СЕРИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
Том 43, № 6, 1979

УДК 51.01.16

В. Г. КАНОВЕЙ

МНОЖЕСТВО ВСЕХ АНАЛИТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ МНОЖЕСТВ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ МОЖЕТ БЫТЬ АНАЛИТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫМ

§ 1. Введение

1.1. Формулировка основной теоремы. Язык *арифметики второго порядка с переменными для множеств* (натуральных чисел) описан в ([1]), стр. 492. Он содержит два типа переменных: *переменные типа* 0 с областью пробегания — натуральным рядом ω и *переменные типа* 1 с областью пробегания — совокупностью $R=\mathscr{P}(\omega)$ всех подмножеств множества ω. Помимо предикатов элементарной арифметики для переменных типа 0, этот язык содержит также двухместный предикат принадлежности «$k\in x$»; k предполагается переменной типа 0, а x — переменной типа 1.

Формулы этого языка будем называть аналитическими формулами.

Свободные переменные аналитических формул можно замещать параметрами соответствующего типа, т. е. типа 0 — из ω, и типа 1 — из R.

Если $\varphi(k)$ — аналитическая формула с единственной свободной переменной k (типа 0), не содержащая параметров из R, то определяемое этой формулой множество $\{k\in\omega : \varphi(k)\}$ будем называть *аналитически определимым*. Совокупность всех аналитически определимых $x\in R$ обозначим через An.

Аналогично, если $\varphi(x)$ — аналитическая формула с единственной свободной переменной x (типа 1), не содержащая параметров из R, то определяемое ею множество $\{x\in R : \varphi(x)\}$ называем *аналитически определимым.*

Множества $x\in R$, $X\subseteq R$ будут аналитически определимыми, если и только если они входят в один из классов Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n *аналитической иерархии* (([1]), теорема XII на стр. 493 и следствие 1 на стр. 480. Определение классов Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n см., например, в ([1]), стр. 490).

В обзоре ([6]) поставлены вопросы P3110 и P3112 о совместимости с теорией множеств ZFC ([3]) таких утверждений:

1) $\mathrm{An}=R\cap L$;

2) *множество* An *аналитически определимо.*

(L есть класс всех *конструктивных* по Гёделю множеств, ([3]), гл. III.)

Мы даем положительный ответ на эти вопросы:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (ОТ). *Утверждение* $\mathrm{An}=R\cap L$ *совместимо с теорией ZFC.*

Следствие. *Утверждение «множество* An *аналитически определимо» совместимо с ZFC.*

Вывод следствия из ОТ тривиален: множество $R\cap L$, как известно, принадлежит Σ_2^1 (см. [7] или [2], упр. (ж) на стр. 456). Тем самым, это множество аналитически определимо.

Сформулированное следствие из основной теоремы дает также (частичный) ответ на один вопрос А. Тарского. В [13] для каждого $n\geqslant 1$ и каждого $p\in\omega$ введена совокупность D_{np} всех множеств типа n, определимых формулами типа не выше p, и поставлен вопрос о справедливости утверждения $D_{1p}\in D_{2p}$ при $p\geqslant 1$ (все остальные возможности в утверждении $D_{np}\in D_{n+1,\,p}$ рассмотрены в [13]).

Заметим, что D_{11} есть в точности совокупность всех множеств типа 1, т. е. всех $x\in R$, определимых аналитическими формулами без параметров; тем самым, D_{11} совпадает с введенной выше совокупностью An. Аналогично, D_{21} есть в точности совокупность всех аналитически определимых множеств $X\subseteq R$. Таким образом, сформулированное следствие можно записать так:

Утверждение $D_{11}\in D_{21}$ *совместимо с ZFC.*

Это и дает частичный ($p=1$) ответ на упомянутый вопрос Тарского из [13].

Несколько усложнив метод настояшей статьи, можно доказать, что утверждение $D_{1p}\in D_{2p}$ совместимо с *ZFC* вообще при любом $p\geqslant 1$. Оно также совместимо и при $p=\infty$, где $D_{n\infty}=\bigcup\limits_{p\in\omega} D_{np}$.

Заметим, что утверждение $D_{11}\notin D_{21}$ также совместимо с *ZFC*, так как оно следует из аксиомы конструктивности (см. следующий пункт).

Содержанием предлагаемой статьи является доказательство ОТ. Перед изложением плана доказательства сделаем несколько замечаний.

1.2. Аксиомы, опровергающие утверждения $\mathrm{An}=R\cap L$ и «множество An аналитически определимо». К таким аксиомам относится, в частности, *аксиома конструктивности* $V=L$ ([3], стр. 170), утверждающая конструктивность каждого множества.

Действительно, предположим противное; $V=L$, и An аналитически определимо. Тогда множество $X=R-\mathrm{An}$ также аналитически определимо и очевидно непусто (так как R несчетно, а An — счетное множество). С другой стороны, из $V=L$ следует [7] существование аналитически определимого (точнее, входящего в Δ_2^1) полного упорядочения множества R. Наименьший в смысле этого полного упорядочения элемент x множества X также аналитически определим, т. е. принадлежит An — противоречие!

Поскольку аксиома конструктивности совместима с *ZFC* [3], то утверждения, совместимость которых с *ZFC* утверждается в ОТ и следствии из ОТ, независимы от *ZFC*, т. е. их отрицания совместимы с теорией *ZFC*.

Отметим, что доказательство отрицания упомянутых утверждений может быть проведено с использованием более слабых, чем $V=L$, предположений. Приведем несколько таких предположений.

Ординал ω_1^L, *т. е. первый несчетный в* L *ординал, несчетен в универсуме всех множеств.*

$R\cap L\not\subseteq \mathrm{An}$.

Существует аналитически определимое полное упорядочение некоторого несчетного множества $X\subseteq R$.

Найдется такой измеримый кардинал $\varkappa$ *и такая нормальная мера* μ *на* $\varkappa$, *что* $V=L[\mu]$, *т. е. все множества конструктивны из* μ.

1.3. Определимость более низкого уровня. Следствие 1.1 из основной теоремы ОТ показывает, что множество An всех аналитически определимых $x\in R$ «может быть» аналитически определимым. Этот результат контрастирует со следующими утверждениями, доказуемыми в ZF:

(а) *множество всех рекурсивных* $x\in R$ *нерекурсивно;*

(б) *множество всех арифметически определимых* $x\in R$ *не является арифметически определимым;*

(в) *множество всех* Δ_1^1*-множеств* $x\in R$ *не принадлежит* Δ_1^1;

(г) *множество всех* Δ_2^1*-множеств* $x\in R$ *не принадлежит* Δ_2^1.

О терминологии. *Рекурсивные* множества $x\in R$ и $X\subseteq R$ определены в (1), стр. 430. Множество $x\in R$ мы называем *арифметически определимым*, если найдется такая аналитическая формула $\varphi(k)$, не содержащая параметров из R и *кванторов по переменным типа* 1, что $x=\{k\in\omega\colon \varphi(k)\}$. Аналогично вводится понятие арифметически определимого множества $X\subseteq R$. Вообще, «арифметическое» есть «аналитическое» без кванторов по переменным типа 1.

Утверждение (а) очевидно: совокупность всех рекурсивных $x\in R$ счетна, а каждое рекурсивное $X\subseteq R$ обязательно открыто-замкнуто в R и тем самым либо пусто, либо имеет мощность континуума.

Утверждения (б) и (в) упомянуты в (1), стр. 545, в несколько измененном виде, соответствующем арифметике второго порядка с переменными типа 1 для функций из ω в ω.

Наконец, утверждение (г) легко получается из следующей «теоремы о базисе» ((1), стр. 551, следствие XLV (с)): *каждое непустое* Σ_2^1*-множество* (*и тем самым каждое непустое* Δ_2^1*-множество*) X *содержит элемент* $x\in X$ *класса* Δ_2^1. Для доказательства (г) нужно предположить противное и применить теорему о базисе к дополнению множества $\{x\in R : x$ *есть* Δ_2^1*-множество*$\}$.

Отметим, что в предположении $V=L$ утверждение «множество всех Δ_n^1-множеств $x\in R$ не принадлежит Δ_n^1» доказуемо также и для любого $n\geqslant 3$. Представляет интерес установить, *совместимо ли с* ZFC *отрицание этого утверждения при каком-нибудь* $n\geqslant 3$?

Представляет интерес также установить, совместимо ли с ZFC утверждение «$R\cap L$ есть в точности совокупность всех Δ_n^1-множеств $x\in R$».

1.4. Вторая формулировка ОТ. Мы будем доказывать основную теорему в следующем более удобном виде:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (вторая формулировка). *Предположим, что* ω_3^L (*третий несчетный кардинал конструктивного универсума* L) *счетен в универсуме всех множеств. Тогда найдется такое множество* G, *что в классе* $L[G]$ *всех конструктивных из* G *множеств истинны следующие два утверждения:*

(i) *каждое* $a \in L[G] \cap R$, *аналитически определимое в* $L[G]$, *является конструктивным;*

(ii) *каждое конструктивное* $r \in R$ *аналитически определимо в* $L[G]$.

Как известно, предложение «ω_3^L счетно» совместимо с ZFC (см., например, [3], гл. IV, § 10). Ввиду этого обстоятельства, справедливость второй формулировки ОТ автоматически влечет справедливость первой.

В соответствии со второй формулировкой ОТ мы в доказательстве предполагаем, что ординал ω_3^L счетен в универсуме всех множеств. Это предположение, однако, используется фактически только для доказательства существования генерических фильтров (см. 2.4 и 4.1).

1.5. План доказательства. В § 2 вводится важное понятие *системы*. Каждой системе U мы сопоставляем множество вынуждающих условий $P(U)$ для генерических расширений конструктивного универсума L. Структура $P(U)$ близка к структуре множества вынуждающих условий из [8], § 5.

Рассматриваются L-генерические на $P(U)$ фильтры в смысле [5], которые мы для краткости называем U-генерическими фильтрами, или U-г. ф.. Каждый U-г. ф. G естественным образом порождает:

1) функцию g^G из ω на $R \cap L$ и

2) семейство множеств $\{S_{ni}^G : n, i \in \omega\}$.

Некоторые общие свойства этих множеств в генерических расширениях рассматриваемого вида также изучаются в § 2.

В § 3 мы строим в L некоторую конкретную систему $U^* = (U_{ni}^* : n, i \in \omega)$ такую, что каждый U^*-г. ф. G будет искомым в смысле второй формулировки ОТ. Построение U^* организовано таким образом, что сложность «n-слоя» $(U_{ni}^* : i \in \omega)$ ее компонент увеличивается с возрастанием n. При этом, каково бы ни было $m \in \omega$, компоненты U_{ni}^* с $n \geqslant m$ не влияют, грубо говоря, на вынуждение формул сложности $\leqslant m$. Это обстоятельство достигается особым «генерическим» способом построения U^* в L.

В § 4 и § 5 мы доказываем утверждение (i) из второй формулировки ОТ для произвольного U^*-г. ф. G. Решающим моментом является следующее важное предложение, вытекающее из построения системы U^*:

(A). *Если* $p \in P(U^*)$ *и аналитическая формула* $\psi(k)$ *с единственной свободной переменной* k (*типа* 0) *не имеет параметров, то можно подобрать такое* $q \in P(U^*)$, $q \geqq p$, *что* $\forall k$ [*либо* q *вынуждает* $\psi(k)$, *либо* q *вынуждает* $\sim\psi(k)$].

(См. доказательство теоремы 4.8.2.)

Это предложение влечет выполнение (i) из второй формулировки ОТ для произвольного U^*-г. ф. G. Проверка справедливости предложения (А) использует специальное отношение forc, которое вводится и изучается в § 4. Фактически, (А) (точнее, утверждение 4.8(*), из которого без труда получается (А)) доказывается сперва для отношения forc в § 5, но «генерический» характер U^* позволяет установить согласованность между forc и вынуждением, соответствующим $P(U^*)$ (следствие 4.8.1 и теорема 4.7).

Аппарат отношения forc близок по своему смыслу и месту в доказательстве к соответствующему аппарату forc из ([12]).

По соображениям большей наглядности, мы доказываем (i) из второй формулировки ОТ для произвольного U^*-г. ф. G (теорема 4.9), используя 4.8(*), перед доказательством самого утверждения 4.8(*) в § 5.

Наконец, в § 6 доказывается утверждение (ii) из второй формулировки ОТ для произвольного U^*-г. ф. G. Мы вводим совокупность формул $\Phi_n(S, i)$, удовлетворяющих таким условиям:

1) *если* $i \in g^G(n)$ (*а* g^G — *функция из* ω *на* $R \cap L$, *см. выше*), *то* $\Phi_n(S^G_{ni}, i)$ *истинно в* $L[G]$;

2) *если* $i \notin g^G(n)$, *то нет такого* $S \in L[G]$, *что* $\Phi_n(S, i)$ *истинно в* $L[G]$;

3) *множество* $\{i \in \omega$: *в* $L[G]$ *истинно* $\exists S \Phi_n(S, i)\}$ *является аналитически определимым в* $L[G]$.

(U^*-г. ф. G и n, $i \in \omega$ произвольны.)

Условия 1) и 2) означают, что каждое множество $g^G(n)$ определимо в $L[G]$ формулой $\exists S \Phi_n(S, i)$. Утверждение 3) влечет при этом аналитическую определимость $g^G(n)$. Но поскольку g^G — функция из ω на $R \cap L$, то каждое $r \in R \cap L$ имеет вид $g^G(n)$ для подходящего n и является тем самым аналитически определимым в классе $L[G]$.

Такова структура доказательства.

1.6. Об обозначениях. Все основные теоретико-множественные обозначения мы берем из ([4]) со следующим изменением: мощность обозначается card (x).

Часто будет использоваться сокращенное обозначение $(\ldots : \ldots)$ для «индексированных множеств», т. е. для функций. Например, запись $(U^\alpha_{ni} : \alpha \in \omega_2)$ обозначает функцию f, определенную на множестве ω_2 условием $f(\alpha) = U^\alpha_{ni}$ $\forall \alpha \in \omega_2$. Аналогично, запись $(U^\alpha_{ni} : n, i \in \omega)$ обозначает функцию f, определенную на множестве $\omega \times \omega$ условием $f(n, i) = U^\alpha_{ni}$ $\forall n, i \in \omega$.

§ 2. Генерические расширения, используемые для доказательства основной теоремы

2.1. Предварительные определения.

ω_1^L — первый несчетный в L ординал;

Seq_α — совокупность всех конструктивных функций из α в $2 = \{0, 1\}$;

$$\mathrm{Seq} = \bigcup_{\alpha\in\omega_1^L} \mathrm{Seq}_\alpha;$$

Fun — совокупность всех конструктивных функций из ω_1^L в 2.

Пусть $S\subseteq \mathrm{Seq}$, $f\in \mathrm{Fun}$, $\gamma\in\omega_1^L$. Если нет такого $\alpha\in\omega_1^L$, $\alpha>\gamma$, что $f|\alpha\in S$, то пишем, что S *не покрывает* f *выше* γ. Если $(\exists\,\gamma\in\omega_1^L)$ [S *не покрывает* f *выше* γ], то пишем, что S *не покрывает* f. В противном случае пишем, что S *покрывает* f. Это будет, если и только если $(\forall\,\gamma\in\omega_1^L)$ $(\exists\,\alpha\in\omega_1^L)$ $[\alpha>\gamma$ и $f|\alpha\in S]$.

Вводится важное определение системы. *Системой* называем конструктивную функцию U, определенную на множестве $\omega\times\omega$ и удовлетворяющую условию $U(n, i)\subseteq\mathrm{Fun}$ $\forall n, i$. Для уменьшения громоздкости записи, мы будем писать U_{ni} вместо $U(n, i)$ и, аналогично, U'_{ni}, U^*_{ni} вместо $U'(n, i)$, $U^*(n, i)$, и т. п. (U, U', U^* — системы). Множество U_{ni} называем, n, i-й компонентой системы U.

2.2. Вынуждающие условия. Пусть U является системой. Мы хотим построить множество вынуждающих условий, ведущее к получению генерической функции g из ω на $R\cap L$, и генерического семейства $(S_{ni}: n, i\in\omega)$ подмножеств множества Seq таких, что для всех $n\in\omega$, $i\in g(n)$ и $f\in\mathrm{Fun}$ выполняется эквивалентность: S_{ni} *покрывает* f, *если и только если* $f\notin U_{ni}$.

Подходящим м. в. у. будет совокупность $P(U)$ всех *конструктивных* функций p, определенных на множестве $\{0\}\cup(\omega\times\omega)$ и удовлетворяющих следующим семи условиям:

(i) $e=p(0)$ *является функцией из некоторого конечного* $x\subseteq\omega$ *в* $R\cap L$, *это* $x=\mathrm{dom}(p(0))$ *обозначается через* $|p|$;

(ii) *каждое* $p(n, i)$ *есть пара* (s_{ni}, X_{ni});

(iii) $s_{ni}\subseteq\mathrm{Seq}$ *и* s_{ni} *не более чем счетно в* L;

(iv) X_{ni} *есть не более чем счетная в* L *совокупность пар вида* (γ, f), *где* $\gamma\in\omega_1^L$ *и* $f\in U_{ni}$;

(v) *если* $(\gamma, f)\in X_{ni}$, *то* s_{ni} *не покрывает* f *выше* γ;

(vi) *если* $n\notin|p|$ $(a\,|p|=\mathrm{dom}(p(0))$, см. (i)) *и* $i\in\omega$, *то* $p(n, i)=(0, 0)$, *т. е.* $s_{ni}=0$ *и* $X_{ni}=0$;

(vii) *если* $n\in|p|$ *и* $i\in\omega$, $i\notin e(n)$ (*а* $e(n)$ *принадлежит множеству* $R\cap L$ *по* (i)), *то также* $p(n, i)=(0, 0)$.

Таково определение множества $P(U)$. Перед определением порядка $\leqq$ на $P(U)$ условимся писать $(s, X)\leqq(s', X')$, если $s\subseteq s'$ и $X\subseteq X'$ (s, s', X и X' — произвольные множества). Теперь упорядочиваем $P(U)$ покомпонентно: $p\leqq q$, если и только если $p(0)\subseteq q(0)$ и $p(n, i)\leqq q(n, i)$ для всех n, i.

Через P_0 обозначаем множество $P(V)$, где $V=(\omega\times\omega)\times\{\mathrm{Fun}\}$ (т. е. $V_{ni}=\mathrm{Fun}$ $\forall n, i$). Ясно, что каждое $P(U)$ является конструктивным подмножеством множества P_0.

2.3. Некоторые свойства порядка. Перед описанием использования множеств вида $P(U)$ для вынуждения и построения генерических расширений рассмотрим более подробно порядок $\leqq$ на P_0.

Произвольные p, $p'\in P_0$ называем *непротиворечивыми*, если найдется такое $q\in P_0$, что $q\geqq p$ и $q\geqq p'$. В противном случае p и p' называем *противоречивыми*. Пишем, что $Q\subseteq P_0$ — *антицепь*, если любые различные p, $p'\in Q$ противоречивы.

ЛЕММА 1. *Если $Q\subseteq P_0$ — конструктивная антицепь, то Q имеет мощность $\leqslant\omega_1^L$ в L.*

Доказательство проводим в L. Для каждого $p\in P_0$ определяем функцию s_p на $\{0\}\cup(\omega\times\omega)$ следующим образом: $s_p(0)=p(0)$, и если $p(n, i)=(s, X)$, то $s_p(n, i)=s$. Тогда, с одной стороны, если p, $q\in P_0$ противоречивы, то нетрудно проверить, что $s_p\neq s_q$. А с другой стороны, множество $\{s_p : p\in P_0\}$ имеет, очевидно, мощность $\leqslant\omega_1$. Отсюда и получаем искомое.

Для p_1, $p_2\in P_0$ вводим $p_1\vee p_2$ как (единственную) функцию q, определенную на множестве $\{0\}\cup(\omega\times\omega)$ условиями $q(0)=p_1(0)\cup p_2(0)$ и $q(n, i)=(s, X)$, где $s=s_1\cup s_2$, $X=X_1\cup X_2$ и $(s_1, X_1)=p_1(n, i)$, $(s_2, X_2)=$ $=p_2(n, i)$. Справедливы следующие два утверждения, несложная проверка которых предоставляется читателю.

2. *Пусть p_1, $p_2\in P_0$. Тогда p_1 и p_2 непротиворечивы, если и только если $p_1\vee p_2\in P_0$, и в этом случае выполняется $p_1\leqq p_1\vee p_2$, $p_2\leqq p_1\vee p_2$.*

3. *Если U — система и p_1, $p_2\in P(U)$ непротиворечивы, то $p_1\vee p_2\in$ $\in P(U)$ и тем самым p_1, p_2 непротиворечивы и в $P(U)$ (т. е. найдется такое $q\in P(U)$, именно $q=p_1\vee p_2$, что $q\geqq p_1$ и $q\geqq p_2$).*

Несложное доказательство следующей леммы, дающей необходимое и достаточное условие непротиворечивости, также предоставляется читателю.

ЛЕММА 4 (критерий непротиворечивости). *Пусть p, $q\in P_0$, $p(0)=e$, $q(0)=e'$ и $p(n, i)=(s_{ni}, X_{ni})$, $q(n, i)=(s'_{ni}, X'_{ni})$ для всех n, $i\in\omega$. Тогда p, q непротиворечивы, если и только если выполняются (одновременно) следующие три утверждения:*

(1) *функции e и e' непротиворечивы, т. е. нет таких $j\in|p|\cap|p'|$, что $e(j)\neq e'(j)$;*

(2) *если n, $i\in\omega$ и $(\nu, f)\in X_{ni}-X'_{ni}$, то множество $s'_{ni}-s_{ni}$ не покрывает f выше ν;*

(3) *если n, $i\in\omega$ и $(\nu, f)\in X'_{ni}-X_{ni}$, то множество $s_{ni}-s'_{ni}$ не покрывает f выше ν.*

Перед доказательством важного следствия леммы 4 введем такое определение.

Пусть $p\in P_0$, $m\in\omega$. Через $p\restriction m$ обозначаем функцию q, определенную на множестве $\{0\}\cup(\omega\times\omega)$ условиями:

1) $q(0)=p(0)\restriction m$, т. е. если $e=p(0)$ и $x=\mathrm{dom}(e)$ $(=|p|)$, то $q(0)$ есть функция e', определенная на множестве $x\cap m$ условием $e'(j)=$ $=e(j)$ для любого $j\in x\cap m$;

2) $q(n, i)=p(n, i)$ при $n<m$;

3) $q(n, i)=(0, 0)$ при $n\geqslant m$.

Нетрудно проверить, что $p\restriction m\in P_0$, $p\restriction m\leqq p$ и $|p\restriction m|\subseteq m$, причем если $|p|\subseteq m$, то $p\restriction m=p$ (из 2.2 (vi)), и если p принадлежит $P(U)$, то $p\restriction m$ также принадлежит $P(U)$.

Следствие 5. *Пусть $p, p'\in P_0$, $m\in\omega$, $|p'|\cap|p|\subseteq m$ и $p\restriction m\leqq p'\restriction m$. Тогда $p\vee p'\in P_0$, т. е. p и p' непротиворечивы по утверждению* 2.

Доказательство. Обозначим $p''=p'\restriction m$, $e=p(0)$, $e'=p'(0)$, $e''=p''(0)$, $p(n, i)=(s_{ni}, X_{ni})$ и $p'(n, i)=(s'_{ni}, X'_{ni})$ для всех $n, i\in\omega$. Проверим выполнение условий (1)—(3) из леммы 4.

Если $j\in|p|\cap|p'|$, то по условию будет $j<m$, т. е. $j\in|p''|$. Значит, $e'(j)=e''(j)$. С другой стороны, из $p\restriction m\leqq p'\restriction m$ и $j<m$ следует: $e(j)==e''(j)$. Теперь выполнение (1) очевидно.

Далее, если $n<m$, то из $p\restriction m\leqq p'\restriction m$ имеем $s_{ni}\subseteq s'_{ni}$ и $X_{ni}\subseteq X'_{ni}$. Отсюда следует выполнение (2) и (3).

Если же $n\geqslant m$, то по условию $n\notin|p'|\cap|p|$. Значит, либо $s_{ni}=X_{ni}=0$, либо $s'_{ni}=X'_{ni}=0$. В обоих случаях требования (2) и (3) из леммы 3 выполняются. Следствие доказано.

В заключение отметим, что все определения и, вообще, все рассуждения 2.1—2.3 по своему смыслу *релятивизованы к L*.

2.4. Генерические фильтры и вынуждение. Фиксируем систему U и рассматриваем множество $P(U)$ с порядком $\leqq$ как *множество вынуждающих условий для генерических расширений конструктивного универсума.*

Подход, состоящий в использовании конструктивного универсума L в качестве исходной модели для генерических расширений, принадлежит по-видимому Р. Енсену ([9]).

Предполагается знакомство читателя с теорией генерических расширений из ([5]), стр. 5—7 (определение *плотного подмножества* $P(U)$, *L-генерического фильтра на* $P(U)$, соответствующего *вынуждения*, и их свойства). Вынуждение, соответствующее $P(U)$, обозначаем через $\Vdash_U$, или просто $\Vdash$, когда ясно, о какой системе U идет речь. Сделаем несколько замечаний.

1. Как и в ([5]), $p\leqq q$ означает, что q «более информативно», чем p, т. е. каждая формула, вынуждаемая p, вынуждается и q. Отметим, что в ([2]) принято обратное соглашение.

2. Ниже будут рассматриваться только L-генерические фильтры и поэтому для краткости мы будем писать «U-г. ф.» вместо «L-генерический фильтр на $P(U)$».

3. Требование ([5]), 1.1.8, о не более чем счетности множества $C==\{Y\subseteq P(U)$: *Y конструктивно*$\}$ выполняется в нашем случае. Действительно, $P(U)$ имеет, очевидно, мощность $\leqslant\omega_2^L$ в L. Следовательно, C имеет мощность $\leqslant\omega_3^L$ в L. Но ординал ω_3^L счетен (в универсуме *всех* множеств) по предположению 1.4.

Требование счетности C влечет для каждого $p\in P(U)$ существование U-г. ф. G, удовлетворяющего $p\in G$. Оно также необходимо для доказательства основных свойств вынуждения (если последнее определяется через истинность в генерических расширениях, как в ([5])).

4. Язык, формулы которого вынуждаются, содержит в ([5]) константы для генерического фильтра и для каждого x из *исходной модели*, т. е. для каждого $x \in L$ в нашем случае. Мы будем обозначать эти константы через $\mathbf{G}$ и $\mathbf{x}$ соответственно.

5. Ниже в § 3 будет построена система U^*, обладающая тем свойством, что каждый U^*-г. ф. G — искомый в смысле второй формулировки ОТ. А сейчас рассмотрим некоторые свойства генерических расширений, не зависящие от конкретного выбора системы U.

2.5. Элементарные свойства генерических расширений. Чтобы не повторяться, фиксируем систему U и некоторый U-г. ф. G. Вводятся следующие множества, принадлежащие генерическому расширению $L[G]$:

$G[0] = \{p(0) : p \in G\}$;

$G[n, i] = \{p(n, i) : p \in G\}$;

$g^G = \bigcup G[0]$;

$S^G_{ni} = \bigcup \{s$: *найдется такое* X, *что* $(s, X) \in G[n, i]\}$.

Справедливы такие утверждения:

1. g^G — *функция из* ω *на* $R \cap L$. *Тем самым* $R \cap L$ *и* ω_1^L *счетны в* $L[G]$.

2. *Каждое* S^G_{ni} *есть подмножество множества* Seq.

3. *Если* $n, i \in \omega$ *и* $i \notin g^G(n)$, *то каждое* $p \in G$ *удовлетворяет условию* $p(n, i) = (0, 0)$. *Тем самым в этом случае* $S^G_{ni} = 0$.

Доказательство 1. Совокупность $\{p(0) : p \in P(U)\}$ образует обычное множество вынуждающих условий для получения генерической функции из ω на $R \cap L$ (см. ([3]), стр. 267, ([2]), стр. 497).

Утверждение 2 очевидно.

Доказательство 3. Пусть, напротив, $p \in G$ и $p(n, i) \neq (0, 0)$. Согласно $i \notin g^G(n)$, мы можем в силу генеричности G, не ограничивая общности, предполагать $p \Vdash$ «$\mathbf{i} \notin g^{\mathbf{G}}(\mathbf{n})$» (индекс U опущен). Но последнее утверждение, как нетрудно проверить, означает $n \in \mathrm{dom}(e)$ и $i \notin e(n)$, где $e = p(0)$. Но это вместе с $p(n, i) \neq (0, 0)$ противоречит 2.2 (vii).

2.6. ТЕОРЕМА О ПОКРЫТИИ. *Пусть* U — *система,* G *есть* U-*г. ф.,* $n \in \omega$, $i \in g^G(n)$ *и* $f \in \mathrm{Fun}$. *Тогда* S^G_{ni} *покрывает* f, *если и только если* $f \notin U_{ni}$.

Эта важная теорема основана на требованиях (iv) и (v) из определения 2.2 и раскрывает их специфику.

Доказательство слева направо. Пусть, напротив, $f \in U_{ni}$ и S^G_{ni} покрывает f. Это утверждение быстро приводит к существованию такого $p \in P(U)$ (и даже $p \in G$, но это не нужно), что:

(1) $n \in \mathrm{dom}(e)$ *и* $i \in e(n)$, *где* $e = p(0)$, и

(2) $p \Vdash$ «$S^{\mathbf{G}}_{\mathbf{ni}}$ *покрывает* $\mathbf{f}$» (индекс U у $\Vdash$ опущен здесь и ниже).

Пусть $p(n, i) = (s, X)$. Поскольку $s \subseteq \mathrm{Seq}$ не более чем счетно в L по 2.2(iii), то найдется такое $\gamma \in \omega_1^L$, что $\mathrm{dom}(h) < \gamma$ для всех $h \in s$. Полагаем $X' = X \cup \{(\gamma, f)\}$ и определяем $p' \in P(U)$ условиями: $p'(0) = p(0)$, $p'(n, i) = (s, X')$ и $p'(m, j) = p(m, j)$ при $m \neq n \vee j \neq i$. Используя $p \in P(U)$, $f \in U_{ni}$ и (1), нетрудно проверить, что действительно $p' \in P(U)$. Также очевидно $p' \geqq p$.

С другой стороны, $p'(n, i)=(s, X')$ и $(\gamma, f)\in X'$. Отсюда и из части 2.2(v) определения $P(U)$ следует: если $p''\in P(U)$, $p''\geqq p'$ и $p''(n, i)=(s'', X'')$, то s'' не покрывает f выше γ. Тем самым, по определению S^G_{ni}, имеем $p' \Vdash$«$\mathbf{S}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{ni}}$ *не покрывает* $\mathbf{f}$ *выше* $\boldsymbol{\gamma}$», что противоречит (2) и $p'\geqq p$. Слева направо теорема доказана.

Доказательство справа налево. Вновь предполагаем противное: $f\notin U_{ni}$, но S^G_{ni} не покрывает f. Это приводит к существованию таких $p\in P(U)$ и $\gamma\in\omega^L_1$, что выполняются следующие два утверждения:

(3) $n\in\mathrm{dom}(e)$ *и* $i\in e(n)$, *где* $e=p(0)$, и

(4) $p\Vdash$«$\mathbf{S}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{ni}}$ *не покрывает* $\mathbf{f}$ *выше* $\boldsymbol{\gamma}$».

Вновь пусть $p(n, i)=(s, X)$. Совокупность $F=\{f'\in\mathrm{Fun}\colon \exists\nu[(\nu, f')\in X]\}$ конструктивна и не более чем счетна в L, и $F\subseteq U_{ni}$ по определению 2.2(iv). Тем самым $f\notin F$. Следовательно, найдется такое $\delta\in\omega^L_1$, что $\delta\geqslant\gamma$ и $f|\delta\neq f'|\delta$ для всех $f'\in F$. Полагаем $s'=s\cup\{f|\delta\}$ и определяем $p'\in P(U)$ и условиями: $p'(0)=p(0)$, $p'(n, i)=(s', X)$ и $p'(m, j)=p(m, j)$ при $m\neq n\vee j\neq i$.

Как и выше, $p'\in P(U)$ и $p'\geqq p$. Кроме того, $p'(n, i)=(s', X)$ и $f|\delta\in s'$, $\delta\geqslant\gamma$. По определению S^G_{ni} это влечет $p' \Vdash$«$\sim$[$\mathbf{S}^{\mathbf{G}}_{\mathbf{ni}}$ *не покрывает* $\mathbf{f}$ *выше* $\boldsymbol{\gamma}$]». Получилось противоречие с (4). Теорема доказана.

2.7. Коды и теоремы о представлении. Ниже нам потребуется проводить тонкое исследование множеств $a\subseteq\omega$ и $S\subseteq\mathrm{Seq}$, принадлежащих генерическим расширениям. Для этого исследования вводятся две конструктивные совокупности кодов для упомянутых множеств.

Через cod обозначаем совокупность всех *конструктивных* семейств вида $c=(Q_k : k\in\omega)$ таких, что каждое Q_k есть подмножество множества P_0 мощности $\leqslant\omega^L_1$ в L. Если c такое, как указано, и $G\subseteq P_0$ (например, G есть U-г. ф. для какой-то системы U), то вводим «наполнение» $c^G=\{k\in\omega : G\cap Q_k\neq 0\}$. Ясно, что $c^G\subseteq\omega$ и $c^G\in L[G]$.

Аналогично, через Cod обозначаем совокупность всех *конструктивных* семейств $c=(Q_h : h\in\mathrm{Seq})$ таких, что каждое Q_h есть подмножество множества P_0 мощности $\leqslant\omega^L_1$ в L. Для такого c и произвольного $G\subseteq P_0$ полагаем $c^G=\{h\in\mathrm{Seq} : G\cap Q_h\neq 0\}$.

Дополнительно для каждой системы U вводим $\mathrm{Cod}(U)$ как совокупность всех таких $c=(Q_h : h\in\mathrm{Seq})\in\mathrm{Cod}$, что $Q_h\subseteq P(U)$ при любом $h\in\mathrm{Seq}$.

Множества cod, Cod и $\mathrm{Cod}(U)$ очевидно конструктивны.

Следующая теорема показывает, что представление $a\in L[G]$, $a\subseteq\omega$, в виде $a=c^G$, $c\in\mathrm{cod}$, возможно для всех таких a.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть U — система и G есть U-г. ф., $a\in L[G]$, $a\subseteq\omega$. Тогда найдется такое $c\in\mathrm{cod}$, что $a=c^G$.*

Доказательство. Будучи элементом $L[G]$, множество a определимо в $L[G]$ некоторой формулой $\varphi(k)$ с конструктивными параметрами и параметром $G : a=\{k\in\omega : \text{в } L[G] \text{ истинно } \varphi(k)\}$. Пусть формула $\boldsymbol{\varphi}(k)$ получается из $\varphi(k)$ заменой параметра G константой $\mathbf{G}$ и каждого параметра $x\in L$ соответствующей константой $\mathbf{x}$.

Рассуждаем в L. Определяем для каждого $k \in \omega$: $B_k = \{p \in P(U): p \Vdash \varphi(\mathbf{k})\}$ (индекс U у $\Vdash$ опущен). Определение B_k можно провести в L, так как вынуждение выразимо в «исходной модели» (([5]), 1.1.9). Далее, для каждого $k \in \omega$ выбираем максимальную в B_k антицепь $Q_k \subseteq B_k$ (т. е. нет такого $p \in B_k$, которое противоречило бы любому $q \in Q_k$). Тогда $\operatorname{card}(Q_k) \leqslant \omega_1$ по 2.3.1 и поэтому $c = (Q_k : k \in \omega)$ принадлежит cod. Конец рассуждений в L.

Докажем, что построенное c — искомое, т. е. $a = c^G$. Согласно генеричности G, выбору формулы φ и определению B_k имеем: $k \in a \equiv G \cap B_k \neq 0$. С другой стороны, по определению c^G, будет $k \in c^G \equiv G \cap Q_k \neq 0$. Таким образом, достаточно доказать эквивалентность: $G \cap B_k = 0 \equiv G \cap Q_k = 0$ для каждого $k \in \omega$.

Импликация слева направо в этой эквивалентности очевидна, так как по определению $Q_k \subseteq B_k$. А импликация справа налево без труда выводится из выбора Q_k как максимальной в B_k антицепи, генеричности G и утверждения 2.3.3. Подробности оставляются читателю. Теорема доказана.

Замечание. По построению выполняется $Q_k \subseteq P(U) \quad \forall k$.

С учетом этого замечания после незначительной переделки доказательства теоремы 1 нетрудно получить доказательство такой теоремы:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть U — система, G есть U-г. ф., $S \in L[G]$, $S \subseteq \mathrm{Seq}$. Тогда найдется такое $c \in \mathrm{Cod}$, что $S = c^G$.*

§ 3. Построение системы U^*

После общих рассуждений § 2 мы построим в этом параграфе систему U^*, обладающую тем свойством, что каждый U^*-г. ф. удовлетворяет второй формулировке основной теоремы 1.4.

Все рассуждения в § 3 проходят в *конструктивном универсуме L*.

3.1. Предварительные определения. Пишем, что система V *продолжает* систему U, если включение $U_{ni} \subseteq V_{ni}$ выполняется для всех n, i. Систему U называем маленькой, если каждое множество U_{ni} имеет мощность $\leqslant \omega_1$. Через PS обозначаем совокупность всех пар (U, V) таких, что U и V — маленькие системы, и $U_{ni} \cap V_{ni} = 0 \quad \forall n, i$.

Если $m \in \omega$, то полагаем $PS_{<m} = \{(U, V) \in PS$: *для всех $n \geqslant m$ и $i \in \omega$ выполняется* $U_{ni} = V_{ni} = 0\}$, и $PS_{\geqslant m} = \{(U, V) \in PS$: *для всех $n < m$ и $i \in \omega$ выполняется* $U_{ni} = V_{ni} = 0\}$.

Пусть U — система и $m \in \omega$. Через $U[<m]$ обозначим систему U', определенную условиями $U'_{ni} = U_{ni}$ при $n < m$ и $U'_{ni} = 0$ при $n > m$. Аналогично, через $U[\geqslant m]$ обозначаем систему U'', определенную условиями $U''_{ni} = U_{ni}$ при $n \geqslant m$ и $U''_{ni} = 0$ при $n < m$.

Если α — ординал и $(U^\gamma : \gamma \in \alpha)$ — последовательность систем, то через $\lim_{\gamma \in \alpha} U^\gamma$ обозначаем систему U, определенную условием $U_{ni} = \bigcup_{\gamma \in \alpha} U^\gamma_{ni} \quad \forall n, i$. Последовательность систем $(U^\gamma : \gamma \in \alpha)$ называем *непрерывной возрастающей последовательностью* (*н. в. п.*), если (1) каждая система U^γ — маленькая, (2) U^β продолжает U^γ при $\gamma\in\beta\in\alpha$ и (3) $U^\beta=\lim\limits_{\gamma\in\beta}U^\gamma$ для всех предельных $\beta\in\alpha$.

Две н. в. п. $(U^\gamma:\gamma\in\alpha)$ и $(V^\gamma:\gamma\in\alpha)$ называем *встречными*, если $(U^\gamma, V^\gamma)\in PS$ для всех $\gamma\in\alpha$.

Наконец, если (U, V) и (U', V') принадлежат PS, причем U' продолжает U и V' продолжает V, то пишем, что (U', V') *продолжает* (U, V).

Система U^*, которая будет построена ниже, будет иметь вид $U^*=\lim\limits_{\alpha\in\omega_2}U^\alpha$, где $(U^\alpha:\alpha\in\omega_2)$ — предварительно построенная н. в. п. . Одновременно мы построим другую н. в. п. $(V^\alpha:\alpha\in\omega_2)$, встречную с первой. Построение обеих н. в. п. проходит в 3.6 после некоторых вспомогательных рассуждений 3.2—3.5.

3.2. Определимость в $H\omega_2$. Через $H\omega_2$ обозначается множество $\{x$: *мощность транзитивного замыкания x меньше ω_2*$\}$. Используются стандартные обозначения Σ_n, Π_n для классов $\in$-формул [10].

С целью уменьшения громоздкости, мы будем множество $\Sigma_n^{H\omega_2}=\{X\subseteq H\omega_2: X$ *определимо в $H\omega_2$ некоторой Σ_n-формулой без параметров*$\}$ обозначать через $\Sigma_n^{(2)}$. Аналогично, $\Pi_n^{(2)}$, а $\Delta_n^{(2)}=\Sigma_n^{(2)}\cap\Pi_n^{(2)}$.

Далее, определяем $\mathbf{\Sigma}_n^{(2)}=\{X\subseteq H\omega_2: X$ *определимо в $H\omega_2$ некоторой Σ_n-формулой, в которую допускаются вхождения параметров из $H\omega_2$*$\}$. Аналогично $\mathbf{\Pi}_n^{(2)}$, а $\mathbf{\Delta}_n^{(2)}=\mathbf{\Pi}_n^{(2)}\cap\mathbf{\Sigma}_n^{(2)}$.

Формулируется следующее утверждение об определимости в $H\omega_2$ некоторых ранее введенных множеств.

$R\cap L\in\Sigma_0^{(2)}$, $\omega_1\in\Sigma_1^{(2)}$, а следующие множества принадлежат $\Delta_2^{(2)}$: $\{\omega_1\}$, Seq, Fun, P_0, cod, Cod, $\{U$: U — маленькая система$\}$, PS, $PS_{<m}$ и $PS_{\geqslant m}$ равномерно по m *, *$\{(U, p)$: U — маленькая система и $p\in P(U)\}$, $\{(p, q): p, q\in P_0$ и $p\leqq q\}$ и $\{(p, q): p, q\in P_0$ непротиворечивы$\}$.*

Набросок доказательства. Поскольку все рассуждения § 3 проходят в L, то $R\cap L=R\in\Sigma_0^{(2)}$. Далее, пусть $\mathrm{cnt}(x)$ — следующая Σ_1-формула, выражающая не более чем счетность: $\exists f$ [f — *функция из* ω *на* $x\cup\{0\}$]. Имеем: $\omega_1=\{\gamma$: γ — *ординал и* $\mathrm{cnt}(\gamma)\}\in\Sigma_1^{(2)}$. Точно так же, $\{\omega_1\}=\{\lambda$: λ — *ординал*, $\sim\mathrm{cnt}(\lambda)$ *и* $(\forall\gamma\in\lambda)\,\mathrm{cnt}(\gamma)\}$, т. е. $\{\omega_1\}$ определимо в $H\omega_2$ формулой, являющейся конъюнкцией Σ_0-формулы «λ — *ординал*», Π_1-формулы «$\sim\mathrm{cnt}(\lambda)$», и Σ_1-формулы «$(\forall\gamma\in\lambda)\,\mathrm{cnt}(\gamma)$» (квантор $(\forall\gamma\in\lambda)$ является *ограниченным* и не влияет на уровень определимости). Отсюда и вытекает $\{\omega_1\}\in\Delta_2^{(2)}$.

А все остальные записанные множества определимы в $H\omega_2$ формулами, составленными из формул вида $\mathrm{cnt}(x)$, $x\in R\cap L$, $x=\omega_1$, с помощью пропозициональных знаков и ограниченных кванторов. Запись этих формул получается непосредственной реализацией определений и оставляется читателю. Единственная тонкость имеет место при рассмотрении последнего из указанных множеств, нужно воспользоваться 2.3.2 и записать его в виде $\{(p, q)$: множества p, q и $p\vee q$ принадлежат $P_0\}$.

* Это означает, что множества $\{(m, U): m\in\omega$ и $U\in PS_{<m}$ (или $PS_{\geqslant m}$)$\}$ принадлежат $\Delta_2^{(2)}$.

3.3. Каноническое полное упорядочение $H\omega_2$. Напомним, что все рассуждения § 3 проходят в L. Это означает, что существует *каноническое полное упорядочение* (конструктивного) универсума. Через $\prec$ обозначаем сужение этого полного упорядочения на множество $H\omega_2$. Отношение $\prec$ на $H\omega_2$ упорядочивает $H\omega_2$ по типу ω_2 и имеет свойства определимости, выраженные в следующем утверждении [см. ([10]), стр. 83]:

1. *Множества* $\{(x, y): x, y \in H\omega_2$ *и* $x \prec y\}$ *и* $IS = \{\{y : y \prec x\}: x \in H\omega_2\}$ (*совокупность всех начальных сегментов* $H\omega_2$ *в смысле* $\prec$) *оба принадлежат* $\Delta_1^{(2)}$.

С помощью этого утверждения докажем «принцип униформизации»:

ЛЕММА 2. *Пусть* $X \subseteq H\omega_2 \times H\omega_2$, $X \in \Delta_n^{(2)}$, $n \geqslant 1$. *Тогда множество* $F = \{(x, y) \in X$: *y есть $\prec$-наименьшее из таких y', что* $(x, y') \in X\}$ *также принадлежит* $\Delta_n^{(2)}$.

Доказательство. Имеют место следующие два равенства для F:

$$F = \{(x, y) : (x, y) \in X \text{ и } \forall y' \, [y' \prec y \rightarrow (x, y') \notin X]\},$$

$$F = \{(x, y) : (x, y) \in X \text{ и } \exists Z \, [Z \in IS \,\&\, y \in Z \,\&\, (\forall y' \in Z) \, [y' \neq y \rightarrow$$
$$\rightarrow (x, y') \notin X]]\}.$$

Первое из них дает Π_n-определение F в $H\omega_2$, а второе дает Σ_n-определение. Приведение записанных формул к видам из Π_n и Σ_n осуществляется с помощью утверждения 1 и $X \in \Delta_n^{(2)}$. Заметим, что квантор „$(\forall y' \in Z)$" *ограничен* и не повышает сложности.

Более подробное доказательство аналогичного утверждения см. в ([10]), теорема на стр. 86—87.

3.4. Последовательности m_α, t_α, $U^{(\alpha)}$ и $V^{(\alpha)}$. Эти множества играют важную роль в построении U^α и V^α в 3.6 ниже.

Для каждого $\alpha \in \omega_2$ построим множества m_α, t_α, $U^{(\alpha)}$ и $V^{(\alpha)}$ так, что выполняются следующие три условия:

1. $m_\alpha \in \omega$, $t_\alpha \in H\omega_2$, $(U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)}) \in PS$ $\forall \alpha$.

2. *Последовательности* $(m_\alpha : \alpha \in \omega_2)$, $(t_\alpha : \alpha \in \omega_2)$, $(U^{(\alpha)} : \alpha \in \omega_2)$ *и* $(V^{(\alpha)} : \alpha \in \omega_2)$ *принадлежат совокупности* $\Delta_2^{(2)}$.

3. *Пусть* $m \in \omega$, $t \in H\omega_2$, $\varkappa \subseteq \omega_2$ *замкнуто и неограничено в* ω_2 (*т. е.* $\bigcup \varkappa = \omega_2$ *и* $\bigcup (\varkappa \cap \alpha) \in \varkappa$ *для всех* $\alpha \in \omega_2$). *Пусть также* $(U^\alpha : \alpha \in \omega_2)$ *и* $(V^\alpha : \alpha \in \omega_2)$ — *встречные н. в. п. Тогда найдется такое* $\alpha \in \varkappa$, *что* $m = m_\alpha$, $t = t_\alpha$, $U^\alpha = U^{(\alpha)}$ *и* $V^\alpha = V^{(\alpha)}$.

Построение указанных множеств будет опираться на последовательность $(A_\alpha : \alpha \in \omega_2)$ элементов множества $H\omega_2$ с такими свойствами:

(i) $(A_\alpha : \alpha \in \omega_2) \in \Delta_1^{(2)}$ и

(ii) *если* $\varkappa' \subseteq \omega_2$ *замкнуто и неограничено в* ω_2 *и* $(B_\alpha : \alpha \in \omega_2)$ — *последовательность элементов* $H\omega_2$, *то найдется такое* $\alpha \in \varkappa'$, *что* $A_\alpha = (B_\gamma : \gamma \in \alpha)$.

В свою очередь, существование такой последовательности опирается на принцип Енсена $\diamondsuit_{\omega_2}$, истинный в предположении $V = L$ (а $V = L$ предполагается в этом параграфе), см. ([10]), ([14]). Этот принцип утверждает существование последовательности $(S_\alpha : \alpha \in \omega_2)$ множеств $S_\alpha \subseteq \alpha$, удовлетворяющей такому условию:

(1) если множество $\varkappa \subseteq \omega_2$ замкнуто и неограничено в ω_2, и если $X \subseteq \omega_2$, то найдется такое $\alpha \in \varkappa$, что $X \cap \alpha = S_\alpha$.

Анализируя любое стандартное построение такой последовательности ([10]), ([14]), нетрудно с помощью принципа униформизации 3.3.2 проверить, что для нее выполняется:

(2) $(S_\alpha : \alpha \in \omega_2) \in \Delta_1^{(2)}$.

Далее, для каждого $\alpha \in \omega_2$ пусть $C(\alpha)$ есть α-ый в смысле порядка $\prec$ из 3.3 элемент множества $H\omega_2$. Тогда функция C из ω_2 на $H\omega_2$ конструктивна и принадлежит $\Delta_1^{(2)}$ вследствие выбора порядка $\prec$.

Строим A_α, исходя из S_α и C так: $A_\alpha = C''S_\alpha = \{C(\beta) : \beta \in S_\alpha\}$. Из (2) и принадлежности C к $\Delta_1^{(2)}$ немедленно вытекает свойство (i) последовательности $(A_\alpha : \alpha \in \omega_2)$. Проверим (ii). Пусть $\varkappa'$ и $(B_\alpha : \alpha \in \omega_2)$ таковы, как указано в (ii). Положим $X = \{\beta \in \omega_2 : C(\beta) = \{(\gamma, B_\gamma)\}$ *для некоторого* $\gamma \in \omega_2\}$. Положим также $\varkappa'' = \{\alpha \in \omega_2 : \{C(\beta) : \beta \in X \cap \alpha\} = \{(\gamma, B_\gamma) : \gamma \in \alpha\}\}$ и $\varkappa = \varkappa' \cap \varkappa''$. Ясно, что $X \subseteq \omega_2$. Кроме того, нетрудно проверить замкнутость и неограниченность в ω_2 множества $\varkappa''$. Значит, пересечение $\varkappa$ двух замкнутых и неограниченных множеств само является таковым. Теперь в силу (1) найдется такое $\alpha \in \varkappa$, что $X \cap \alpha = S_\alpha$. Имеем: $(B_\gamma : \gamma \in \alpha)\, (= \{(\gamma, B_\gamma) : \gamma \in \alpha\}) = \{C(\beta) : \beta \in X \cap \alpha\}$ (так как $\alpha \in \varkappa''$) $= \{C(\beta) : \beta \in S_\alpha\}$ (так как $X \cap \alpha = S_\alpha$) $= A_\alpha$. Но по построению $\alpha \in \varkappa \subseteq \varkappa'$. Доказательство (ii) закончено.

Теперь, имея последовательность $(A_\alpha : \alpha \in \omega_2)$ со свойствами (i) и (ii), мы определяем множества m_α, t_α, $U^{(\alpha)}$ и $V^{(\alpha)}$.

Пусть $\alpha \in \omega_2$. Если A_α имеет вид $(a_\gamma : \gamma \in \alpha)$, каждое a_γ есть четверка $(m, t, U^\gamma, V^\gamma)$ (где m и t — одни и те же для всех γ), и $(U^\gamma : \gamma \in \alpha)$, $(V^\gamma : \gamma \in \alpha)$ — встречные н. в. п., то определяем $m_\alpha = m$, $t_\alpha = t$, $U^{(\alpha)} = \lim\limits_{\gamma \in \alpha} U^\gamma$ и $V^{(\alpha)} = \lim\limits_{\gamma \in \alpha} V^\gamma$.

Если же указанная группа условий не выполняется, то полагаем $m_\alpha = t_\alpha = 0$ и $U^{(\alpha)} = V^{(\alpha)} = (\omega \times \omega) \times \{0\}$ (т. е. $U^{(\alpha)}_{ni} = V^{(\alpha)}_{ni} = 0 \ \forall n, i$).

Определение m_α, t_α, $U^{(\alpha)}$ и $V^{(\alpha)}$ закончено. Проверим выполнение условий 1, 2, 3, сформулированных выше.

Выполнение 1 очевидно из построения и определения lim.

Далее, группа условий, детерминирующая две альтернативы построения, выражает $\Delta_2^{(2)}$-отношение (это легко получается из (i) и 3.2). Отсюда следует выполнение 2.

Наконец, доказательство 3 получается применением (ii) к множеству $\varkappa' = \{\alpha \in \varkappa : \alpha$ предельно$\}$ и последовательности $(B_\alpha : \alpha \in \omega_2)$, определенной условием $B_\alpha = (m, t, U^\alpha, V^\alpha)$ для каждого $\alpha \in \omega_2$. При этом нужно учесть непрерывность последовательностей U^α и V^α, которая влечет равенства $U^\alpha = \lim\limits_{\gamma \in \alpha} U^\gamma$ и $V^\alpha = \lim\limits_{\gamma \in \alpha} V^\gamma$ для предельных $\alpha \in \omega_2$.

Подробности мы оставляем читателю.

3.5. Запирающие пары. Пусть $(U', V')\in PS$, $m\in\omega$ и $D\subseteq H\omega_2$ произвольно. Пишем, что пара (U', V') *m-запирает D*, если выполняется одно из следующих двух условий:

(i) $(U'[\geqslant m], V'[\geqslant m])\in D$;

(ii) *нет пары* $(U'', V'')\in D\cap PS_{\geqslant m}$, *продолжающей* $(U'[\geqslant m], V'[\geqslant m])$.

Следующее утверждение очевидно:

1. *Если* $m\in\omega$, $\alpha\in\omega_2$ *и* $D\subseteq H\omega_2$, *то найдется такая пара* $(U', V')\in PS$, *продолжающая пару* $(U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)})$ (*построенную в* 3.4) *и m-запирающая множество D, что* $U'[<m]=U^{(\alpha)}[<m]$ *и* $V'[<m]=V^{(\alpha)}[<m]$.

(Это утверждение верно, разумеется, не только для пар $(U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)})$, но и для любой пары $(U, V)\in PS$.)

Через $F^m_D(\alpha)$ обозначаем наименьшую в смысле полного порядка $\prec$ (3.3) из таких пар (U', V').

Далее, для каждого $n\geqslant 1$ фиксируем Σ_n-формулу $\mathrm{un}_n(x, t)$, *универсальную* в смысле следующего утверждения: если $X\subseteq H\omega_2$, $X\in\Sigma^{(2)}_n$, то найдется такое $t\in H\omega_2$, что $X=\{x\in H\omega_2$: *в* $H\omega_2$ *истинно* $\mathrm{un}_n(x, t)\}$. Определяем $M^n_t=\{x\in H\omega_2$: *в* $H\omega_2$ *истинно* $\mathrm{un}_n(x, t)\}$. Из выбора формулы un_n имеем такое утверждение:

2. $\{M^n_t : t\in H\omega_2\}$ *есть в точности совокупность всех $\Sigma^{(2)}_n$-подмножеств множества* $H\omega_2$ (предполагается $n\geqslant 1$).

Наконец, для $\alpha\in\omega_2$ и $m\in\omega$ определяем $U^{(m\alpha)}$ и $V^{(m\alpha)}$ так, что $(U^{(m\alpha)}, V^{(m\alpha)})=F^m_D(\alpha)$, где $D=M^{m+2}_t$ и $t=t_\alpha$. Из определений немедленно вытекает такое утверждение:

3. *Пусть* $\alpha\in\omega_2$ *и* $m\in\omega$. *Тогда пара* $(U^{(m\alpha)}, V^{(m\alpha)})$ *принадлежит* PS, *продолжает пару* $(U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)})$, *$m$-запирает множество* $M^{m-2}_{t_\alpha}$ *и удовлетворяет равенствам* $U^{(m\alpha)}[<m]=U^{(\alpha)}[<m]$, $V^{(m\alpha)}[<m]=V^{(\alpha)}[<m]$.

Как обычно, через $U^{(m\alpha)}_{ni}$ и $V^{(m\alpha)}_{ni}$ обозначаются n, i-е компоненты систем $U^{(m\alpha)}$ и $V^{(m\alpha)}$ (см. (2.1). Отметим, что из двух последних равенств утверждения 3 вытекает: $U^{(m\alpha)}_{ni}=U^{(\alpha)}_{ni}$ и $V^{(m\alpha)}_{ni}=V^{(\alpha)}_{ni}$ всякий раз, когда $n<m$.

А теперь доказывается лемма об определимости компонент.

ЛЕММА 4. *Пусть* $m\in\omega$. *Тогда множества* $(U^{(m\alpha)}_{ni} : \alpha\in\omega_2$ *и* $n, i\in\omega)$ *и* $(V^{(m\alpha)}_{ni} : \alpha\in\omega_2$ *и* $n, i\in\omega)$ *принадлежат* $\Delta^{(2)}_{m+3}$.

Доказательство проводим лишь для первого множества, доказательство для второго аналогично. Достаточно проверить, что последовательность $(U^{(m\alpha)} : \alpha\in\omega_2)$ принадлежит $\Delta^{(2)}_{m+3}$. Из 3.2, 3.4.2 и принадлежности к совокупности Σ_{m+2} формулы un_{m+2} нетрудно получить следующий факт: множество $\{\alpha, U', V')$: *пара* (U', V') *принадлежит* PS, *продолжает пару* $(U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)})$, *$m$-запирает множество* $M^{m+2}_{t\alpha}$ *и удовлетворяет* $U'[<m]=U^{(\alpha)}[<m]$ *и* $V'[<m]=V^{(\alpha)}[<m]\}$ принадлежит $\Delta^{(2)}_{m+3}$. Точнее, это множество определимо в $H\omega_2$ конъюнкцией Σ_{m+2}-формулы, записывающей условие (i) для (U', V') и связь с $(U^{(\alpha)}, V^{(\alpha)})$ и t_α, и Π_{m+2}-формулы, записывающей (ii) для (U', V').

Теперь принадлежность $(U^{(m\alpha)} : \alpha\in\omega_2)$ к $\Delta^{(2)}_{m+3}$ следует из принципа униформизации 3.3.2 и определений. Лемма доказана.

После предварительных построений 3.2—3.5 мы приступаем к построению последовательностей U^α и V^α, о которых говорилось в 3.1.

3.6. ТЕОРЕМА О ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ U^α, V^α. *Существуют последовательности* $(U^\alpha : \alpha \in \omega_2)$ *и* $(V^\alpha : \alpha \in \omega_2)$, *удовлетворяющие следующим трем условиям*:

(i) *эти последовательности являются встречными н. в .п.*;

(ii) *если* $m \in \omega$, $\beta \in \omega_2$ *и множество* $D \subseteq H\omega_2$ *принадлежит* $\Sigma^{(2)}_{m+2}$, *то найдется такое* $\alpha \in \omega_2$, $\alpha \geqslant \beta$, *что пара* (U^α, V^α) *m-запирает множество* D;

(iii) *если* $n \in \omega$, *то множества* $(U^\alpha_{ni} : \alpha \in \omega_2$ *и* $i \in \omega)$ *и* $(V^\alpha_{ni} : \alpha \in \omega_2$ *и* $i \in \omega)$ *принадлежат* $\Sigma^{(2)}_{n+3}$.

Доказательство. Укажем построение U^α и V^α индукцией по $\alpha \in \omega_2$.

(а) Полагаем $U^0 = V^0 = (\omega \times \omega) \times \{0\}$, т. е. $U^0_{ni} = V^0_{ni} = 0 \quad \forall n, i$.

(б) Если $\beta \in \omega_2$ предельно, то $U^\beta = \lim\limits_{\gamma \in \beta} U^\gamma$ и $V^\beta = \lim\limits_{\gamma \in \beta} V^\gamma$.

(в) Пусть $\alpha \in \omega_2$, и U^α, V^α построены, $(U^\alpha, V^\alpha) \in PS$. Построим $(U^{\alpha+1}, V^{\alpha+1}) \in PS$. Для этого фиксируем $n, i \in \omega$ и укажем построение компонент $U^{\alpha+1}_{ni}$ и $V^{\alpha+1}_{ni}$. Обратим внимание читателя на то обстоятельство, что это построение будет опираться лишь на компоненты U^α_{ni} и V^α_{ni} систем U^α и V^α (уже построенных), а не на «целые» системы U^α и V^α.

Построение зависит от выполнения следующего условия:

$$m_\alpha \leqslant n, \quad U^\alpha_{ni} = U^{(\alpha)}_{ni}, \quad V^\alpha_{ni} = V^{(\alpha)}_{ni}. \tag{$*$}$$

Если $(*)$ выполняется, то определяем $m = m_\alpha$, $U^{\alpha+1}_{ni} = U^{(m\alpha)}_{ni}$ и $V^{\alpha+1}_{ni} = V^{(m\alpha)}_{ni}$ ($U^{(m\alpha)}_{ni}$ и $V^{(m\alpha)}_{ni}$ — это n, i-е компоненты построенных в 3.5 систем $U^{(m\alpha)}$ и $V^{(m\alpha)}$).

Если же $(*)$ не выполняется, то определяем $U^{\alpha+1}_{ni} = U^\alpha_{ni}$ и $V^{\alpha+1}_{ni} = V^\alpha_{ni}$. Определение $U^{\alpha+1}_{ni}$ и $V^{\alpha+1}_{ni}$ закончено.

Проведя таким образом определение $U^{\alpha+1}_{ni}$ и $V^{\alpha+1}_{ni}$ для всех $n, i \in \omega$, мы получим системы $U^{\alpha+1}$ и $V^{\alpha+1}$, компонентами которых являются $U^{\alpha+1}_{ni}$ и $V^{\alpha+1}_{ni}$.

Индуктивное построение U^α и V^α, $\alpha \in \omega_2$, закончено.

Докажем, что построенные последовательности удовлетворяют требованиям (i, ii, iii) из формулировки теоремы. Начнем со следующих двух утверждений.

1. *Если* $\alpha \in \omega_2$, *то* $(U^\alpha, V^\alpha) \in PS$ *и пара* $(U^{\alpha+1}, V^{\alpha+1})$ *продолжает пару* (U^α, V^α). *Тем самым, согласно части* (б) *индуктивного построения, построенные последовательности будут встречными н. в. п.. То есть выполняется требование* (i).

2. *Пусть* $\alpha \in \omega_2$ *таково, что* $U^\alpha = U^{(\alpha)}$ *и* $V^\alpha = V^{(\alpha)}$. *Тогда* $U^{\alpha+1} = U^{(m\alpha)}$, $V^{\alpha+1} = V^{(m\alpha)}$ *и пара* $(U^{\alpha+1}, V^{\alpha+1})$ *m-запирает множество* M^{m+2}_t, *где* $m = m_\alpha$ *и* $t = t_\alpha$.

Несложное доказательство обоих утверждений непосредственно вытекает из определений и утверждения 3.5.3 (в частности, используются равенства $U^{(m\alpha)}[<m] = U^{(\alpha)}[<m]$ и $V^{(m\alpha)}[<m] = V^{(\alpha)}[<m]$ в 3.5.3).

Подробности доказательства 1 и 2 представляются читателю.

После доказательства требования (i) из формулировки теоремы (утверждение 1) мы в 3.7 и 3.8 докажем также (ii) и (iii) для построенных последовательностей и завершим тем самым доказательство теоремы.

3.7. Проверка (ii). Итак, проверяем требование (ii) из формулировки теоремы 3.6 для построенных в 3.6 последовательностей.

Пусть $m \in \omega$, $\beta \in \omega_2$, $D \subseteq H\omega_2$, $D \in \Sigma^{(2)}_{m+2}$. Найдём такое $\alpha \geqslant \beta$, что пара (U^α, V^α) будет m-запирать D. Согласно 3.5.2, множество D имеет вид $D = M^{m+2}_t$ для подходящего $t \in H\omega_2$. Фиксируем это t и применяем 3.4.3 для рассматриваемых m, t, множества $\varkappa = \{\alpha \in \omega_2 : \alpha \geqslant \beta\}$ и построенных в 3.6 последовательностей (они являются встречными н. в. п. по 3.6.1). Находим такое $\alpha \in \omega_2$, $\alpha \geqslant \beta$, что $m_\alpha = m$, $t_\alpha = t$, $U^{(\alpha)} = U^\alpha$ и $V^{(\alpha)} = V^\alpha$.

Теперь применение 3.6.2 с учетом выбора t завершает доказательство.

3. 8. Проверка (iii). Фиксируем $n \in \omega$ и докажем принадлежность к $\Sigma^{(2)}_{n+3}$ множества $E = \{(\alpha, i, U^\alpha_{ni}) : \alpha \in \omega_2$ и $i \in \omega\}$ (это более подробная запись множества $(U^\alpha_{ni} : \alpha \in \omega_2$ и $i \in \omega))$.

Запишем следующую формулу: $\varphi_n(\alpha, i, u, v, u', v') \leftrightharpoons \alpha \in \omega_2 \& i \in \omega \& \theta$, где θ есть дизъюнкция $\theta_1 \vee \theta_2$, а θ_1, θ_2 — такие формулы:

$$\theta_1 \leftrightharpoons \bigvee_{m \leqslant n} [m = m_\alpha \,\&\, u = U^{(\alpha)}_{ni} \,\&\, v = V^{(\alpha)}_{ni} \& u' = U^{(m\alpha)}_{ni} \,\&\, v' = V^{(m\alpha)}_{ni}],$$

$$\theta_2 \leftrightharpoons [u' = u \& v' = v \,\&\, [m_\alpha > n \vee u \neq U^{(\alpha)}_{ni} \vee v \neq V^\alpha_{ni}]].$$

С одной стороны, из определения 3.6 вытекает следующее утверждение.

1. *Пусть $\alpha \in \omega_2$ и $i \in \omega$, а u', $v' \in H\omega_2$ произвольны. Тогда формула $\varphi_n(\alpha, i, U^\alpha_{ni}, V^\alpha_{ni}, u', v')$ истинна в $H\omega_2$, если и только если $u' = U^{\alpha+1}_{ni}$ и $v' = V^{\alpha+1}_{ni}$.*

А с другой стороны, из 3.4.2 и 3.5.4 следует

2. *Множество $\{(\alpha, i, u, v, u', v') :$ в $H\omega_2$ истинно $\varphi_n(\alpha, i, u, v, u', v')\}$ принадлежит совокупности $\Delta^{(2)}_{n+3}$.*

Теперь непосредственно приступаем к изучению сложности множества E. Вводим еще одну вспомогательную формулу: $\psi_n(\alpha, i, f, g) \leftrightharpoons \alpha \in \omega_2 \& \& i \in \omega \& [f, g$ — *функции, определенные на множестве* $\alpha + 1] \& f(0) = = g(0) = 0 \&$ [*для каждого предельного* $\beta \leqslant \alpha$ *выполняется* $f(\beta) = \bigcup_{\gamma \in \beta} f(\gamma)$ *и* $g(\beta) = \bigcup_{\gamma \in \beta} g(\gamma)] \& (\forall \beta \in \alpha) \varphi_n(\alpha, i, f(\beta), g(\beta), f(\beta+1), g(\beta+1))$.

Сразу же отметим, что из утверждения 2 вытекает

3. *Множество $\{(\alpha, i, f, g) :$ в $H\omega_2$ истинно $\psi_n(\alpha, i, f, g)\}$ принадлежит $\Delta^{(2)}_{n+3}$.*

Кроме того, из утверждения 1 и определения 3.6 следует: $\psi_n(\alpha, i, f, g)$ истинно в $H\omega_2$, если и только если $f(\beta) = U^\beta_{ni}$ и $g(\beta) = V^\beta_{ni}$ для всех $\beta \leqslant \alpha$. Значит, выполняется равенство $E = \{(\alpha, i, u) :$ *в* $H\omega_2$ *истинно* $\exists f \exists g\ [\psi_n(\alpha, i, f, g) \& f(\alpha) = u]\}$. Из этого равенства и из 3 получаем: $E \in \Sigma^{(2)}_{n+3}$.

Проверка требования 3.6 (iii) для второго множества (V^{α}_{ni} : $\alpha \in \omega_2$ и $i \in \omega$) аналогична.

Таким образом, проверка требований (i, ii, iii) из формулировки теоремы 3.6 для построенных выше последовательностей закончена. Теорема 3.6 доказана.

3.9. Система U^*. Итак, мы построили последовательности ($U^{\alpha}: \alpha \in \omega_2$) и ($V^{\alpha}: \alpha \in \omega_2$), удовлетворяющие требованиям 3.6 (i, ii, iii). Эти последовательности фиксируются в дальнейшем изложении. Напомним, что их построение, как и все рассуждения § 3, проходит в конструктивном универсуме L.

Определим $U^* = \lim\limits_{\alpha \in \omega_2} U^{\alpha}$ и $V^* = \lim\limits_{\alpha \in \omega_2} V^{\alpha}$ и сформулируем несколько утверждений, относящихся к U^* и V^*.

1. *Если* $\beta \leqslant \alpha \in \omega_2$, *то пара* ($U^{\alpha}$, V^{α}) *принадлежит* PS, *продолжает пару* (U^{β}, V^{β}) *и выполняется* $P(U^{\beta}) \subseteq P(U^{\alpha}) \subseteq P(U^*)$.

2. $U^*_{ni} = \bigcup\limits_{\alpha \in \omega_2} U^{\alpha}_{ni}$, $V^*_{ni} = \bigcup\limits_{\alpha \in \omega_2} V^{\alpha}_{ni}$, $U^*_{ni} \cap V^*_{ni} = 0$.

3. $P(U^*) = \bigcup\limits_{\alpha \in \omega_2} P(U^{\alpha})$.

Утверждения 1, 2 легко получаются из 3.6 (i) и определения lim. Для доказательства 3 нужно обратить внимание на то, что в каждом $p \in P_0$ «участвует» лишь не более чем счетное число $f \in \mathrm{Fun}$.

Несколько менее тривиальной является следующая

ЛЕММА 4. *Пусть* $n, i \in \omega$. *Тогда множество* U^*_{ni} *имеет мощность* ω_2.

Доказательство. Предположим противное: $\operatorname{card}(U^*_{ni}) \leqslant \omega_1$. Тогда $U^*_{ni} \in H\omega_2$ и поэтому, в силу 3.2, множество $D = \{(U, V) \in PS: U_{ni} \not\subseteq U^*_{ni}\}$ принадлежит $\Sigma^{(2)}_2$ (с параметром U^*_{ni}). Значит, согласно 3.6 (ii) (при $m=0$), найдется такое $\alpha \in \omega_2$, что выполняется либо (а), либо (б):

(а) $(U^{\alpha}, V^{\alpha}) \in D$;

(б) *нет пары* $(U, V) \in D$, *продолжающей* (U^{α}, V^{α}).

Если выполняется (а), то по определению множества D будет $U^{\alpha}_{ni} \not\subseteq U^*_{ni}$, что противоречит утверждению 2.

Пусть выполняется (б). Покажем, что и в этом случае получается противоречие. Поскольку $(U^{\alpha}, V^{\alpha}) \in PS$ по 3.6 (i), то множество V^{α}_{ni} имеет мощность $\leqslant \omega_1$. Тем самым, согласно предположению в начале доказательства, $V^{\alpha}_{ni} \cup U^*_{ni}$ также имеет мощность $\leqslant \omega_1$. Значит, найдется $f \in \mathrm{Fun}$, $f \notin V^{\alpha}_{ni} \cup U^*_{ni}$. Теперь определяем систему U' условиями: $U'_{ni} = U^{\alpha}_{ni} \cup \cup \{f\}$ и $U'_{mj} = U_{mj}$ при $m \neq n \vee j \neq i$. Из выбора f ясно, что пара (U', V^{α}) принадлежит PS, продолжает пару (U^{α}, V^{α}) и удовлетворяет $f \in U'_{ni}$. Последнее означает, что (U', V^{α}) принадлежит D. Но это противоречит формулировке (б).

Итак, обе возможности (а) и (б) ведут к противоречию. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. *Пусть* $n \in \omega$. *Тогда множества* $C_n = \{(i, f): i \in \omega$ *и* $f \in U^*_{ni}\}$ *и* $C' = \{(i, f): i \in \omega$ *и* $f \in V^*_{ni}\}$ *принадлежит* $\Sigma^{(2)}_{n+3}$.

Доказательство проводим для C_n; доказательство для C'_n аналогично. Из утверждения 2 имеем: $C_n = \{(i, f) : i \in \omega \,\&\, (\exists\, \alpha \in \omega_2)\, [f \in U^{\alpha}_{ni}]\}$. Теперь $C_n \in \Sigma^{2)}_{n+3}$ следует из 3.6 (iii).

§ 4. Конструктивность всех аналитически определимых в $L[G]$ множеств натуральных чисел

4.1. Третья формулировка основной теоремы. Построенная в 3.9 система U^* будет играть центральную роль в доказательстве основной теоремы. Именно, теперь мы будем доказывать ОТ в такой форме:

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА (третья формулировка). *Если G есть U^*-г. ф., то*:

(i) *каждое $a \in L[G] \cap R$, аналитически определимое в $L[G]$, является конструктивным*;

(ii) *каждое конструктивное $r \subseteq \omega$ аналитически определимо в $L[G]$*.

Вывод второй формулировки ОТ (1.4) из третей тривиален в силу существования U^*-г. ф., 2.4.3.

Доказательству утверждения (i) посвящен § 4. Сперва в 4.2—4.6 мы вводим специальный аппарат отношения forc для изучения аналитической истинности в $L[G]$, основанный на теореме о представлении 2.7.1. Затем в 4.7—4.9 доказывается утверждение (i). Доказательство использует одно утверждение — принцип ограничения 4.8(∗),— проверка которого выделена в отдельный § 5.

Все рассуждения 4.2—4.6 и 4.8 проходят в конструктивном универсуме L, как и рассуждения § 3.

4.2. $\sim\&\exists$-формулы. Вводится специальный язык для изучения аналитической истинности в генерических расширениях. Здесь и ниже в § 4 буквами m, n, k обозначаются натуральные числа и переменные типа 0 (с областью пробегания ω), буквой x — переменные типа 1 (с областью пробегания $\mathscr{P}(\omega)$), буквой c — «коды», элементы множества cod.

Элементарной $\sim\&\exists$-формулой называем формулу одного из следующих видов: $m+n=k$, $m \cdot n=k$, $m=n$, $k \in x$, $k \in c$. Далее, $\sim\&\exists$-формулой называем формулу, полученную из элементарных с помощью $\sim$, $\&$ и кванторов $\exists k$, $\exists x$. Вид логических знаков ограничен по техническим соображениям.

Для каждой $\sim\&\exists$-формулы φ определяется ее сложность *сл.* φ:

сл. $\varphi=0$, если φ — элементарная формула;

сл. $\varphi\&\psi=\max(\text{сл. } \varphi, \text{сл. } \psi)$;

сл. $\exists k\varphi(k) = $ *сл.* $\exists x\varphi(x) = $ *сл.* φ;

сл. $\sim\varphi = $ *сл.* $\varphi+1$.

Интерпретация $\sim\&\exists$-формул будет введена в 4.7.

4.3. Отношение forc. Перед его определением вводим такое определение: $T_m = \{(U, V) \in PS$: *найдется такое* $\beta \in \omega_2$, *что* $U[<m] = U^{\beta}[<m]$ и $V[<m] = V^{\beta}[<m]\}$. Ясно, что $T_{m+1} \subseteq T_m \subseteq T_0 = PS$.

Теперь определяем отношение $p\,\mathrm{forc}_{UV}\varphi$. В этой записи предполагается, что $(U, V)\in PS$, $p\in P(U)$, а $\sim\&\exists$-формула φ замкнута. Определение идет индукцией по длине формулы φ.

(i) *Пусть (замкнутая) формула* φ *имеет один из видов*: $m+n=k$, $m\cdot n=k$, $m=n$. *Тогда* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\varphi$, *если и только если* φ *истинна при обычном понимании сложения, умножения и равенства натуральных чисел.*

(ii) *Пусть* φ *есть формула* $k\in c$, *где* $k\in\omega$ *и* $c=(Q_l : l\in\omega)\in\mathrm{cod}$. *Тогда* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi$, *если и только если найдется такое* $q\in Q_k$, *что* $p\geqq q$.

(iii) $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi\&\psi$, *если и только если* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi$ *и* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\psi$.

(iv) $p\,\mathrm{forc}_{UV}\exists k\varphi(k)$, *если и только если найдется такое* $k\in\omega$, *что* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi(k)$.

(v) $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\exists x\varphi(x)$, *если и только если найдется такое* $c\in\mathrm{cod}$, *что* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi(c)$.

(vi) $p\,\mathrm{forc}_{UV}\sim\varphi$, *если и только если нет таких пар* $(U', V')\in T_{\text{сл.}\varphi}$, *продолжающих* (U, V), *и таких* $p'\in P(U')$, *что* $p'\geqq p$ *и* $p'\,\mathrm{forc}_{U'V'}\,\varphi$.

Определение forc закончено. Рекомендуем сравнить это определение с первоначальным определением вынуждения П. Коэном ([3]), стр. 218—219, в свете теоремы о представлении 2.7.1. Роль «параметрического пространства» играет у нас ω как совокупность констант для натуральных чисел, и cod как совокупность констант для множеств натуральных чисел.

Отметим следующие свойства forc:

1. *Если* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi$, *то* $(U, V)\in PS$, $p\in P(U)$ *и* $\sim\&\exists$*-формула* φ *замкнута* (по определению).

2. *Если* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi$, *пара* $(U', V')\in PS$ *продолжает* (U, V), $p'\in P(U')$ *и* $p'\geqq p$, *то* $p'\,\mathrm{forc}_{U'V'}\,\varphi$.

3. *Если* $(U, V)\in T_{\text{сл.}\varphi}$, *то* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi$ *и* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\sim\varphi$ *не могут выполняться одновременно.*

Утверждение 2 без труда проверяется индукцией по определению отношения forc, а 3 следует из определения (vi).

4.4. Определимость отношения forc. Ниже в 4.7 мы докажем, что отношение forc связано с истинностью в генерических расширениях примерно так же, как и обычное вынуждение. Доказательство этого факта будет существенно использовать специфику построения системы U^*, 3.9, и в особенности свойство 3.6 (ii). Для возможности применения этого свойства исследуем сложность отношения forc.

Пусть $\varphi(k_1, \ldots, k_m, x_1, \ldots, x_l)$ есть $\sim\&\exists$-формула и все ее свободные переменные выписаны. Определяем множество

$$\mathrm{Forc}_\varphi=\{(p, U, V, k_1, \ldots, k_m, c_1, \ldots, c_l) : (U, V)\in PS,\ p\in P(U),\ k_i\in\omega,\ c_i\in\mathrm{cod} \text{ и } p\,\mathrm{forc}_{UV}\,\varphi(k_1, \ldots, k_m, c_1, \ldots, c_l)\}.$$

ТЕОРЕМА. $\mathrm{Forc}_\varphi\in\Sigma^{(2)}_{\text{сл.}\varphi+2}$ (определение $\Sigma^{(2)}_n$ в 3.2).

Доказательство. Для элементарных формул φ теорема сразу получается из различных утверждений 3.2, при этом квантор «$\forall q\in Q_k$» в определении 4.3 (ii) является ограниченным и не повышает уровня определимости. Далее, проводим доказательство индукцией по длине формулы φ. Индуктивные шаги 4.3 (iii, iv, v) также не представляют труда, и рассматриваются с помощью 3.2.

Нетривиальным является лишь индуктивный шаг 4.3 (vi), который мы сейчас и разберем. Для простоты предположим, что $\sim\&\exists$-формула φ замкнута, т. е. не имеет свободных переменных. Тогда по определению будет:

$$\mathrm{Forc}_{\sim\varphi} = \{(p, U, V) : (U, V) \in PS,\ p \in P(U) \text{ и } \forall p', \forall U', \forall V' \ [(U', V') \in \\ \in T_{сл.\varphi} \,\&\, (U', V') \text{ продолжает } (U, V) \,\&\, p' \in P(U') \,\&\, p' \geqslant p \to \\ \to (p', U', V') \notin \mathrm{Forc}_\varphi]\}.$$

Если теперь предположить, что $\mathrm{Forc}_\varphi \in \Sigma^{(2)}_{сл.\varphi+2}$ (индуктивное предположение), то из 3.2 и $T_m \in \Sigma^{(2)}_{m+2}$ мы получим $\mathrm{Forc}_{\sim\varphi} \in \Pi^{(2)}_{сл.\varphi+2}$, т. е. $\mathrm{Forc}_{\sim\varphi} \in \in \Sigma^{(2)}_{сл.\sim\varphi+2}$, так как $сл. \sim\varphi = сл.\, \varphi + 1$.

Наконец, использованное в этом рассуждении утверждение $T_m \in \Sigma^{(2)}_{m+2}$ очевидно из свойства 3.6 (iii) последовательностей U^α и V^α, см. 3.9, а также из 3.2 и определения T_m. Индуктивный шаг сделан, теорема доказана.

4.5. Отношение forc с парами (U^α, V^α). Для краткости условимся писать $p \,\mathrm{forc}_\alpha\, \varphi$ вместо $p \,\mathrm{forc}_{U^\alpha V^\alpha}\, \varphi$, где U^α и V^α — члены последовательностей, фиксированных в 3.9. Докажем два утверждения об отношениях forc_α.

1. *Если p, $q \in P(U^*)$, $p \leqq q$, $\alpha \in \omega_2$ и $p \,\mathrm{forc}_\alpha\, \varphi$, то найдется такое $\lambda \in \omega_2$, что $q \,\mathrm{forc}_\lambda\, \varphi$.*

2. *Если p, $p_1 \in P(U^*)$ непротиворечивы, α, $\alpha_1 \in \omega_2$, то не могут одновременно выполняться $p \,\mathrm{forc}_\alpha \sim\varphi$ и $p_1 \,\mathrm{forc}_{\alpha_1}\, \varphi$.*

Доказательство 1. Из 3.9.1 и 3.9.3 следует существование такого $\lambda \in \omega_2$, $\lambda \geqslant \alpha$, что $q \in P(U^\lambda)$. Теперь применяем 4.3.2 с учетом 3.9.1.

Доказательство 2. Предположим противное: $p_1 \,\mathrm{forc}_{\alpha_1}\, \varphi$ и $p \,\mathrm{forc}_\alpha \sim\varphi$. Согласно 2.3.3, найдется такое $q \in P(U^*)$, что $q \geqq p$ и $q \geqq p_1$. Рассуждая аналогично доказательству 1, находим такое $\beta \in \omega_2$, что $q \,\mathrm{forc}_\beta\, \varphi$ и $q \,\mathrm{forc}_\beta \sim\varphi$. Это дает противоречие с 4.3.3, так как пара (U^β, V^β) очевидным образом принадлежит каждому множеству T_m.

4. 6. ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ. *Пусть $\sim\&\exists$-формула φ замкнута. Тогда множество $Q = \{p \in P(U^*)$: найдется такое $\alpha \in \omega_2$, что $p \,\mathrm{forc}_\alpha\, \varphi$ или $p \,\mathrm{forc}_\alpha \sim\varphi\}$ плотно в $P(U^*)$.*

Доказательство. Фиксируем $p \in P(U^*)$ и найдем такое $p' \in Q$, что $p' \geqq p$. Фиксируем также такое $\delta \in \omega_2$, что $p \in P(U^\delta)$ (существует в силу 3.9.3). Доказательство начинаем с определений: $m = сл.\, \varphi$ и $D = \{(U, V) \in PS_{\geqslant m}$: *найдется такая пара $(U', V') \in T_m$ и такое $p' \in P(U')$, что $U = U'[\geqslant m]$, $V = V'[\geqslant m]$, $p' \geqq p$ и $p' \,\mathrm{forc}_{U'V'}\, \varphi\}$* (определение $PS_{\geqslant m}$ и $U[\geqslant m]$ в 3.1). Из 3.2, теоремы 4.4 и утверждения $T_m \in \Sigma^{(2)}_{m+2}$ в доказательстве 4.4 получаем $D \in \Sigma^{(2)}_{m+2}$. Значит, по 3.6 (ii), найдется такое $\gamma \in \omega_2$, $\gamma \geqslant \delta$, что пара (U^γ, V^γ) будет m-запирать множество D. Это означает, что выполняется одно из следующих двух утверждений:

(а) *пара $(U^\gamma[\geqslant m], V^\gamma[\geqslant m])$ принадлежит множеству D;*

(б) *нет пар $(U, V) \in D$, продолжающих $(U^\gamma[\geqslant m], V^\gamma[\geqslant m])$.*

Пусть выполняется (а). По определению D, найдутся такие $(U', V')\in T_m$ и $p'\in P(U')$, что выполняются два следующих условия:

(1) $U'[\geqslant m]=U^\gamma[\geqslant m]$, $V'[\geqslant m]=V^\gamma[\geqslant m]$ и $p'\geqq p$;

(2) $p'\operatorname{forc}_{U'V'}\varphi$.

Заметим, далее, что $(U', V')\in T_m$ влечет по определению T_m существование такого $\beta\in\omega_2$, что выполняется:

(3) $U'[<m]=U^\beta[<m]$ и $V'[<m]=V^\beta[<m]$.

Определяем $\alpha=\max(\beta, \gamma)$ и из (1), (3) и 3.9.1 имеем: пара (U^α, V^α) принадлежит PS и продолжает пару (U', V'). Отсюда и из (2) и 4.3.2 следует $p'\operatorname{forc}_\alpha\varphi$, т. е. $p'\in Q$. Наконец, $p'\geqq p$ выполняется по выбору p', (1). Случай (а) рассмотрен.

Пусть теперь имеет место (б). Покажем, что тогда будет $p\operatorname{forc}_\gamma\sim\varphi$ (т. е. уже p принадлежит Q). Предположим противное. Заметим, что из выбора δ, 3.9.1 и $\gamma\geqslant\delta$ следует $p\in P(U^\gamma)$. Значит, предположение противного влечет, по определению 4.3 (vi), существование такой пары $(U', V')\in T_m$, продолжающей (U^γ, V^γ), и такого $p'\in P(U')$, что $p'\geqq p$ и $p'\operatorname{forc}_{U'V'}\varphi$. Теперь, обозначая $U=U'[\geqslant m]$ и $V=V'[\geqslant m]$, очевидно, имеем $(U, V)\in D$. Кроме того, пара (U, V) будет продолжать $(U^\gamma[\geqslant m], V^\gamma[\geqslant m])$, так как (U', V') продолжает пару (U^γ, V^γ). Но это противоречит предположению (б).

Противоречие завершает доказательство $p\operatorname{forc}_\gamma\sim\varphi$. Тем самым уже само p принадлежит множеству D в случае (б).

Оба случая рассмотрены, теорема доказана.

4.7. Согласованность истинности и forc. До сих пор рассуждения § 4 проходили в конструктивном универсуме (см. 4.1). В этом пункте рассуждения проходят в универсуме всех множеств.

Перед доказательством теоремы о связи истинности и forc, играющей центральную роль во всем аппарате forc, введем интерпретацию $\sim\&\exists$-формул. Если φ есть $\sim\&\exists$-формула и $G\subseteq P_0$ (например, G есть U^*-г. ф.), то определяем φ^G как результат замены в φ каждой константы $c\in\mathrm{cod}$ на c^G (определение c^G см. в 2.7). Формула φ^G будет аналитической формулой с параметрами из $L[G]$. Заметим, что φ^G совпадает с φ, если φ не имеет констант из cod.

ТЕОРЕМА. *Пусть $\sim\&\exists$-формула φ замкнута и G есть U^*-г. ф.. Тогда φ^G истинно в $L[G]$, если и только если найдутся такие $\alpha\in\omega_2^L$ и $p\in G$, что* $p\operatorname{forc}_\alpha\varphi$.

Доказательство проводим индукцией по длине φ. Тривиальное рассмотрение формул 4.3 (i) и индуктивных шагов 4.3 (iii, iv) оставляется читателю. Рассмотрим формулу φ вида 4.3(ii), т. е. φ есть формула $k\in c$, где $k\in\omega$ и $c=(Q_l: l\in\omega)\in\mathrm{cod}$.

Пусть φ^G истинно в $L[G]$. Это означает, что $k\in c^G$, т. е. $G\cap Q_k\neq 0$ по определению c^G (см. 2.7).

Введем множества $Q^+=\{p\in P(U^*)$: *найдется такое* $q\in Q_k$, *что* $p\geqq q\}$ *и* $Q^-=\{p\in P(U^*): p$ *противоречит каждому* $q\in Q_k\cap P(U^*)\}$. Нетрудно проверить, используя 2.3.3, что множество $Q=Q^+\cup Q^-$ плотно в $P(U^*)$.

Кроме того, Q конструктивно, так как c и, следовательно, Q_k,— конструктивны (см. 2.7).

Итак, $G \cap Q \neq 0$. Пусть $p \in G \cap Q$. Заметим, что не может быть $p \in Q^-$, так как $G \cap Q_k \neq 0$, а $G \subseteq P(U^*)$ — фильтр. Следовательно, имеет место $p \in Q^+$. Но по определению 4.3(ii) это и означает, что $p \operatorname{forc}_\alpha k \in c$, где $\alpha \in \omega_2^L$ таково, что $p \in P(U^\alpha)$ (такое α существует в силу 3.9.3 и $p \in P(U^*)$).

Обратно, пусть $p \in G$, $\alpha \in \omega_2^L$ и $p \operatorname{forc}_\alpha k \in c$. Это означает по определению 4.3(ii), что $p \geqq q$ для некоторого $q \in Q_k$. Заметим, что из $p \geqq q$, $q \in P_0$ и $p \in P(U^*)$ вытекает $q \in P(U^*)$. Значит, поскольку G — фильтр и $p \in G$, имеет место $q \in G$. Таким образом, $G \cap Q_k \neq 0$, т. е. $k \in c^G$ по определению 2.7.

Случай формул φ вида 4.3(ii) рассмотрен.

Сделаем теперь индуктивный шаг 4.3(v), т. е. рассмотрим такую $\sim \& \exists$-формулу $\varphi(x)$, что теорема уже доказана для $\varphi(c)$ при любом $c \in \mathrm{cod}$, и докажем теорему для формулы $\exists x \varphi(x)$.

Пусть $(\exists x \varphi(x))^G$ истинно в $L[G]$. По теореме 2.7.1 найдется такое $c \in \mathrm{cod}$, что $\varphi(c)^G$ истинно в $L[G]$. Индуктивное предположение влечет существование таких $p \in G$ и $\alpha \in \omega_2^L$, что $p \operatorname{forc}_\alpha \varphi(c)$. Тем самым $p \operatorname{forc}_\alpha \exists x \varphi(x)$ по определению 4.3(v).

Обратно, пусть $p \in G$, $\alpha \in \omega_2^L$ и $p \operatorname{forc}_\alpha \exists x \varphi(x)$. Это означает, что $p \operatorname{forc}_\alpha \varphi(c)$ для некоторого $c \in \mathrm{cod}$. По индуктивному предположению, $\varphi(c)^G$ истинно в $L[G]$ и т. д.

Сделаем, наконец, индуктивный шаг 4.3(vi). Предположим, что теорема доказана для формулы φ, и докажем ее для $\sim \varphi$.

Предположим, что $(\sim \varphi)^G$ истинно в $L[G]$. Это означает, что φ^G ложно в $L[G]$ и тем самым, по индуктивному предположению, нет таких $p \in G$ и $\alpha \in \omega_2^L$, что $p \operatorname{forc}_\alpha \varphi$. Следовательно, по теореме 4.6 и в силу генеричности G, найдется такое $p \in G$, что $p \operatorname{forc}_\alpha \sim \varphi$ для некоторого $\alpha \in \omega_2^L$, что и требовалось. (Замечание: множество Q из условия теоремы 4.6 конструктивно, так как все рассуждения в 4.2—4.6 проходили в L.)

Обратно, пусть $p \in G$, $\alpha \in \omega_2^L$ и $p \operatorname{forc}_\alpha \sim \varphi$. Предположим противное: $(\sim \varphi)^G$ ложно в $L[G]$, т. е. φ^G истинно в $L[G]$. По индуктивному предположению, найдутся такие $p_1 \in G$ и $\alpha_1 \in \omega_2^L$, что $p_1 \operatorname{forc}_{\alpha_1} \varphi$. Но G — фильтр, т. е. p и p_1 непротиворечивы. Это дает противоречие с 4.5.2. Индуктивный шаг сделан, теорема доказана.

4.8. Принцип ограничения. В этом пункте вновь рассуждаем в L. Сразу же отметим такое следствие теоремы 4.7:

Следствие 1. *Если $p \in P(U^*)$, $\alpha \in \omega_2$ и замкнутая $\sim \& \exists$-формула φ не содержит констант из* cod *и удовлетворяет $p \operatorname{forc}_\alpha \varphi$, то $p \Vdash^* $ «φ истинно (в $L[\mathbf{G}]$)».*

Несколько замечаний к формулировке этого следствия. Через $\Vdash^*$ обозначено отношение $\Vdash_{U^*}$, а U^* — система из 3.9. Далее, непосредственно получая это следствие из теоремы 4.7, мы должны были бы записать $p \Vdash^*$ «$\varphi^{\mathbf{G}}$ *истинно в* $L[\mathbf{G}]$». Но так как следствие ограничивается лишь формулами, не имеющими констант из cod, то верхний индекс $\mathbf{G}$

можно опустить, поскольку для всякой такой формулы φ и всякого $G \subseteq P_\omega$ формула φ^G совпадает с φ.

Отметим также, что каждая замкнутая $\sim\&\exists$-формула, не содержащая констант из cod, будет (замкнутой) аналитической формулой, не имеющей параметров из R, и, следовательно, можно говорить о ее истинности или ложности (в $L[G]$).

Теперь формулируется следующий «принцип ограничения»:

$(*)$. *Пусть* $\sim\&\exists$*-формула* φ *замкнута и не содержит констант из* cod. *Пусть также* $m \in \omega$, *сл.* $\varphi \leqslant m$, $(U, V) \in PS$, $p \in P(U)$ *и* $p\,\mathrm{forc}_{UV} \sim \varphi$. *Тогда* $p \restriction m\,\mathrm{forc}_{UV} \sim \varphi$ (определение $p \restriction m$ в 2.3).

Этот принцип будет доказан ниже. А здесь с его помощью докажем теорему, непосредственно ведущую к доказательству 4.1 (i).

ТЕОРЕМА 2. *Если* $p \in P(U^*)$ *и* $\sim\&\exists$*-формула* $\psi(k)$ *с единственной свободной переменной* k *не содержит констант из* cod, *то* $p \| \!-^*$ *«множество* $\{k \in \omega : \psi(k)$ *истинно (в* $L[\mathbf{G}]$*)*$\}$ *конструктивно».*

Доказательство. Определяем $Q_k = \{p \in P(U^*)$: *найдется такое* $\alpha \in \omega_2$, *что либо* $p \| \!-^* \psi(\mathbf{k})$, *либо* $p \| \!-^* \sim \psi(\mathbf{k})\}$, и $Q = \bigcap\limits_{k \in \omega} Q_k$. Таким образом, Q состоит из всех $p \in P(U^*)$, «решающих» каждую формулу $\psi(\mathbf{k})$, $k \in \omega$.

Из определения Q следует такое утверждение:

(1) *если* $q \in Q$, *то* $q \| \!-^*$ *«множество* $\{k \in \omega : \psi(k)\}$ *конструктивно».*

Действительно, определим $r = \{k \in \omega : q \| \!-^* \psi(\mathbf{k})\}$. Тогда, с одной стороны, r конструктивно, так как вынуждение выразимо в «исходной модели» L [(5), 1.1.9]. А с другой стороны, из $q \in Q$ следует, что $q \| \!-^*$«$\{k \in \omega : \psi(k)\} = \mathbf{r}$».

Благодаря утверждению (1), для доказательства теоремы достаточно доказать такую лемму:

ЛЕММА. *Если* $p \in P(U^*)$, *то найдется такое* $q \in Q$, *что* $q \geqq p$.

Доказательство леммы. Поскольку множество $|p|$ конечно по 2.2 (i), то найдется такое $m \in \omega$, что *сл.* $\psi(k) < m$ и $|p| \subseteq m$. Проверим следующее вспомогательное утверждение:

(2) *если* $k \in \omega$, $p' \in P(U^*)$ *и* $|p'| \subseteq m$, *то найдется такое* $p'' \in Q_k$, *что* $p'' \geqq p'$ *и* $|p''| \subseteq m$.

В самом деле, по теореме 4.6 найдутся такие $\alpha \in \omega_2$ и $t \in P(U^*)$, что $t \geqslant p'$, и либо $t\,\mathrm{forc}_\alpha \sim \psi(k)$, либо $t\,\mathrm{forc}_\alpha \sim\, \sim \psi(k)$. Покажем, что $p'' = t \restriction m$ будет искомым. Действительно, $p'' \in P(U^*)$ следует из $t \in P(U^*)$, $|p''| \subseteq m$ очевидно из построения, а $p'' \geqq p'$ без труда получается из $t \geqq p'$ и $|p'| \subseteq m$.

С другой стороны, по выбору m мы получим *сл.* $\psi(k) \leqslant m$ и *сл.* $\sim\, \sim \psi(k) \leqslant m$. Значит, применим принцип ограничения $(*)$, который дает: либо $p''\,\mathrm{forc}_\alpha \sim \psi(k)$, либо $p''\,\mathrm{forc}_\alpha \sim\, \sim \psi(k)$. Следствие 1 позволяет перейти к $|\!\!\vdash^*$: либо $p'' |\!\!\vdash^* \sim \psi(\mathbf{k})$, либо $p'' |\!\!\vdash^* \sim\, \sim \psi(\mathbf{k})$. Но последнее утверждение очевидным образом влечет $p'' |\!\!\vdash^* \psi(\mathbf{k})$. Таким образом, $p'' \in Q_k$, что и требовалось. Утверждение (2) доказано.

Продолжаем доказательство леммы. Доказанное утверждение (2) позволяет индукцией по k построить последовательность $(p_k : k \in \omega)$, удовлетворяющую таким трем условиям:

(i) $p_0=p$ *и* $p_{k+1}\in Q_k$ *для всех* $k\in\omega$;

(ii) $|p_k|\subseteq m$ *для всех* $k\in\omega$;

(iii) $p_k\leqq p_{k+1}$ *для всех* $k\in\omega$.

Покажем, что эта последовательность мажорируется некоторым $q\in\in P(U^*)$, которое и будет искомым. Введем следующие обозначения:

$$e_k = p_k(0), \quad (s^k_{ni}, X^k_{ni}) = p_k(n, i).$$

Далее, определяем

$$e = \bigcup_{k\in\omega} e_k, \quad s_{ni} = \bigcup_{k\in\omega} s^k_{ni} \text{ и } X_{ni} = \bigcup_{k\in\omega} X^k_{ni}.$$

Наконец, вводим функцию q, определенную на множестве $\{0\}\bigcup(\omega\times\omega)$ условиями $q(0)=e$ и $q(n, i)=(s_{ni}, X_{ni})$ для всех $n, i\in\omega$.

Первым делом докажем, что $q\in P(U^*)$. Поскольку все построения этого пункта проходят в L, то q автоматически конструктивно. Теперь нужно проверять условия 2.2(i—vii) для q. Начнем с 2.2(i).

Из (iii) следует, что $(e_k : k\in\omega)$ будет возрастающей (нестрого) последовательностью конечных функций, $e_k\subseteq\omega\times(R\bigcap L)$ $\forall k$. Но согласно (ii) будет $\operatorname{dom}(e_k)\subseteq m$ $\forall k$. Значит, $(e_k : k\in\omega)$ *стабилизируется* и $e=e_k$ для некоторого k. Тем самым требование 2.2(i) для q выполнено.

После этого проверка 2.2(ii—vii) для q без особых трудностей осуществляется с учетом (iii) и принадлежности к $P(U^*)$ каждого p_k. Подробности оставляются читателю.

Итак, $q\in P(U^*)$. Кроме того, из построения очевидно, что $q\geqq p_k$ $\forall k$, и тем самым $q\geqq p=p_0$. Наконец, из (i) следует $q\in Q_k$ $\forall k$, т. е. $q\in Q$. Итак, q — искомое, лемма доказана. Доказательство теоремы закончено.

4.9. Конструктивность аналитически определимых множеств. Рассуждения этого пункта проходят *в универсуме всех множеств*. Мы уже имеем достаточно информации для доказательства утверждения 4.1(i)

ТЕОРЕМА. *Если G есть U^*-г. ф. и $a\in L[G]\bigcap R$ аналитически определимо в $L[G]$, то a конструктивно.*

Доказательство. Пусть $\varphi(k)$ — аналитическая формула без параметров, определяющая a в $L[G]$: $a=\{k\in\omega$: *в* $L[G]$ *истинно* $\varphi(k)\}$. Выразив в $\varphi(k)$ знаки $\vee$, $\rightarrow$, $\equiv$ и $\forall$ через $\sim$, &, $\exists$, мы получим $\sim$&$\exists$-формулу $\psi(k)$ *без констант из* cod, так же удовлетворяющую $a=\{k\in\omega$: *в* $L[G]$ *истинно* $\psi(k)\}$. Применение в этой ситуации теоремы 4.8.2 с учетом известных ([5]), 1.1.9, соотношений между вынуждением и истинностью в генерических расширениях, завершает доказательство.

Таким образом, желаемый результат 4.1(i) доказан нами в предположении, что выполняется принцип (*) из 4.8.

§ 5. Доказательство принципа 4.8(*)

Доказательство этого принципа основано на идее, использованной в доказательстве леммы на стр. 261 в ([3]). Сперва в 5.1—5.3 мы вводим и изучаем особые преобразования множеств, входящих в аппарат forc, а затем в 5.4—5.6 доказываем принцип 4.8(*).

Все рассуждения § 5 проходят *в конструктивном универсуме.*

5.1. Преобразования. Фиксируем $m \in \omega$. Через Γ_m обозначаем совокупность всех таких биекций π множества ω на себя, что $\pi(j)=j$ для каждого $j<m$. Каждой паре $\pi \in \Gamma_m$, $b \subseteq \omega_1$ мы сопоставим преобразование $[\pi b]$, действующее на множества нескольких видов.

Итак, пусть $\pi \in \Gamma_m$ и $b \subseteq \omega_1$; определяем действие $[\pi b]$.

Если $h \in \mathrm{Seq}$ и $\alpha = \mathrm{dom}(h)$ $(\in \omega_1)$, то через bh обозначаем функцию h', определенную на α условиями: $h'(\gamma)=h(\gamma)$ *при* $\gamma \in \alpha - b$ и $h'(\gamma)=1-h(\gamma)$ *при* $\gamma \in \alpha \cap b$. Ясно, что $bh \in \mathrm{Seq}$ и $\alpha = \mathrm{dom}(bh)$.

Аналогично, если $f \in \mathrm{Fun}$, то через bf обозначаем функцию $f' \in \mathrm{Fun}$, определенную так: $f'(\gamma)=f(\gamma)$ *при* $\gamma \in \omega_1 - b$ и $f'(\gamma)=1-f(\gamma)$ *при* $\nu \in b$.

Если $s \subseteq \mathrm{Seq}$ и $u \subseteq \mathrm{Fun}$, то полагаем $bs = \{bh\colon h \in s\}$ и $bu = \{bf\colon f \in u\}$.

Пусть теперь U является системой. Через $[\pi b]\,U$ обозначаем систему U', определенную условиями: $U'_{ni} = U_{ni}$ при $n<m$ и $U'_{\pi(n)i} = bU_{ni}$ при $n \geqslant m$ (напомним, что $U_{ni} \subseteq \mathrm{Fun}$, 2.1). Благодаря $\pi \in \Gamma_m$, эти два условия не дают противоречия и определяют U'_{ki} при любом $k \in \omega$.

Если $X \subseteq \omega_1 \times \mathrm{Fun}$, то полагаем $bX = \{(\gamma, bf) : (\gamma, f) \in X\}$.

Пусть $p \in P_0$. Через $[\pi b]p$ обозначаем (единственное) $q \in P_0$, удовлетворяющее таким трем условиям:

1) *если* $e=p(0)$, *то* $q(0)$ *есть функция* e', *определенная на множестве* $\pi''|p|$ *условием* $e'(\pi(j))=e(j)$ $\forall j \in |p|$ (напомним, что $|p| = \mathrm{dom}(p(0)) = \mathrm{dom}(e)$, 2.2);

2) *если* $n \geqslant m$ *и* $p(n,i)=(s,X)$, *то* $q(\pi(n),i)=(bs,bX)$;

3) *если* $n<m$, *то* $q(n,i)=p(n,i)$.

Из $\pi \in \Gamma_m$ следует, что эти три условия вводят единственную функцию q, определенную на множестве $\{0\} \cup (\omega \times \omega)$. Мы предлагаем читателю убедиться в том, что эта функция q действительно принадлежит P_0.

Далее, если $c = (Q_k\colon k \in \omega) \in \mathrm{cod}$, то полагаем $[\pi b]c = (Q_k'\colon k \in \omega)$, где $Q_k' = \{[\pi b]p : p \in Q_k\}$ $\forall k \in \omega$.

Наконец, если φ есть $\sim\&\exists$-формула, то через $[\pi b]\varphi$ обозначаем результат замены в φ всех констант $c \in \mathrm{cod}$ на $[\pi b]c$.

Определение преобразования $[\pi b]$ закончено. Отметим, что это определение очевидно зависит не только от π, b, но и от m. Мы не указываем эту зависимость от m явно для уменьшения громоздкости. Ниже из контекста всякий раз будет ясно, какое m участвует в определении.

5.2. Свойства преобразований $[\pi b]$. Натуральное число m из 5.1 остается фиксированным. Фиксируем также $\pi \in \Gamma_m$ и $b \subseteq \omega_1$. Несложная, хотя местами и довольно громоздкая проверка следующих девяти утверждений, предоставляется читателю.

1. *Если* $p \in P_0$, *то* $[\pi b]p \in P_0$ (мы уже отметили это в 5.1).
2. *Если* U — *система, то* $[\pi b]U$ — *также система.*
3. *Если* $(U, V) \in PS$, *то* $([\pi b]U, [\pi b]V) \in PS$.
4. *Если* $c \in \mathrm{cod}$, *то* $[\pi b]c \in \mathrm{cod}$.
5. *Если* $p \in P(U)$, *то* $[\pi b]p \in P([\pi b]U)$.
6. *Если* $p \in P_0$ *и* U — *система, то* $([\pi b]p) \upharpoonright m = p \upharpoonright m$ *и* $U[<m] = ([\pi b]U)[<m] = [\pi b](U[<m])$.

7. (следствие 6 и 3). *Если* $(U, V)\in T_k$, $k\leqslant m$, *то* $([\pi b]U, [\pi b]V)\in T_k$.

8. *Если* $p\leqq q$, *то* $[\pi b]p\leqq[\pi b]q$; *если система* V *продолжает систему* U, *то* $[\pi b]V$ *будет продолжать систему* $[\pi b]U$.

9. *Действие* $[\pi b]$ *обратимо в следующем смысле: если, например,* $p\in\in P_0$, *то* $[\pi^{-1}b]([\pi b]p)=[\pi b]([\pi^{-1}b]p)=p$; *аналогичная обратимость имеет место при действии на системы, коды (элементы множества* cod) *и* $\sim\&\exists$*-формулы.*

5.3. Инвариантность forc. Фиксируем в этом пункте $m\in\omega$. В формулировке и доказательстве следующей теоремы действие всех преобразований $[\pi b]$ осуществляется в смысле этого m.

ТЕОРЕМА. *Если* $(U, V)\in PS$, $p\in P(U)$, $\pi\in\Gamma_m$, $b\subseteq\omega_1$, $\sim\&\exists$*-формула* φ *замкнута и удовлетворяет сл.* $\varphi\leqslant m+1$ *и, наконец, если* $p\,\mathrm{forc}_{UV}\varphi$, *то выполняется* $[\pi b]p\ \mathrm{forc}_{[\pi b]U[\pi b]V}[\pi b]\varphi$.

Доказательство проводим индукцией по числу логических знаков $(\sim, \&, \exists)$ в φ сразу для всех множеств U, V, p, π, b указанного вида. Достаточно доказать следующие шесть утверждений:

1. *Теорема верна для каждой формулы* φ *вида* 4.3(i).

2. *Теорема верна для каждой формулы* φ *вида* 4.3(ii).

3. *Теорема верна для формулы* $\varphi_1\&\varphi_2$ *в предположении, что она верна для каждой из формул* φ_1 *и* φ_2.

4. *Теорема верна для формулы* $\exists k\varphi(k)$ (k — *переменная типа* 0) *в предположении, что она верна для формулы* $\varphi(k)$ *при любом* $k\in\omega$.

5. *Теорема верна для формулы* $\exists x\varphi(x)$ (x — *переменная типа* 1) *в предположении, что она верна для формулы* $\varphi(c)$ *при любом* $c\in\mathrm{cod}$.

6. *Теорема верна для формулы* $\sim\varphi$ *в предположении, что она верна для формулы* $[\pi b]\varphi$ (*и, естественно, в предположении, что выполняется сл.* $\sim\varphi\leqslant m+1$).

Утверждения 1 и 2 представляют первый шаг индукции, а утверждения 3—6 — индуктивный шаг. Перед доказательством этих утверждений обозначим $U'=[\pi b]U$, $V'=[\pi b]V$ и $p'=[\pi b]p$.

Утверждение 1 очевидно из определения 4.3(i), так как условия $(U', V')\in PS$ и $p'\in P(U')$ имеют место благодаря 5.2.3 и 5.2.5.

Доказательство 2. Итак, пусть φ есть $k\in c$, где $k\in\omega$ и $c= =(Q_l\colon l\in\omega)\in\mathrm{cod}$. По определению 4.3(ii), $p\,\mathrm{forc}_{UV}\varphi$ означает, что найдется $q\in Q_k$, удовлетворяющее

(1) $p\geqq q$.

Из утверждений $p\in P(U)$ и (1) с помощью 5.2.5 и 5.2.8 имеем:

(2) *множество* $p'=[\pi b]p$ *принадлежит* $P(U')$ *и удовлетворяет* $p'\geqq q'$, *где* $q'=[\pi b]q$.

Но согласно определению $[\pi b]\,c$ и определению 4.3(ii) утверждение (2) влечет $p'\,\mathrm{forc}_{U',V'}k\in[\pi b]\,c$, т. е. $p'\,\mathrm{forc}_{U',V'}[\pi b]\,\varphi$, что и требовалось. Доказательство 2 закончено.

Тривиальные доказательства 3 и 4 оставляются читателю.

Доказательство 5. По определению 4.3(v), $p\,\mathrm{forc}_{UV}\exists x\varphi(x)$ влечет $p\,\mathrm{forc}_{UV}\varphi(c)$ для некоторого $c\in\mathrm{cod}$. Но теорема верна для $\varphi(c)$ по предположению. Значит, выполняется $p'\mathrm{forc}_{U'V'}\varphi'(c')$, где $\varphi'(x)$ есть формула $[\pi b]\varphi(x)$, а $c'=[\pi b]c$ ($\in$cod по 5.2.4). Следовательно, по 4.3(v), мы имеем $p'\operatorname{forc}_{U'V'}\exists x\varphi'(x)$, т. е. $p'\operatorname{forc}_{U'V'}[\pi b]\exists x\varphi(x)$, что и требовалось.

Доказательство 6. Через φ' обозначаем формулу $[\pi b]\varphi$. Ясно, что $[\pi b]\sim\varphi$ есть $\sim\varphi'$. Определяем $k=\text{сл.}\,\varphi'$; тогда $k\leqslant m$, так как $\text{сл.}\,\varphi'=\text{сл.}\,\varphi$, а $\text{сл.}\sim\varphi\leqslant m+1$ по формулировке 6.

Предположим противное: теорема не верна для $\sim\varphi$, т. е. выполняются следующие два утверждения:

(3) $p\operatorname{forc}_{UV}\sim\varphi$,

(4) *не верно, что* $p'\operatorname{forc}_{U'V'}\sim\varphi'$.

Поскольку $(U', V')\in PS$ и $p'\in P(U')$ следуют из условия теоремы и 5.2.3, 5.2.6, то по определению 4.3(vi) утверждение (4) дает существование такой пары $(\mathbf{U}', \mathbf{V}')\in T_k$, продолжающей пару (U', V'), и такого $\mathbf{p}'\in P(\mathbf{U}')$, $\mathbf{p}'\geqq p'$, что выполняется:

(5) $\mathbf{p}'\operatorname{forc}_{\mathbf{U}',\mathbf{V}'}\varphi'$.

Но по формулировке доказываемого утверждения 6 теорема верна для формулы $\varphi'=[\pi b]\varphi$. Значит, на (5) можно подействовать преобразованием $[\pi^{-1}b]$ и получить:

(6) $\mathbf{p}\operatorname{forc}_{\mathbf{UV}}\varphi$, *где* $\mathbf{p}=[\pi^{-1}b]\mathbf{p}'$, $\mathbf{U}=[\pi^{-1}b]\mathbf{U}'$ *и* $\mathbf{V}=[\pi^{-1}b]\mathbf{V}'$ (совпадение формул φ и $[\pi^{-1}b]\varphi$ следует из 5.2.9).

С другой стороны, из выбора $\mathbf{U}'$, $\mathbf{V}'$, $\mathbf{p}'$, определения U', V', p' (в начале доказательства теоремы) и различных утверждений 5.2, применяемых к преобразованию $[\pi^{-1}b]$, нетрудно получить:

(7) $(\mathbf{U}, \mathbf{V})\in T_k$, $(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ *продолжает* (U, V), $\mathbf{p}\in P(\mathbf{U})$ *и* $\mathbf{p}\geqq p$.

Теперь утверждения (3), (6) и (7) ведут к противоречию в соответствии с определением 4.3(vi). Полученное противоречие опровергает предположение противного (конъюнкцию (3) и (4)). Утверждение 6 и теорема доказаны.

5.4. Начало доказательства принципа 4.8(*). Предположение противного. После предварительных рассуждений 5.1—5.3 приступаем к доказательству 4.8(*). До конца § 5 фиксируем замкнутую $\sim\&\exists$-формулу φ, не содержащую констант из множества cod. Фиксируем также, в соответствии с формулировкой 4.8(*), такие m, k, p, U и V, что выполняется следующее утверждение:

1. $m\in\omega$, $k=\text{сл.}\,\varphi\leqslant m$, $(U, V)\in PS$, $p\in P(U)$ *и* $p\operatorname{forc}_{UV}\sim\varphi$.

Докажем, что $p\restriction m\operatorname{forc}_{UV}\sim\varphi$. Предположим противное. Поскольку $p\restriction m\in P(U)$ легко следует из $p\in P(U)$, то по определению 4.3(vi) предположение противного влечет существование множеств $\tilde{p}$, $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, удовлетворяющих таким двум условиям:

2. $(\tilde{U}, \tilde{V})\in T_k$, $(\tilde{U}, \tilde{V})$ *продолжает* (U, V) *и* $\tilde{p}\in P(\tilde{U})$.

3. $\tilde{p}\geqq p\restriction m$ *и* $\tilde{p}\operatorname{forc}_{\tilde{U}\tilde{V}}\varphi$.

Ниже в 5.6 мы собираемся получить противоречие, которое опровергнет сделанное предположение противного.

5.5. Построение U', V', p'. Эти множества, играющие важную роль в получении противоречия, будут построены действием на $\tilde{U}$, $\tilde{V}$ и $\tilde{p}$ подходящего преобразования $[\pi b]$. Укажем выбор π и b.

Выбор π. По определению 2.2(i) множества $|p|$ и $|\tilde{p}|$ будут конечными множествами натуральных чисел. Значит, найдется такое $N\in\omega$, что $|p|\cup|\tilde{p}|\subseteq N$. Теперь нетрудно выбрать $\pi\in\Gamma_m$, удовлетворяющее такому требованию: $\forall j[m\leqslant j<N\to\pi(j)\geqslant N]$. Фиксируем это $\pi\in\Gamma_m$.

Выбор b. Полагаем $F=\bigcup\limits_{n,i\in\omega}(\tilde{U}_{ni}\cup\tilde{V}_{ni})$. Поскольку $(\tilde{U},\tilde{V})\in PS$, то $F\subseteq\mathrm{Fun}$ будет множеством мощности $\leqslant\omega_1$. Пусть $((f_\alpha, g_\alpha):\alpha\in\omega_1)$ — какая-то нумерация множества $F\times F$. Определяем $b=\{\alpha\in\omega_1: f_\alpha(\alpha)=$ $=g_\alpha(\alpha)\}$.

Из выбора b и определения 5.1 немедленно вытекает:

(a) *если* $f\in F$, *то* $bf\notin F$ (определение bf см. в 5.1).

Итак, выбраны $\pi\in\Gamma_m$ и $b\subseteq\omega_1$. Теперь определяем $p'=[\pi b]\tilde{p}$, $U'=$ $=[\pi b]\tilde{U}$ и $V'=[\pi b]\tilde{V}$ (действие $[\pi b]$ осуществляется в смысле фиксированного в начале 5.4 натурального числа m). Доказываются следующие свойства множеств p', U', V':

1. $(U', V')\in T_k$, $p'\in P(U')$, $p'\restriction m=\tilde{p}\restriction m$.
2. $U'[<m]=\tilde{U}[<m]$ *и* $V'[<m]=\tilde{V}[<m]$.
3. $|p|\cap|p'|\subseteq m$.
4. $p'\ \mathrm{forc}_{U'V'}\varphi$.
5. *Если* $n\geqslant m$ *и* $i\in\omega$, *то* $U_{ni}\cap V'_{ni}=U'_{ni}\cap V_{ni}=0$.

Утверждение 1 следует из 5.4.2 и 5.2.7, 5.2.5, 5.2.6.

Утверждение 2 следует из 5.2.6.

Для доказательства 3 отметим, что по выбору N выполняется $|p|\subseteq N$. С другой стороны, нетрудно проверить, что $|p|=\pi''|\tilde{p}|$, и тем самым по выбору N и π будет: если $j\in|p'|$, то либо $j<m$, либо $j\geqslant N$. Теперь 3 очевидно.

Далее, утверждение 4 следует из 5.4.3 и теоремы 5.3; совпадение формул φ и $[\pi b]\varphi$ имеет место в силу отсутствия в формуле φ констант из cod.

Осталось проверить 5. Пусть $n\geqslant m$, $i\in\omega$. Докажем, например, что $U_{ni}\cap V'_{ni}=0$ (второе равенство доказывается аналогично). Пусть, напротив, $g\in U_{ni}\cap V'_{ni}$. Поскольку система $\tilde{U}$ продолжает U по 5.4.2, то мы получим $g\in\tilde{U}_{ni}$ и тем самым $g\in F$.

С другой стороны, из $\pi\in\Gamma_m$, $n\geqslant m$, $g\in V'_{ni}$ и определения $V'=[\pi b]\tilde{V}$ следует существование таких $n'\geqslant m$ (именно, $n'=\pi^{-1}(n)$) и $f\in\tilde{V}_{n'i}$, что $g=bf$. Снова $f\in F$ по определению F.

Итак, f, $g\in F$ и $g=bf$. Но это противоречит (a). Утверждение 5 доказано.

5.6. Завершение доказательства 4.8(∗). Итак, построены множества U', V' и p', удовлетворяющие требованиям 1—5 из 5.5. Используем эти множества для получения противоречия, которое опровергнет предположение противного из 5.4 и тем самым завершит доказательство принципа 4.8(∗).

Положим $p''=p\vee p'$ (определение действия $\vee$ см. в 2.3) и введем системы U'' и V'' условиями $U''_{ni}=U_{ni}\cup U'_{ni}$ и $V''_{ni}=V_{ni}\cup V'_{ni}$.

Доказываются следующие вспомогательные утверждения.

1. *Если* $n<m$ *и* $i\in\omega$, *то* $U_{ni}\subseteq U'_{ni}$ *и* $U_{ni}\subseteq V'_{ni}$.
2. *Если* n, $i\in\omega$, *то* $U_{ni}\cap V'_{ni}=U'_{ni}\cap V_{ni}=0$.

3. *Пара* (U'', V'') *принадлежит* PS *и продолжает пары* (U, V) *и* (U', V').

4. $U''[<k]=U'[<k]$ *и* $V''[<k]=V'[<k]$ (k введено в 5.4).

5. *Пара* (U'', V'') *принадлежит* T_k.

6. $p''\in P_0$, $p''\geqq p$, $p''\geqq p'$.

7. $p''\in P(U'')$.

Утверждние 1 следует из 5.4.2, 5.5.2.

Утверждение 2 при $n\geqslant m$ сразу получается из 5.5.5. Если же $n<m$, то 2 непосредственно следует из 1 и равенства $U'_{ni}\cap V'_{ni}=0$, вытекающего из $(U', V')\in PS$ (а последнее справедливо благодаря 5.5.1, так как $T_k\subseteq PS$).

Далее, $(U'', V'')\in PS$ следует из утверждения 2 и того обстоятельства, что пары (U, V) и (U', V') принадлежат PS (для пары (U, V) это отмечено в 5.4.1). Оставшаяся часть утверждения 3 очевидна.

Для доказательства 4 достаточно применить 1 с учетом $k\leqslant m$ и определения U'' и V''. Теперь из 4, определения T_k и утверждения $(U', V')\in T_k$ (см. 5.5.1) получаем доказательство 5.

Для доказательства утверждения 6 отметим, что из 5.5.1 и 5.4.3 следует $p'\restriction m\geqq p\restriction m$. Теперь 6 следует из 2.3.5, 2.3.2 и 5.5.3.

Наконец, напомним, что $p\in P(U)$ и $p'\in P(U')$ (см. 5.4.1 и 5.5.1). Отсюда и из определения системы U'' и множества $p''=p\vee p'$, в соответствии с уже доказанным $p''\in P_0$, имеем $p''\in P(U'')$. Утверждения 1—7 доказаны.

Теперь получаем противоречие. Из утверждений 3, 6, 7, и 5.4.1, 4.3.2 следует $p''\,\mathrm{forc}_{U''V''}\sim\varphi$. Аналогично, используя 5.5.4 вместо 5.4.1, имеем $p''\,\mathrm{forc}_{U''V''}\varphi$. Но два последних утверждения противоречат друг другу согласно 4.3.3, так как $(U'', V'')\in T_k$ отмечено в утверждении 5, а $k=сл.$ φ выполняется по 5.4.1.

Полученное противоречие опровергает предположение противного в 5.4 и завершает доказательство принципа 4.8(*). Тем самым полностью доказаны теорема 4.9 и утверждение (i) из третей формулировки ОТ в 4.1.

§ 6. Аналитическая определимость в $L[G]$ всех конструктивных множеств натуральных чисел

В этом параграфе мы собираемся доказать утверждение (ii) из третей формулировки ОТ. Тем самым основная теорема будет полностью доказана. Начнем с определения формул, которые обеспечат определимость в $L[G]$ каждого конструктивного $r\subseteq\omega$.

6.1. Формулы Φ_n. Для каждого $n\in\omega$ вводится следующая формула $\Phi_n(S, i)$ с переменными S и i и конструктивными параметрами U^*, V^* и n: $\Phi_n(S, i)\Leftrightarrow S\subseteq\mathrm{Seq}\,\&\,i\in\omega\,\&\,(\forall f\in U^*_{ni})$[$S$ *не покрывает* f]$\&(\forall f\in V^*_{ni})$ [S *покрывает* f].

Поясним использование формул Φ_n для определимости. Пусть G есть U^*-г.ф.. Теорема 2.6 и утверждение $U^*_{ni}\cap V^*_{ni}=0$ из 3.9.2 влекут

Следствие. *Если* $n \in \omega$ *и* $i \in g^G(n)$, *то формула* $\Phi_n(S^G_{ni}, i)$ *истинна в* $L[G]$. *Тем самым, в силу* $S^G_{ni} \in L[G]$, *в* $L[G]$ *истинна и формула* $\exists S \Phi_n(S, i)$.

(Специфика построения U^* не влияет на справедливость следствия.)

Мы докажем, уже с использованием специфики U^*, что если $i \notin g^G(n)$, то $\exists S \Phi_n(S, i)$ ложна в $L[G]$ (теорема 6.3). Таким образом, множество $r = g^G(n)$ окажется определимым в $L[G]$ формулой $\exists S \Phi_n(S, i)$. При этом утверждение 2.5.1 гарантирует возможность определить каждое конструктивное $r \subseteq \omega$ формулой такого вида. Наконец, с помощью 3.9.5 будет доказано, что каждая формула $\exists S \Phi_n(S, i)$ эквивалентна в $L[G]$ подходящей аналитической формуле (даже входящей в Σ^1_{n+5}). Это завершит доказательство (ii) из 4.1.

6.2. Уточнение теоремы о представлении. Нам понадобится несколько более сильная формулировка теоремы 2.7.2, опирающаяся на 2.5.3.

Введем следующее определение: множество $c = (Q_h\colon h \in \mathrm{Seq}) \in \mathrm{Cod}$ называем n, i-избегающим, если для всех $h \in \mathrm{Seq}$ и $p \in Q_h$ выполняется $p(n, i) = (0, 0)$.

Следствие (из теоремы 2.7.2). *Пусть* G *есть* U^*-*г. ф.* $S \in L[G]$, $S \subseteq \mathrm{Seq}$. *Пусть также* n, $i \in \omega$ *и* $i \notin g^G(n)$. *Тогда найдется такое* n, i-*избегающее* $c \in \mathrm{Cod}(U^*)$, *что* $S = c^G$.

Доказательство. По теореме 2.7.2, найдется (не обязательно n, i-избегающее) $c' \in \mathrm{Cod}(U^*)$, удовлетворяющее $c'^G = S$. Пусть $c' = (Q_h'\colon h \in \mathrm{Seq})$. Определяем $Q_h = \{p \in Q_h'\colon p(n, i) = (0, 0)\}$ и $c = (Q_h\colon h \in \mathrm{Seq})$ и покажем, что c — искомое.

Из построения следует: $c \in \mathrm{Cod}(U^*)$ и c является n, i-избегающим. Значит, по выбору c', достаточно доказать равенство $c'^G = c^G$, т. е. эквивалентность $G \cap Q_h' = 0 \equiv G \cap Q_h = 0$ для любого $h \in \mathrm{Seq}$, а эта эквивалентность немедленно получается из 2.5.3.

6.3. Формулировка и начало доказательства «теоремы о ложности». Нашей очередной целью будет доказательство следующей теоремы:

ТЕОРЕМА. *Пусть* G *есть* U^*-*г. ф.,* n, $i \in \omega$ *и* $i \notin g^G(n)$. *Тогда формула* $\exists S \Phi_n(S, i)$ *ложна в* $L[G]$.

Доказательство этой теоремы мы закончим в 6.5. Оно начинается предположением противного: *формула* $\Phi_n(S, i)$ *истинна в* $L[G]$ *при каком-то* $S \in L[G]$. По следствию 6.2, найдется такое n, i-*избегающее* $c = (Q_h\colon h \in \mathrm{Seq}) \in \mathrm{Cod}(U^*)$, что $S = c^G$. Таким образом, формула $\Phi_n(c^G, i)$ истинна в $L[G]$. Отсюда следует существование такого $p_0 \in G$, что выполняется

1. $p_0 \Vdash^* \Phi_n(\mathbf{c}^{\mathbf{G}}, \mathbf{i})$.

Здесь и ниже мы пишем $\Vdash^*$ вместо $\Vdash_{U^*}$. Напомним, что $\mathbf{G}$ и $\mathbf{x}$ для всякого $x \in L$ — константы языка вынуждения, 2.4.

Теперь будем получать противоречие. Введенные множества n, i, G, p_0, $c = (Q_h\colon h \in \mathrm{Seq})$ фиксированы в рассуждениях 6.4—6.5.

6.4. Множество D. *Все рассуждения этого пункта проходят в* L. Первым делом, благодаря 3.9.3, мы можем фиксировать такое $\beta\in\omega_2$, что $p_0\in P(U^\beta)$. Теперь вводим следующее определение.

Если $\gamma\in\omega_1$, $f\in\mathrm{Fun}$ *и* $p\in P_0$ *таковы, что* $(\forall\mu\in\omega_1)[\mu>\gamma\to p$ *противоречит каждому* $q\in Q_{f|\mu}]$, *то пишем* $\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$.

Замечание. Если $f\in\mathrm{Fun}$ и $\mu\in\omega_1$, то $h=f|\mu$ принадлежит Seq и $Q_{f|\mu}=Q_h$ фиксировано в 6.3.

Докажем две леммы о формуле $\mathfrak{A}$.

ЛЕММА 1. *Если* $f\in V^*_{ni}$, $\gamma\in\omega_1$, $p\in P(U^*)$ *и* $p\geqq p_0$, *то* $\sim\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$.

Доказательство. Из 6.3.1 $p\geqq p_0$, $f\in V^*_{ni}$ и определения формулы Φ_n следует $p\|\!-^*$ «$\mathbf{c}^{\mathbf{G}}$ *покрывает* $\mathbf{f}$». Это означает, что найдутся такие $p_1\in P(U^*)$, $p_1\geqq p$, и $\mu\in\omega_1$, $\mu>\gamma$, что $p_1\|\!-^*$ «$\mathbf{h}\in\mathbf{c}^{\mathbf{G}}$», где $h=f\,|\,\mu\in\mathrm{Seq}$.

Согласно определению c^G (см. 2.7), отсюда следует существование такого $q\in Q_h$, что p_1 не противоречит q. Тогда p также не противоречит q, так как $p_1\geqq p$. Это и дает $\sim\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$.

ЛЕММА 2. *Если* $f\in U^*_{ni}$, *то найдутся такие* $t\in P(U^*)$ *и* $\gamma\in\omega_1$, *что* $t\geqq p_0$ *и* $\mathfrak{A}(\gamma, f, t)$.

Доказательство. Из 6.3.1, $f\in U^*_{ni}$ и определения формулы Φ_n следует существование таких $\gamma\in\omega_1$ и $t\in P(U^*)$, что $t\geqq p_0$ и выполняется

(1) $t\|\!-^*$ «$\mathbf{c}^{\mathbf{G}}$ *не покрывает* $\boldsymbol{f}$ *выше* γ».

Покажем, что t — искомое, т. е. $\mathfrak{A}(\gamma, f, t)$. Предположим противное. Тогда существуют такие $\mu\in\omega_1$, $\mu>\gamma$, и $q\in Q_{f|\mu}$, что t не противоречит q. Полагаем $h=f|\mu$.

Заметим, что $t\in P(U^*)$ имеет место по выбору t, а $q\in P(U^*)$ следует из $c\in\mathrm{Cod}(U^*)$. Значит, применяя 2.3.3, имеем: множество $t'=t\vee q$ принадлежит $P(U^*)$ и удовелтворяет $t'\geqq t$ и $t'\geqq q$.

Последнее утверждение, в частности, влечет $t'\|\!-^*$ «$\mathbf{q}\in\mathbf{G}$» и, далее, $t'\|\!-^*$ «$\mathbf{h}\in\mathbf{c}^{\mathbf{G}}$» по определению c^G и в силу $q\in Q_h$. Но это очевидно противоречит (1) и $t'\geqq t$, $\mu>\gamma$. Лемма доказана.

Теперь определяем D как *совокупность всех таких пар* $(U, V)\in PS$, *что найдутся* $\gamma\in\omega_1$, $f\in V_{ni}$ *и* $p\in P(U)$, *удовлетворяющие* $p\geqq p_0$ *и* $\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$. Используя различные части утверждения 3.2 об определимости, нетрудно проверить, что $D\in\Sigma^{(2)}_2$ (с параметрами f, p_0, $c\in H\omega_2$). Значит, применяя свойство 3.6(ii) фиксированных в 3.9 последовательностей U^α, V^α, мы можем найти такое $\alpha\in\omega_2$, $\alpha\geqslant\beta$, что выполняется одно из следующих двух утверждений:

3. $(U^\alpha, V^\alpha)\in D$.

4. *Нет пар* $(U, V)\in D$, *продолжающих пару* (U^α, V^α).

Мы покажем, что каждое из этих утверждений приводит к противоречию. Начнем с утверждения 3.

Итак, пусть $(U^\alpha, V^\alpha)\in D$. По определению D и в силу 3.9.1, 3.9.2 это означает, что найдутся такие $p\in P(U^*)$ и $f\in V^*_{ni}$, что $p\geqq p_0$ и $\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$. Но это противоречит лемме 1. Итак, утверждение 3 быстро привело к противоречию.

6.5. Завершение доказательства теоремы 6.3. Теперь мы собираемся привести к противоречию и утверждение 4 из 6.4. Рассуждения этого пункта, как и рассуждения 6.4, проходят в L.

Итак, пусть нет пар $(U, V) \in D$, продолжающих (U^α, V^α).

Для $p \in P_0$ и $m, j \in \omega$ через $F_p(m, j)$ обозначаем множество $\{g \in \mathrm{Fun}: \exists \nu [(\nu, g) \in X]\}$, где X — вторая компонента пары $p(m, j)$, т. е. $p(m, j) = (s, X)$ для некоторого $s \subseteq \mathrm{Seq}$.

Из определения 2.2 следует: $F_p(m, j) \subseteq \mathrm{Fun}$ не более чем счетно.

Далее, множество U^α_{ni} имеет мощность $\leqslant \omega_1$ в силу $(U^\alpha, V^\alpha) \in PS$ (см. 3.9.1). С другой стороны, U^*_{ni} имеет мощность ω_2 по 3.9.4. Значит, найдется $f \in U^*_{ni} - U^\alpha_{ni}$. Фиксируем это $f \in \mathrm{Fun}$. Доказывается

ЛЕММА. *Найдутся такие $p \in P(U^*)$ и $\gamma \in \omega_1$, что $p \geqq p_0$, $f \notin F_p(n, i)$ и выполняется $\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$.*

(Напомним, что n, i, p_0 фиксированы начиная с 6.3.)

Доказательство. По 6.4.2 найдется такое $t \in P(U^*)$, $t \geqq p_0$, и такое $\gamma \in \omega_1$, что выполняется

(1) $\mathfrak{A}(\gamma, f, t)$.

Преобразуем слегка t для получения искомого p. Пусть $t(n, i) = (s, X)$. Положим $X_1 = \{(\nu, g) \in X: g \neq f\}$, т. е. X_1 получается из X удалением всех пар вида (ν, f), где $f \in \mathrm{Fun}$ фиксировано выше.

Теперь определяем $p \in P(U^*)$ условиями: $p(0) = t(0)$, $p(n, i) = (s, X_1)$ и $p(m, j) = t(m, j)$ при $m \neq n \vee j \neq i$. Покажем, что построенное p вместе с выбранным выше γ будут искомыми.

Из $t \in P(U^*)$ и построения p ясно, что p действительно принадлежит $P(U^*)$. Далее, изменение p по сравнению с t касается только функции f в n, i-й компоненте. С другой стороны, $p_0 \in P(U^\alpha)$ (это следует из $\alpha \geqslant \beta$, выбора β в 6.4, и 3.9.1), а $f \notin U^\alpha_{ni}$. Отсюда с учетом $t \geqq p_0$ нетрудно получить $p \geqq p_0$.

Утверждение $f \notin F_p(n, i)$ выполняется по определению p.

Осталось проверить $\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$. Предположим противное. Это означает, что существуют $\mu \in \omega_1$, $\mu > \gamma$, и $q \in Q_{f|\mu}$ такие, что выполняется

(2) *p не противоречит q.*

Покажем, что тогда и t не противоречит q (это даст противоречие с (1)). Достаточно проверить, что для t и q выполняется критерий непротиворечивости 2.3.4, используя то обстоятельство, что этот критерий выполняется для p и q согласно (2).

По построению p справедливы равенства $p(0) = t(0)$ и $p(m, j) = t(m, j)$ при $m \neq n \vee j \neq i$. Значит, учитывая (2) и критерий 2.3.4 для p и q, имеем: для доказательства непротиворечивости t и q достаточно проверить лишь условия (2) и (3) из 2.3.4 для t, q, причем только для тех n, i, которые фиксированы, начиная с 6.3. Но для этих n, i выполняется равенство $q(n, i) = (0, 0)$, так как $q \in Q_{f|\mu}$, а множество $c = (Q_h: h \in \mathrm{Seq})$ является n, i-избегающим (см. 6.3). В этой ситуации выполнение 2.3.4 (2, 3) для t, q (и рассматриваемых n, i) очевидно.

Итак, непротиворечивость t и q установлена. Но этот факт противоречит утверждению (1) в силу выбора $\mu > \gamma$ и $q \in Q_{f|\mu}$.

Полученное противоречие завершает доказательство $\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$ и леммы.

Возвращаемся к доказательству теоремы 6.3 (разбор случая 6.4.4). Согласно доказанной лемме, найдутся такие $p \in P(U^*)$ и $\gamma \in \omega_1$, что $f \notin F_p(n, i)$ и выполняется:

(3) $p \geqq p_0$ *и* $\mathfrak{A}(\gamma, f, p)$.

Определяем систему U условиями: $U_{mj} = U^{\alpha}_{mj} \cup F_p(m, j)$ $\forall m, j \in \omega$, и систему V — условиями: $V_{mj} = V^{\alpha}_{mj}$ при $m \neq n \vee j \neq i$ и $V_{ni} = V^{\alpha}_{ni} \cup \{f\}$. Учитывая $f \notin U^{\alpha}_{ni}$ и $p \in P(U^*)$, нетрудно проверить, что пара (U, V) принадлежит PS и продолжает пару (U^{α}, V^{α}). Также очевидно, что $p \in P(U)$ и $f \in V_{ni}$. Теперь из (3) следует $(U, V) \in D$.

Итак, нашлась пара $(U, V) \in D$, продолжающая пару (U^{α}, V^{α}). Но это противоречит предположению 6.4.4.

Таким образом, каждое из предположений 6.4.3, 6.4.4 приводит к противоречию. Тем самым предположение противного в 6.3 также приводит к противоречию. Теорема 6.3 доказана.

6.6. Аналитическая определимость всех конструктивных множеств. Теперь мы уже можем доказать утверждение (ii) из третей формулировки основной теоремы (см. 4.1). Фиксируем в этом пункте произвольный U^*-г. ф. G и докажем, что каждое конструктивное $r \subseteq \omega$ аналитически определимо в $L[G]$. Сперва получаем

Следствие 1. *Если $r \subseteq \omega$ конструктивно, то найдется такое $n \in \omega$, что $r = \{i \in \omega$: в $L[G]$ истинно $\exists S \Phi_n(S, i)\}$.*

Доказательство. В силу 2.5.1, найдется такое $n \in \omega$, что $r = g^G(n)$. Это n и будет искомым, благодаря следствию 6.1 и теореме 6.3.

Теперь покажем, что каждая формула $\exists S \Phi_n(S, i)$ определяет в $L[G]$ аналитически определимое множество.

ЛЕММА 2. *Пусть $n \in \omega$ и $r = \{i \in \omega$: в $L[G]$ истинно $\exists S \Phi_n(S, i)\}$. Тогда $r \in \Sigma^1_{n+5}$ в $L[G]$.*

Доказательство. Обозначаем $H = \{x \in L[G]$: *транзитивное замыкание x не более чем счетно в* $L[G]\}$ и $Z = \{x \in L$: *мощность транзитивного замыкания x не больше ω_1^L в* $L\}$.

Заметим, что ω_1^L счетно в $L[G]$ по 2.5.1, а ω_2^L несчетно в $L[G]$ (это обычным путем выводится из 2.3.1 и 2.3.3, см., например, ([4]), лемма 56 на стр. 68). Значит, $\omega_1^{L[G]} = \omega_2^L$. Отсюда и из определений H и Z следует: $Z = H \cap L = \{z \in H$: в H истинно «z — конструктивно»$\}$. Но формула «быть конструктивным множеством» есть Σ_1-формула (см. ([10]), стр. 38 или 82). Следовательно, выполняется:

(1) $Z \in \Sigma^H_1$, *т. е. Z определимо в H некоторой Σ_1-формулой.*

С другой стороны, ясно, что Z есть множество $(H\omega_2)^L$. Значит, множества $C_n = \{(i, f) : i \in \omega$ и $f \in U^*_{ni}\}$ и $C'_n = \{(i, f) : i \in \omega$ и $f \in V^*_{ni}\}$ принадлежат Σ^Z_{n+3} по лемме 3.9.5. Отсюда и из (1) получаем:

(2) *множества C_n и C'_n принадлежат Σ^H_{n+3}.*

Далее, по определению формулы Φ_n и множеств C_n и C_n', выполняется равенство: $r=\{i\in\omega$: *в* H *истинно* $\exists S\forall f[[(i,f)\in C_n\to S$ *не покрывает* $f]\&[(i,f)\in C_n'\to S$ *покрывает* $f]]\}$.

Из этого равенства и (2) следует:

(3) *множество* r *принадлежит* Σ^H_{n+4}.

Наконец, определимость в совокупности H всех наследственно счетных в $L[G]$ множеств связана с аналитической определимостью следующим образом (см. ([11]), лемма на стр. 281):

Пусть $m\geqslant 1$ *и* $a\subseteq\omega$ *принадлежит* $L[G]$. *Тогда* $a\in\Sigma^H_m$, *если и только если* $a\in\Sigma^1_{m+1}$ *в* $L[G]$.

Из (3) и сформулированного утверждения вытекает выполнение $a\in\Sigma^1_{n+5}$ в $L[G]$. Лемма доказана.

Из следствия 1 и леммы 2 вытекает основной результат этого параграфа:

ТЕОРЕМА 3. *Если* $r\subseteq\omega$ *конструктивно, то* r *аналитически определимо в* $L[G]$, *каков бы ни был* U^*-*г. ф.* G.

Соединяя эту теорему с теоремой 4.9, завершаем доказательство основной теоремы ОТ в ее третьей формулировке (см. 4.1).

Автор глубоко признателен проф. В. А. Успенскому за ценное обсуждение.

Поступило
26.X.1978

Литература

1 **Роджерс X.**, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., «Мир», 1972.

2 **Шенфилд Дж.**, Математическая логика, М., «Наука», 1975.

3 **Коэн П.**, Теория множеств и континуум-гипотеза, М., «Мир», 1969.

4 **Йех Т.**, Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.

5 **Solovay R. M.**, A model of set theory in which every set of reals in Lebesque measurable, Ann. Math., 92, № 1 (1970), 1—56.

6 **Mathias A. R. D.**, A survey of recent results in set theory, Stanford University, 1968.

7 **Addison J. W.**, Some consequences of the axiom of constructibility, Fund. Math., 46 (1959), 337—357.

8 **Jensen R. B., Solovay R. M.**, Some applications of almost disjoined sets, Math. Logic and Found. of Set Theory, Amst. (1970), 84—103.

9 **Jensen R. B.**, Definable set of minimal degree, Math. Logic and Found. of Set Theory, Amst. (1970), 122—128.

10 **Delvin K.**, Aspects of constructibility, Lectures Notes in Math., № 354, Berlin, 1973.

11 **Jensen R. B., Johnsbraten H.**, A new construction of a nonconstructible set of integers, Fund. Math., 81, № 4 (1974), 279—290.

12 **Кановей В. Г.**, О непустоте классов в аксиоматической теории множеств, Изв. АН СССР. Сер. матем., 42 (1978), 550—579.

13 **Tarski A.**, A problem concerning the notion of definability, J. Symbol. Log., 13, № 2 (1948), 107—111.

14 **Devlin K.**, Constructibility, Handbook of Math. Logic, Barwise ed. North.— Holl., Amst. (1977), 453—489.