Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Новосибирский национальный исследовательский государственный
университет»

Международная конференция

МАЛЬЦЕВСКИЕ ЧТЕНИЯ

20–24 сентября 2021 г.

Тезисы докладов

Международный математический центр
в Академгородке

Новосибирский государственный университет

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Новосибирск • 2021

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk State University

International Conference

MAL'TSEV MEETING

September 20–24, 2021

Collection of Abstracts

International Mathematical Center in Akademgorodok

Novosibirsk State University

Sobolev Institute of Mathematics

Novosibirsk • 2021

Об отсутствии $(0,1)$-решений у системы уравнений

А. В. Селиверстов

Для многих задач распознавания известные алгоритмы имеют высокую вычислительную сложность в худшем случае, однако существуют так называемые генерические алгоритмы, работающие без ошибок и быстро принимающие или отвергающие почти любой вход, но уведомляющие об отказе от решения на малой доле входов [**1, 2**].

Задача. *Даны $m \times n$ матрица A и вектор $\mathbf{b}$ с целыми коэффициентами. Имеет ли система линейных уравнений $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ некоторое $(0,1)$-решение?*

Когда все элементы $m \times n$ матрицы A и вектора $\mathbf{b}$ неотрицательные, метод динамического программирования позволяет перечислить все $(0,1)$-решения системы неравенств $A\mathbf{x} \leqslant \mathbf{b}$. При $m > 13\log_2 n$ и некоторых предположениях о распределении коэффициентов, среднее число $(0,1)$-решений полиномиально ограничено, следовательно, эти решения легко найти. Доказательство, которое предложил Н. Н. Кузюрин [**3**], основано на оценке хвостов биномиального распределения. Если же система неравенств имеет мало $(0,1)$-решений, легко выбрать те решения, на которых неравенства обращаются в равенства.

Новый метод уточняет структуру множества трудных входов и свободен от предположения о неотрицательности коэффициентов.

Теорема. *Пусть целое число q равно степени простого числа. Для каждого такого q существуют сублинейная функция $s_q(n) = o(n)$ и генерический алгоритм полиномиального времени, который для всех положительных целых чисел t, m и $n = 1 + q + \cdots + q^t$, удовлетворяющих неравенству $m > n - \sqrt{q(q+1)n - s_q(n)}$, и для почти каждого набора из m линейных форм $\ell_j(x_0, \cdots, x_{n-m})$, где $j > n - m$, допускает лишь такой вход, для которого не существует $(0,1)$-решения системы уравнений $x_j = \ell_j(1, x_1, \cdots, x_{n-m})$. Более того, для указанных n и m существует такой отличный от константы многочлен степени $O(\sqrt{n^{q+1}})$ от коэффициентов линейных форм ℓ_j, что, если алгоритм не принимает и не допускает вход, то этот многочлен обращается в нуль.*

Случай $q = 1$ был рассмотрен ранее [**2**].

Список литературы

[1] Рыбалов А. Н., О генерической сложности проблемы о сумме подмножеств для полугрупп целочисленных матриц, Прикладная Дискретная Математика, 50 (2020), 118–126.

[2] Селиверстов А. В., Двоичные решения для больших систем линейных уравнений, Прикладная Дискретная Математика, 52 (2021), 5–15.

[3] Кузюрин Н. Н., Полиномиальный в среднем алгоритм в целочисленном линейном программировании, Сибирский Журнал Исследования Операций, 1:3 (1994), 38–48.

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, Москва
E-mail: slvstv@iitp.ru