

Об алгоритме решения NP-полной задачи, если решений нет или их нечётное число

Василий А. Любецкий, Александр В. Селиверстов

Аннотация — В случае, если решений нет или их нечётное число, предложено решение задачи о разбиении множества с весами как в смысле теории поля комплексных чисел, так и в смысле недетерминированного полиномиального алгоритма. Задача сводится к рекурсивному решению вопроса о существовании особых точек на явно заданной кубике низкого ранга.

Ключевые слова — Задача о разбиении множества с весами, задача о рюкзаке, недетерминированный алгоритм, NP-полная задача, поиск особых точек на кубике, теория поля комплексных чисел.

I. ВВЕДЕНИЕ

Старая и широко известная задача о рюкзаке имеет разные постановки. Она может иметь характер задачи разрешения (с предъявлением решения) или задачи оптимизации. Все обычные постановки этой задачи распознавания полиномиально эквивалентны; задача оптимизации сводится к полиномиальной длины серии задач разрешения, например, с помощью дихотомии. Мы рассмотрим одну из постановок этой задачи, в форме разрешения. Она состоит в следующем. Дано $n+1$ чисел («веса»), которые могут повторяться. Для основной части нашего метода не имеет значения, к какому полю характеристики нуль или даже достаточно большой простой характеристики принадлежат веса. Но в алгоритмической части естественно считать их целыми и строго положительными. Таким образом, дана последовательность весов $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Нужно найти множество индексов, для которых сумма весов равна точно половине суммы всех весов. Если упростить задачу, спросив, существует ли решение, то она будет NP-полной. Поэтому её алгоритмическое решение, по видимому, предполагает некоторое условие. Мы рассмотрим её *при условии*: решений нет или их число нечётное. Содержательным является уже частный случай этого условия: существует не более одного решения. Для краткости ниже говорится об этом случае; переход к общему случаю не представляет трудности, если использовать инволюции.

В этой связи «решить» означает одно из двух. Найти

Статья получена 19 октября 2015. Работа выполнена за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

Василий Александрович Любецкий, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия (e-mail: lyubetsk@iitp.ru).

Александр Владиславович Селиверстов, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия (e-mail: slvstv@iitp.ru).

две E-формулы полиномиальной длины в языке поля комплексных чисел: одна говорит, что «существует решение» и вторая, отрицание первой формулы, говорит, что «не существует решения». Первая из формул очевидна:

$$\exists x_0, \dots, x_n ((\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n = 0) \wedge (\dots x_i^2 = 1 \dots))$$

Для второй формулы даже её существование совершенно не очевидно. Кроме того, можно искать недетерминированный полиномиальный алгоритм, который говорит, что «решений нет», или предъявляет решение.

Мы рассмотрим оба эти случая на основе, как нам кажется, необычного подхода, состоящего в сведении исходной комбинаторной задачи к исследованию особых точек кубической формы. Ниже она явно задаётся и обозначается F_L , она определена на n -мерной гиперплоскости, обозначаемой L , как сужение на неё кубической формы F в $(n+1)$ -мерном комплексном линейном пространстве \mathbb{C}^{n+1} . Форма имеет ранг $n+1$.

Отметим, что ранг кубической формы обычно превосходит число её переменных. Например, произведение трёх переменных равно сумме четырёх кубов линейных форм, но не равно никакой сумме меньшего числа кубов линейных форм [1]. Для кубических форм от трёх переменных известно несколько нормальных форм. Обобщение одной из них – формы Гессе описано в [2]. В некоторых случаях она позволяет определять особые точки, однако в общем случае эффективность такого подхода не ясна.

II. РЕЗУЛЬТАТЫ

Приводимое ниже рассуждение более естественно в комплексном проективном пространстве $P(\mathbb{C}^{n+1})$, состоящем из прямых, проходящих через нуль, в \mathbb{C}^{n+1} (далее называемых *прямыми*). Но для наглядности будем говорить о самом \mathbb{C}^{n+1} . Форма и соответствующая ей гиперповерхность обозначаются одинаково. С алгоритмической точки зрения удобнее другая форма, более высокого порядка.

Назовём *вершиной* последовательность длины $n+1$, которая состоит из чисел ± 1 . В исходной задаче пара противоположных вершин соответствует одному разбиению данного множества с весами на две части.

Обозначим L гиперплоскость в \mathbb{C}^{n+1} , заданную формой $L = \alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n$, то есть заданную уравнением $L = 0$, её размерность равна n .

Обозначим F форму в \mathbb{C}^{n+1} вида $F = \alpha_0 x_0^3 + \dots + \alpha_n x_n^3$ и соответственно F_L – сужение

этой формы на L . Такое сужение F_L – кубическая форма, определённая на L , ранга $n+1$, о которой говорилось выше. Она может иметь *особые точки*, т.е. точки, в которых градиент равен нулю. Точка $\langle 0, \dots, 0 \rangle$ здесь и далее исключается из рассмотрения. Очевидно, особая точка для F_L лежит на прямой, состоящей сплошь из особых для F_L точек; назовём её *особой прямой*. Таким образом, особые точки и особые прямые (всегда для формы F_L) можно не различать.

А. Соответствие вершин и особых точек

Если вершина x лежит в L , то x – особая точка для F_L в L . И наоборот, если x – особая точка в L , то на ней имеется пара противоположных вершин.

Доказательство. Пусть x – точка из L и градиент $\nabla F_L(x) = 0$. Поскольку трансверсальное гиперплоское сечение гладкой гиперповерхности само гладкое, в точке x градиенты $\nabla F(x)$ и $\nabla L(x)$ коллинеарны. То есть векторы $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle$ и $\langle 3\alpha_0 x_0^2, \dots, 3\alpha_n x_n^2 \rangle$ отличаются общим множителем. Последнее означает $x_i^2 = x_j^2$. На прямой, проходящей через нуль и эту точку x , имеется точка x' (положим у x первую координату равной 1), для которой $x_i'^2 = 1$; эта x' – вершина в L .

Пусть x – вершина в L , т.е. $L(x)=0$, тогда $F(x)=0$; градиенты от L и от F в x равны $\langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle$ и $\langle 3\alpha_0 x_0^2, \dots, 3\alpha_n x_n^2 \rangle = \langle 3\alpha_0, \dots, 3\alpha_n \rangle$, то есть коллинеарны между собой.

В. Выразимость в языке теории полей

Предположим, что F_L имеет не более одной особой прямой (в проективизации – особой точки). Это – частный случай указанного выше условия, о котором удобнее говорить. Назовём *нетривиальным* невырожденное линейное неквадратное (то есть не вида $z \cdot E$) преобразование J в линейном пространстве L над \mathbb{C} , сохраняющее множество нулей формы F_L . Последовательно применяя нетривиальные преобразования к уже полученным подпространствам, получим $L = L_1 \oplus \dots \oplus L_p$, где $p \leq n$ и каждое L_i малой размерности, ограниченной сверху константой, которая не зависит от n . Особая прямая, если она есть, лежит в одном из подпространств L_i . Отсутствие особой прямой для F_L в каждом L_i выражается условием: дискриминант не равен нулю [3]. В одномерном случае это условие можно заменить неравенством нулю всех частных производных в какой-то ненулевой точке. Суммарная длина полученной E-формулы полиномиальна от n . Бесквантовая часть этой формулы включает условие нетривиальности каждого преобразования.

С. Аппроксимация

Пошевелим базисы в L_1, \dots, L_p , чтобы базисы стали рациональными, получим подпространства L_1', \dots, L_p' .

Новые подпространства можно выбрать со следующими свойствами: (а) ближайшая пара противоположных вершин единственна, обозначим её $\varepsilon(L_i')$; и (б) подпространство L_i содержит особую прямую, если и только если $\varepsilon(L_i')$ – вершины, лежащие в гиперплоскости L . Недетерминированный шаг состоит в указании новых базисов.

III. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Хотя алгоритм недетерминированный, его реализация могла бы сертифицировать вычисления на суперкомпьютерах [4]. Рост производительности вычислительных машин приводит к трудности проверки вычислений, невыполнимых на общедоступных машинах. Разработка быстрых недетерминированных алгоритмов, требующих малых памяти и времени работы, позволяет эффективно проверять результаты работы многопроцессорных вычислительных машин в случае, если они предоставляют заказчику сертификат, содержащий все недетерминированные шаги вычисления в ходе выполнения алгоритма.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарны всем участникам семинара в МГУ «Модели и алгоритмы в биоинформатике» под руководством В. А. Любецкого и К. Ю. Горбунова, на котором обсуждалась эта работа. По теме работы авторами представлен доклад на X международной конференции «Современные информационные технологии и ИТ образование» в МГУ им. М.В. Ломоносова.

БИБЛИОГРАФИЯ

- [1] С. Б. Гашков, Е. Т. Шавгулидзе, «О представлении произведений в виде суммы степеней линейных форм», *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика.*, № 2, стр. 9–14, 2014. Перевод: S. B. Gashkov, E. T. Shavgulidze, Representation of monomials as a sum of powers of linear forms, *Moscow Univ. Math. Bull.*, vol. 69, no 2, 51–55, 2014.
- [2] А. В. Селиверстов, «Кубические формы без мономов от двух переменных», *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, том 25, № 1, стр. 71–77, 2015.
- [3] А. Ю. Морозов, Ш. Р. Шакиров, «Новые и старые результаты в теории результантов», *Теоретическая и математическая физика*, том 163, № 2, стр. 222–257, 2010. Перевод: A. Yu. Morozov, Sh. R. Shakirov, “New and old results in resultant theory,” *Theoret. and Math. Phys.*, vol. 163, no 2, pp. 587–617, 2010.
- [4] Л. И. Рубанов, «О распараллеливании неоднородных циклов на суперкомпьютерах с распределённой памятью», *Информационные процессы*, том 13, № 4, стр. 295–305, 2013. Перевод: L. I. Rubanov, “Parallelization of Nonuniform Loops in Supercomputers with Distributed Memory,” *Journal of Communications Technology and Electronics*, vol. 59, no. 6, pp. 639–646, 2014.

On an algorithm for solving NP-complete problem, if there is no or odd number of solutions

Vassily A. Lyubetsky, Alexandr V. Seliverstov

Abstract — If there is no or odd number of solutions, we propose a solution to the weighted set partition problem in terms of both the complex number field theory and non-determined polynomial algorithm. The problem is reduced to a recursive finding of singular points on an explicitly determined lower rank cubic hypersurface.

Keywords — Weighted set partition problem, knapsack problem, NP-complete problem, finding of singular points on a cubic, complex number field theory.