-1})\in U$, что $q\geqq q'$. Наконец, определяем $Q=Q_0\cup\{q_i\cap\langle e\rangle : i<m\&e\in q_i\}$. Тогда Q — искомое расщепление (4.1(1, 2, 3) очевидны, 4.1(5) для Q следует из 4.1(5) для Q_0 и $\bigcup_{q\in Q}\mathrm{Cl}_q=\bigcup_{q\in Q_0}\mathrm{Cl}_q$; наконец, $q\in Q^m$, $q\geqq p$, $q\in U$ по построению). Теорема доказана.

7.2. Теорема о продолжении. Все рассуждения этого пункта проходят в L. Применим результаты 7.1 для доказательства теоремы, играющей ключевую роль в построении искомой последовательности π. Докажем сперва два вспомогательных утверждения.

ЛЕММА 1. *Если* $p\in\mathrm{Perf}^m$, $B\subseteq R^m$ *есть* Π^1_1*-множество, то найдется такое* $q\in\mathrm{Perf}^m$, $q\geqslant p$, *что либо* $\mathrm{Cl}_q\cap B=0$, *либо* $\mathrm{Cl}_q\subseteq B$.

Доказательство. $\mathrm{Cl}_p\cap B$ обладает свойством Бэра в Cl_p [см. ([1]), стр. 130]. Значит, можно считать, что либо Cl_p—B, либо $\mathrm{Cl}_p\cap B$ — множество первой категории в Cl_p. Предполагаем первое (второе совершенно аналогично). Тогда $\mathrm{Cl}_p\cap B$ содержит подмножество вида $X=\bigcap_{k\in\omega}X_k$, где всякое X_k — плотное (в топологическом смысле) открытое подмножество Cl_p. Полагая $P=\{p\cap\langle e\rangle : e\in p\}$ и $U_k=\{u\in P^m : \mathrm{Cl}_u\subseteq X_k\}$, получаем: $P\in\mathrm{Spl}$ счетно, всякое U_k плотно в P^m.

Применяем 7.1.1 к P и $\Xi=\{U_k: k\in\omega\}$. Пусть Q — расщепление P над Ξ. Выбираем, пользуясь 4.1(1), такое $q\in Q$, что $q\geqq p$. Тогда $q\geqq\bigvee U_k$ (по 4.1(4)), т. е. $\mathrm{Cl}_q\subseteq\bigcup\limits_{u\in U_k}\mathrm{Cl}_u$ и, далее, $\mathrm{Cl}_q\subseteq X_k$. Таким образом, $\mathrm{Cl}_q\subseteq X=\bigcap\limits_{k\in\omega}X_k$. Это означает, что q — искомое. Лемма доказана.

Следствие 2. *Пусть* φ *есть замкнутая* λ*-формула,* $m\geqslant|\varphi|$. *Тогда множество* $\{p\in P^m: p\ \mathrm{forc}\ \varphi$ *или* $p\ \mathrm{forc}\ \varphi^-\}$ *плотно в* P^m.

Доказательство. Если $\varphi\in\Pi\lambda^1_1\cup\Sigma\lambda^1_1$, то требуемое легко следует из леммы 1 с учетом определения 5.4 (1). Если же $\varphi\in\Pi\lambda^1_k\cup\Sigma\lambda^1_k$, $k\geqslant 2$, то применяем 5.5.3 и 5.6.

Теперь докажем теорему о продолжении.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\rho=(P_\alpha,\ \alpha\in\nu)$ *есть* Spl*-последовательность,* $\nu\in\omega_1$ $(=(\omega_1)^L$; все рассуждения этого пункта проходят в $L)$, φ *является замкнутой* λ*-формулой,* $P_{<\nu}=\bigcup\limits_{\alpha\in\nu}P_\alpha$, $p\in P^\infty_{<\nu}$. *Тогда найдется такое* P_ν *и такое* $q\in P^\infty_\nu$, *что* $(P_\alpha,\ \alpha\leqslant\nu)$ — *также* Spl*-последовательность (длины* $\nu+1$), $q\geqq p$ *и либо* $q\ \mathrm{forc}\ \varphi$, *либо* $q\ \mathrm{forc}\ \varphi^-$.

Доказательство. Можно считать $m=\|p\|\geqslant\|\varphi\|$. Применяем теорему 7.1 к $P=P_{<\nu}$, $\Xi=L_{\gamma^*(\rho)}$ (определение γ^* в 4.2), p и $U=\{q\in\mathrm{Perf}^m: q\ \mathrm{forc}\ \varphi$ или $q\ \mathrm{forc}\ \varphi^-\}$ (плотно в Perf^m по следствию 2).

Пусть P_ν — счетное расщепление $P_{<\nu}$ над Ξ, $q\in P^m_\nu$, $q\geqq p$ и $q\in U$. P_ν и q — искомые, теорема доказана.

7.3. Построение Σ^T_1-определимой последовательности Енсена. По соображениям технического порядка мы доказываем ОТ отдельно для $n=2$ и $n\geqslant 3$. В случае $n=2$ предложения (А), (Б), (В) из § 2 позволяют не заботиться о свойствах $\mathfrak{Ai}''_n(A)$, $i=4, 5, 6$. Достаточно, таким образом, построить (в L) Σ^T_1-определимую последовательность Енсена.

ТЕОРЕМА (формулируется и доказывается в L). *Существует такая последовательность Енсена* π, *что* $\pi\in\Sigma^T_1$.

Доказательство. Пусть $\prec$ — каноническое полное упорядочение множества $T=L_{\omega_1}$ [см. (9)]. Оно обладает таким свойством:

1. $\prec\in\Delta^T_1$ и $\mathrm{Seg}=\{\{y: y\prec x\}: x\in T\}\in\Delta^T_1$ [см. (9), лемма 21, стр. 83]

Оценим теперь сложность некоторых множеств.

Утверждение 2. *Следующие множества входят в* Δ^T_1:

(1) $M_1=\{(P, Q, \Xi)\in T: Q$ *есть расщепление* P *над* $\Xi\}$;

(2) $\{\pi\in T: \pi$ *является* Spl*-последовательностью*$\}$.

Доказательство. (1) Как известно, $(L_\alpha, \alpha\in\omega_1)\in\Delta^T_1$ ((9), стр. 38 или 82). С другой стороны, если $\alpha\in\omega_1$ предельно и $\xi=(P, Q, \Xi)\in L_\alpha$, то легко проверить, что $\xi\in M_1\equiv L_\alpha\vDash\xi\in M_1$. Это означает, что $M_1=\{\xi\in T:$ *существует такое предельное* $\alpha\in\omega_1$, *что* $\xi\in L_\alpha$ *и* $L_\alpha\vDash\xi\in M_1\}=$ $=\{\xi\in T:$ *если* $\alpha\in\omega_1$ *предельно и* $\xi\in L_\alpha$, *то* $L_\alpha\vDash\xi\in M_1\}$. Отсюда (1) очевидно, а (2) легко следует из (1) и замечания $(L_\alpha, \alpha\in\omega_1)\in\Delta^T_1$. Подробности оставляются читателю.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Для всякой не более чем счетной Spl-последовательности ρ через ρ^+ обозначаем наименьшую в смысле $\prec$ счетную Spl-последовательность η, удовлетворяющую $\rho \subsetneq \eta$ (т. е. $\nu = \mathrm{dom}(\rho) \in \mathrm{dom}(\eta)$ и $\rho = \eta | \nu$); такая последовательность существует по теореме 7.2.

Полагаем теперь $\rho_0 = 0$, $\rho_{\alpha+1} = \rho_\alpha^+$ и $\rho_\beta = \bigcup\limits_{\alpha \in \beta} \rho_\alpha$ для предельных $\beta \in \omega_1$; $\pi = \bigcup\limits_{\alpha \in \omega_1} \rho_\alpha$. Покажем, что π — искомая последовательность. В самом деле, π будет Spl-последовательностью, так как всякое ρ_α есть Spl-последовательность и $\rho_\alpha \subseteq \rho_\beta$ при $\alpha \in \beta$. Далее, $\mathrm{dom}(\pi) = \omega_1$, поскольку $\mathrm{dom}(\rho_{\alpha+1})$ строго больше $\mathrm{dom}(\rho_\alpha)$. Значит, π — последовательность Енсена. Остается доказать, что $\pi \in \Sigma_1^T$.

ЛЕММА 3. *Множество* $M = \{(\rho, \eta) \in T : \rho, \eta$ *являются* Spl-*последовательностями и* $\eta = \rho^+\}$ *принадлежит* Δ_1^T.

Доказательство леммы. Пусть $M_0 = \{(\rho, \eta) \in T : \rho, \eta$ *являются* Spl-*последовательностями и* $\rho \subsetneq \eta\}$. Из 2(2) следует:

$$M_0 \in \Delta_1^T. \qquad (*)$$

Далее, из определения ρ^+ и Seg (см. утверждение 1) имеем:

$$M = \{(\rho, \eta) \in M_0 : (\forall \zeta \in T)\,[\zeta \prec \eta \to (\rho, \zeta) \notin M_0]\} =$$

$$= \{(\rho, \eta) \in M_0 : (\exists S \in \mathrm{Seg})\,[\eta \in S \,\&\, (\forall \zeta \in S)\,[(\rho, \zeta) \in M_0 \to \zeta = \eta]]\}.$$

Отсюда и из свойства 1 следует лемма.

Следствие 4. *Множество* $H = \{\rho_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ *принадлежит* Σ_1^T.

Доказательство. Ясно, что $\rho \in H \equiv$ [существует такая функция f, что $\nu = \mathrm{dom}(f)$ — счетный предельный ординал, $f(0) = 0$, $f(\alpha+1) = f(\alpha)^+$ для всех $\alpha \in \nu$ и $f(\beta) = \bigcup f''\beta$ для предельных $\beta \in \nu$, и $\rho \in \mathrm{rng}(f)$]. Отсюда и из 3 и следует, что $H \in \Sigma_1^T$.

Возвращаемся к доказательству теоремы. Из построения следует $\pi = \bigcup H$. Отсюда с помощью 4 получаем: $\pi \in \Sigma_2^T$, π — искомое. Теорема доказана.

7.4. Сложность отношения forc. Все рассуждения этого пункта проходят в L (тем не менее доказываемые утверждения верны и в универсуме в силу 5.5.1).

Как обычно, всякую λ-формулу и всякую формулу арифметики второго порядка будем отождествлять с ее записью (кортежем символов), считая при этом все логические знаки и т. п. символы (закодированными) *множествами конечного ранга*. Тогда всякая λ-формула будет кортежем множеств конечного ранга и конструктивных (по определению 5.3) $f \in R$, входящих в константы m^*f. Таким образом, каждая λ-формула является элементом множества $T = L_{\omega_1}$ (все рассуждения проходят в L), а совокупности $\Sigma\lambda_k^1$ и $\Pi\lambda_k^1$ будут Δ_1^T-подмножествами множества T.

Если $k \geqslant 1$, то определяем $\mathrm{Forc}_k^{\Sigma} = \{(p, \varphi) : p \in \mathrm{Perf}^{\infty} \,\&\, \varphi \in \Sigma\lambda_k^1$ *замкнута* $\&\, p \,\mathrm{forc}\, \varphi\}$; аналогично определяем Forc_k^{Π}. Forc_k^{Σ} и Forc_k^{Π}—также подмножества T. Оценим их сложность.

ТЕОРЕМА (в L). $\mathrm{Forc}_1^{\Pi} \in \Delta_1^T$, $\mathrm{Forc}_1^{\Sigma} \in \Pi_1^T$; *если* $k \geqslant 2$, *то* $\mathrm{Forc}_k^{\Pi} \in \Pi_{k-1}^T$ *и* $\mathrm{Forc}_k^{\Sigma} \in \Sigma_{k-1}^T$.

Доказательство состоит из трех лемм.

ЛЕММА 1. $\mathrm{Forc}_1^{\Pi} \in \Delta_1^T$.

Доказательство леммы. Используя определения 5.3 и 5.4(1), всякому $p \in \mathrm{Perf}^{\infty}$ и всякой замкнутой $\Pi\lambda_1^1$-формуле φ можно сопоставить замкнутую Π_1^1-формулу $\psi_{p\varphi}$ с параметрами из R так, что

(1) $p \,\mathrm{forc}\, \varphi \equiv \psi_{p\varphi}$ *истинно*, и

(2) $p, \varphi \mapsto \psi_{p\varphi}$ — *преобразование класса* Δ_1^T (соглашение 5.1(1) дает возможность обеспечить (2)).

Далее, по всякой замкнутой Π_1^1-формуле ψ с параметрами из R в (⁹), разд. 5, построено такое $r(\psi) \subseteq \omega \times \omega$, что

(3) ψ *истинно* $\equiv r(\psi)$ — *полное упорядочение*, и

(4) r — *функция класса* Δ_1^T.

Отметим, наконец, следующий очевидный факт:

(5) $\mathrm{Word} = \{r \subseteq \omega \times \omega : r$ — *полное упорядочение*$\} \in \Delta_1^T$.

Из (1) и (3) получаем:

$$\mathrm{Forc}_1^{\Pi} = \{(p, \varphi) : p \in \mathrm{Perf}^{\infty} \,\&\, \varphi \in \Pi\lambda_1^1 \text{ замкнута } \&\, r(\psi_{p\varphi}) \in \mathrm{Word}\};$$

отсюда и из (2, 4, 5) легко следует утверждение леммы.

ЛЕММА 2. $\mathrm{Forc}_1^{\Sigma} \in \Pi_1^T$.

Доказательство (эскиз). По $p \in \mathrm{Perf}^{\infty}$ и замкнутой $\varphi \in \Sigma\lambda_1^1$ можно построить Σ_1^1-формулу $\psi_{p\varphi}(x)$ с единственной свободной переменной x (типа 1) так, что $p \,\mathrm{forc}\, \varphi \equiv \forall x \psi_{p\varphi}(x) \equiv (\forall x \subseteq \omega)[r(\psi_{p\varphi}(x)) \notin \mathrm{Word}]$. Дальше — как в лемме 1.

Докажем теперь «главную» часть теоремы индукцией по $k \geqslant 2$, формулируя индуктивный шаг в следующей форме:

ЛЕММА 3. *Пусть* $k \geqslant 1$ *и* $\mathrm{Forc}_k^{\Pi} \in \Delta_k^T$. *Тогда* $\mathrm{Forc}_{k+1}^{\Sigma} \in \Sigma_k^T$ *и* $\mathrm{Forc}_{k+1}^{\Pi} \in \Pi_k^T$.

Доказательство для $\mathrm{Forc}_{k+1}^{\Sigma}$ легко следует из определения 5.4 (2,3) в силу того, что преобразования типа $\exists_m x \psi(x) \mapsto \psi(m^* f)$ выражаются Δ_1^T-отношениями. Далее, согласно определению 5.4 (4),

$$\mathrm{Forc}_{k+1}^{\Pi} = \{(p, \varphi) : p \in \mathrm{Perf}^{\infty} \,\&\, \varphi \in \Pi\lambda_{k+1}^1 \text{ замкнута}$$

$$\&\, (\forall q \in \mathrm{Perf}^{\infty})\,[q \geqq p \mapsto (q, \varphi) \notin \mathrm{Forc}_{k+1}^{\Sigma}]\}.$$

Из этого выражения с помощью уже доказанного для $\mathrm{Forc}_{k+1}^{\Sigma}$ без труда получаем: $\mathrm{Forc}_{k+1}^{\Pi} \in \Pi_k^T$. Лемма доказана.

Соединяя леммы 1, 2, 3, получаем доказательство теоремы.

Следствие 4 (утверждение (*) из 6.5). *Пусть* $\varphi(k) \in \Sigma\lambda^1_n$, $n \geqslant 2$, $x \subseteq \omega$ *и* φ *из констант типа* 1 *содержит только константу* $0^* x$. *Тогда* $S = \{k \in \omega : 0 \operatorname{forc} \varphi(\underline{k})\} \in \Sigma^{1,x}_n$.

Доказательство. Из выбора φ ясно, что функция $k \mapsto \varphi(\underline{k})$ является $\Delta^{T,x}_1$-функцией. Отсюда с помощью доказанной теоремы получаем $S \in \Sigma^{T,x}_{n-1}$. Но это в силу 4.5.1 и означает, что $S \in \Sigma^{1,x}_n$, что и требовалось.

7.5. Построение Σ^T_{n-1}-определимой n-консервирующей последовательности Енсена при $n \geqslant 3$.

ТЕОРЕМА (формулируется и доказывается в L). *Пусть* $n \geqslant 3$. *Тогда найдется такая* n-*консервирующая последовательность Енсена* π, *что* $\pi \in \Sigma^T_{n-1}$.

Доказательство. Выбираем какие-нибудь функции $\tilde{p} : \omega_1 \to \mathrm{Perf}^\infty$ и $\tilde{\varphi} : \omega_1 \to \bigcup\limits_{1 \leqslant k < n} \{\varphi \in \Pi\lambda^1_k : \varphi$ *замкнута*$\}$, удовлетворяющие условиям:

(1) *Если* $p \in \mathrm{Perf}^\infty$, $1 \leqslant k < n$, $\varphi \in \Pi\lambda^1_k$ *замкнута, то существует несчетное множество таких* $\alpha \in \omega_1$, *что* $p = \tilde{p}(\alpha)$ *и* $\varphi = \tilde{\varphi}(\alpha)$.

(2) $\tilde{p}$ *и* $\tilde{\varphi}$ *— функции класса* Δ^T_1 (выполнение (2) можно обеспечить с помощью полного упорядочения $\prec$ из 7.3).

Пусть теперь $\rho = (P_\alpha, \alpha \in \nu)$ есть Spl-последовательность, $\nu \in \omega_1$, $P = \bigcup\limits_{\alpha \in \nu} P_\alpha$, $p = \tilde{p}(\nu)$, $\varphi = \tilde{\varphi}(\nu)$. Из теоремы 7.2 получаем: существует такая Spl-последовательность $\eta \in T$, что $\rho \subsetneq \eta$, и если дополнительно $p \in P^\infty$, то для некоторого $q \in (\bigcup \mathrm{rng}(\rho))^\infty$ выполняется $q \geqq p$ и либо $q \operatorname{forc} \varphi$, либо $q \operatorname{forc} \varphi^-$. Через ρ^+ обозначаем $\prec$-наименьшую из таких η.

Далее, аналогично 7.3 определяем $\rho_0 = 0$, $\rho_{\alpha+1} = \rho^+_\alpha$, $\rho_\beta = \bigcup\limits_{\alpha \in \beta} \rho_\alpha$ для предельных β и $\pi = \bigcup\limits_{\alpha \in \omega_1} \rho_\alpha$. Как и в 7.3, π будет последовательностью Енсена. Кроме того, из (1) и определения ρ^+ легко вытекает, что π будет n-консервирующей ((1) обеспечивает перебор всех $p \in (\bigcup \mathrm{rng}(\pi))^\infty$ и всех $\varphi \in \bigcup\limits_{1 \leqslant k < n} \Pi\lambda^1_k$).

Осталось проверить $\pi \in \Sigma^T_1$.

ЛЕММА 1. $\{(\rho, \eta) : \eta = \rho^+\} \in \Delta^T_{n-1}$.

Доказательство проходит совершенно аналогично 7.3.3 с дополнительным учетом (2), теоремы 7.4 и условия $n \geqslant 3$ (если $n = 2$, то доказательство леммы провести не удается в силу того, что $\mathrm{Forc}^\Sigma_1 \in \Pi^T_1$, а не Δ^T_1). Подробности оставляются читателю.

Теперь $\pi \in \Sigma^T_{n-1}$ следует из леммы 1 аналогично выводу 7.3.4 из 7.3.3. Итак, π — искомое, теорема доказана.

Отметим, что доказательство теоремы существенно использует условие $n \geqslant 3$ (при $n = 2$ нельзя доказать лемму 1). Именно в силу этого возникла необходимость отдельного построения 7.3.

7.6. Завершение доказательства ОТ (Основной теоремы 2.4). Пусть $n \geqslant 2$ фиксировано. Выбираем последовательность Енсена $\pi = (P_\alpha, \alpha \in (\omega_1)^L)$, удовлетворяющую условию $\pi \in \Sigma^T_{n-1}$ в L и являющуюся n-консервирующей последовательностью при $n \geqslant 3$ (существование π с такими свойствами обеспечивается теоремами 7.3 при $n=2$ и 7.5 при $n \geqslant 3$). Полагаем $P = \bigcup\limits_{\alpha \in (\omega_1)^L} P_\alpha$ и, пользуясь 3.2.5, выбираем P-генерическое множество $A \subseteq R$ (заметим, что счетность $(\omega_2)^L$ требуется в условии ОТ).

Используя теоремы 3.4, 4.5, 4.6 и 6.1, а также (при $n=2$) утверждения (А), (Б) и (В) из § 2, получаем: в $L(A)$ истинно предложение $\mathfrak{B}_n(A)$. Это завершает доказательство ОТ.

Моск. ин-т инженеров
ж.-д. транспорта
Кафедра высшей математики

Поступило
6.X.1975
22.II.1977

Литература

[1] **Лузин Н. Н.,** Собрание сочинений, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1958.
[2] **Новиков П. С.,** О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 38 (1951), 279—316.
[3] **Коэн П.,** Теория множеств и континуум-гипотеза, М., «Мир», 1969.
[4] **Йех Т.,** Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.
[5] **Роджерс Х.,** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972.
[6] **Solovay R. M.,** A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. Math., 92, № 1 (1970), 1—56.
[7] **Jensen R. B.,** Definable set of minimal degree, Math. Logic and Found. of Set Theory, North-Holl., Amst. (1970), 122—128.
[8] **Sacks G. E.,** Forcing with perfect closed sets, Proc. Symp. Pure Math., 13, № 1 (1971), 331—357.
[9] **Devlin K.,** Aspects of constructibility, Lectures Notes in Math., 354 (1973).
[10] **Shoenfield J. R.,** The problem of predicativity, Essays on the Found. of Math., Jerusalem, (1961), 132—139.
[11] **Jensen R. B., Johnsbraten H.,** A new construction of a nonconstructible Δ^1_3 subset of ω, Fund. Math., 81, № 4 (1974), 279—290.
[12] **Mansfield R.,** Perfect subsets of definable sets of real numbers, Pacific J. Math., 35, № 2 (1970), 451—457.
[13] **Simpson S. G.,** Choice schemata in second order arithmetic, Notices Amer. Math. Soc., 147 (1973), A—499.
[14] **Кановей В. Г.,** Определимость с помощью степеней конструктивности, Третья Всесоюзная конференция по математической логике, Новосибирск, изд. СО АН СССР (1974), 92—94.
[15] **Кановей В. Г.,** Определимость с помощью степеней конструктивности, Исследования по теории множеств и неклассическим логикам, М., «Наука» (1976), 5—95.
[16] **Кановей В. Г.,** О независимости некоторых предложений дескриптивной теории множеств и арифметики второго порядка, Докл. АН СССР, т. 223, № 3 (1975), 552—554.
[17] **Кановей В. Г.,** Некоторые вопросы определимости в арифметике третьего порядка и обобщение теоремы Енсена о минимальном Δ^1_3-числе, Деп. в ВИНИТИ, № 839—75 (1975), 1—48.