УДК 510.225; 510.223

АКСИОМА ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ И СОВРЕМЕННОЕ РАЗВИТИЕ ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

В. Г. Кановей

ВВЕДЕНИЕ

Дескриптивная теория множеств, истоки которой восходят к трудам Бореля, Бэра, Лебега начала столетия, сформировалась в 20-е и 30-е годы как самостоятельное направление, занимавшее в то время видное место в математических исследованиях. Через занятия дескриптивной теорией прошли (и имеют в ней признанные результаты) такие ученые с мировым именем, как П. С. Александров, Л. В. Канторович, А. Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев, а для Н. Н. Лузина и П. С. Новикова эта область стала одной из главных в их математической деятельности.

Усилиями, главным образом, отечественных математиков были созданы и приняли в целом законченный вид к концу 30-х годов такие разделы дескриптивной теории, как теория борелевских множеств, теория A-множеств (называемых также аналитическими, или суслинскими множествами), теория решет, индексов и конституант, теория CA-множеств и проективных множеств второго уровня, общая теория операций над множествами (от которой несколько позже произошла теория R-множеств).

Все эти исследования, объединяемые сейчас под общим названием: классическая дескриптивная теория множеств, характеризуются — если взглянуть на них с современной точки зрения — унаследованным из теории функций традиционным пониманием математических доказательств как деятельности по установлению свойств объектов, имеющих в каком-то смысле реальное существование. Дериватом такого подхода была интуитивная установка исследователей на то, что каждое (или, по крайней мере, каждое «осмысленное») высказывание о «реальных» множествах либо истинно — и тогда его можно доказать, приложив большие или меньшие усилия, — либо ложно, и тогда его можно опровергнуть; главная же задача математиков состоит в изыскивании новых способов и методов доказательств.

Такие представления, свойственные большинству областей математики, до некоторых пор хорошо «работали» и в дескриптивной теории множеств, пока последняя ограничивалась относительно «простыми» множествами такими, как борелевские или A-множества. Ситуация, однако, совершенно изменилась, когда специалисты по дескриптивной теории перешли к изучению открытых Н. Н. Лузиным проективных множеств. Если для первого — низшего уровня проективных множеств, образованного борелевскими множествами, A-множествами и CA-множествами, — удалось создать богатую результатами теорию, то для множеств второго проективного уровня были получены лишь отдельные существенные результаты, а более высокие проективные уровни вообще оставались terra incognita — для них, в сущности, было известно только то, что на каждом уровне появляются множества, которых не было на предшествующих уровнях. И причина невозможности содержательного исследования заключалась отнюдь не в недостаточном уровне технических средств. После изысканий П. С. Новикова, Р. Соловея и других стало известно (а Н. Н. Лузин был убежден в этом еще в середине 20-х годов), что многие важные вопросы о проективных множествах высоких уровней — а в некоторых случаях и второго, и даже первого уровня — в принципе не допускают определенного, положительного или отрицательного ответа на базе принятых в математике методов и способов рассуждения.

Так, П. С. Новиков показал в [11], что из предположения о существовании неизмеримого по Лебегу множества второго проективного уровня невозможно вывести противоречие. Позже Р. Соловей [69] установил, что из предположения об измеримости всех проективных множеств действительной прямой также нельзя вывести противоречие. Таким образом, проблема измеримости проективных множеств оказывается неразрешимой. Такой же оказалась судьба и большинства остальных открытых проблем классической дескриптивной теории.

Естественно, что такое положение заставило математиков, работавших в дескриптивной теории, обратиться к поискам новых аксиом, не относящихся к традиционным постулатам классической математики, но допускающих более или менее приемлемое обоснование и позволяющих получить определенные ответы на неразрешимые в рамках традиционного подхода вопросы. Первоначально в роли такой дополнительной аксиомы рассматривалась аксиома конструктивности Гёделя, главные приложения которой к проблемам дескриптивной теории были получены П. С. Новиковым [11]. Определенный интерес вызывала также аксиома измеримого кардинала и эквивалентная ей в плане приложений к дескриптивной теории «гипотеза диезов»[1]. Но наибольшим вниманием и признанием среди специалистов по дескриптивной теории в последние 10—15 лет пользуются две аксиомы, связанные с бесконечными играми: аксиома детерминированности AD и аксиома проективной детерминированности PD. Им и посвящена настоящая статья.

О популярности этой тематики в современных исследованиях свидетельствует хотя бы то, что помимо массы журнальных публикаций, приложениям детерминированности полностью или в значительной степени отданы четыре тома серии Lecture Notes Math.: [38, 37, 35, 36] в хронологическом порядке. Однако изыскания по детерминированности мало отражены в отечественных изданиях: можно упомянуть только § 6 восьмой главы переводной «Справочной книги» [3] и главу 2 брошюры [5]. Это обстоятельство оказало определенное влияние на выбор стиля нашей статьи. Автор предпочел, не стремясь к максимальному охвату всех направлений, уделить больше места наиболее важным результатам, но привести их с доказательствами. Такой же способ изложения, отметим, принят и в упоминавшейся «Справочной книге».

Несколько слов об структуре обзора. В первом параграфе приведены некоторые необходимые определения и факты, касающиеся проективных множеств. Следующий § 2 вводит в теорию игр и детерминированных множеств. Затем в §§ 3—7 мы рассматриваем главные приложения аксиом AD и PD к проблемам теории проективных множеств, связанным со свойствами регулярности, отделимостью, униформизацией, однозначными и счетнозначными множествами, борелевским и суслинским представлениями проективных множеств. В последнем § 8 излагаются некоторые результаты, основанные на теореме Мартина о детерминированности борелевских множеств.

Закончим введение указанием на те работы из библиографического списка, которые могли бы рассматриваться в качестве вводного курса в теорию детерминированности. Работа [59] (в особенности, первая часть) содержит обзор «ранних» исследований по детерминированности. В книге [38] освещена другая область приложений аксиомы детерминированности — инфинитарная комбинаторика. Фундаментальная монография [58] включила практически все значительные результаты в дескриптивной теории, связанные с детерминированностью и полученные к концу 70-х годов. То же можно сказать и о статьях [25, 34], но там более узкий круг вопросов рассматривается на более популярном уровне. Добавим сюда и уже отмечавшиеся [3, гл. 8, § 6] и [5]. В перечисленных работах, а также в [23] затронуты также и некоторые философско-математические вопросы о месте гипотез детерминированности среди принятых теоретико-множественных аксиом.

---

[1] Приведем список работ, достаточно полно представляющих названные направления: ([4, § 2], [14], [26], [34, п. 5.4], [50], [52], [67]).

§ 1. Проективные множества и проективная иерархия

Дескриптивная теория множеств занимается множествами, расположенными в некоторых определенных пространствах и обладающими вследствие этого унаследованной внешней структурой. Первоначально исследования ограничивались, как правило, множествами действительной прямой R и евклидовых пространств R^m. Однако уже к началу 30-х годов выяснилось, что по ряду причин в качестве основного пространства удобнее рассматривать не действительную прямую, а бэровское пространство, приводившее к существенным упрощениям в некоторых важных выкладках.

Стремясь к геометрической наглядности, Н. Н. Лузин в своих «Лекциях» [48] использовал реализацию бэровского пространства в виде множества J всех иррациональных точек прямой R. В современных работах чаще рассматривается другая реализация — произведение счетного числа экземпляров множества натуральных чисел $\omega=\{0, 1, 2, \ldots\}$, — облегчающая использование логических средств в рассуждениях. Итак, бэровским пространством называется множество $\mathscr{N}=\omega^\omega$ всех ω-последовательностей натуральных чисел, снабженное топологией произведения (топология на ω дискретна). Каждая точка $\alpha\in\mathscr{N}$ может быть представлена в виде $\alpha=\langle a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\rangle$, где $a_k=\alpha(k)\in\omega$ для всех k.

Вместе с бэровским пространством обычно рассматриваются производные от него пространства вида $\omega^l\times\mathscr{N}^m$, где l, m — натуральные числа, не равные нулю одновременно. Такие пространства мы будем называть точечными пространствами (point-space или product space в англоязычной системе), расположенные в них множества — точечными множествами, а различные семейства, составленные из таких множеств, — точечными классами.

В литературе по дескриптивной теории выработаны полезные соглашения относительно употребления букв. Натуральные числа обозначаются малыми латинскими буквами (i, a, k и т. п.), точки пространства $\mathscr{N}$ — буквами α, β, γ, δ, ε, точки произвольного точечного пространства $\mathscr{X}$ — буквами x, y, z. Точечные множества принято обозначать большими латинскими буквами, а точечные классы — буквами Σ, Π, Δ, Γ (как правило, с различными индексами). Для обозначения ординалов (конечных и трансфинитных порядковых чисел) резервируются буквы ξ, η, ζ, $\varkappa$, λ.

Простейший точечный класс образует открытые множества с которых начинается построение проективной иерархии. Эта иерархия состоит из проективных классов Σ_n^1, Π_n^1, Δ_n^1, где $n\in\omega$. Начальный класс Σ_0^1 — это класс открытых множеств точечных пространств. При любом n класс Π_n^1 включает в себя дополнения Σ_n^1-множеств, а класс Δ_n^1 — общая часть классов

Σ_n^1 и Π_n^1 — включает все такие множества, которые одновременно принадлежат классам Σ_n^1 и Π_n^1. Наконец, в класс Σ_{n+1}^1 зачисляются проекции множеств из Π_n^1. Здесь имеется в виду тот специальный способ проектирования, при котором множество $P \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{N}$ (где $\mathscr{X}$ — любое точечное пространство) переходит в свою проекцию

$$\pi P = \{x \in \mathscr{X}: \text{ найдется } \alpha \in \mathscr{N} \text{ такое, что } \langle x, \alpha \rangle \in P\},$$

т. е. проектирование вдоль самой последней (= «правой») оси, когда эта ось есть $\mathscr{N}$.

Точечное множество называется проективным, когда оно принадлежит одному из проективных классов. Проективные множества составляют наименьший класс точечных множеств, содержащий все открытые множества и замкнутый относительно операций дополнения и проектирования.

Проективная иерархия и понятие проективного множества были введены Н. Н. Лузиным в [46]. Н. Н. Лузин обозначал проективные классы через A_n, CA_n, B_n, что соответствует Σ_n^1, Π_n^1, Δ_n^1. Из результатов работы М. Я. Суслина [71] следует, что класс Σ_1^1 совпадает с классом всех точечных A-множеств (открытых Суслиным и интенсивно изучавшихся еще до опубликования заметки [46]), а класс Δ_1^1 — с классом всех борелевских точечных множеств[1]. Кстати борелевские множества сами образуют иерархию классов, индексированных конечными и счетными ординалами (см. ниже § 8).

В проведении практически любого рассуждения, где фигурируют проективные множества, бывает необходимо «вычислять» класс множества, получаемого некоторой операцией из множеств известных классов. Такие вычисления удобнее, как правило, проводить не с самими точечными множествами, а с отношениями, которые этими множествами определяются.

Использование отношений вместо множеств можно пояснить на примере множеств пространства $\mathscr{X} = \omega^2 \times \mathscr{N}$. Пусть $X \subseteq \mathscr{X}$. Договорившись писать $X(i, j, \alpha)$ вместо $\langle i, j, \alpha \rangle \in X$, мы отождествляем множество X с соответствующим ему отношением, обозначая последнее той же буквой: $X(i, j, \alpha)$. В этой записи буква α — аргумент типа $\mathscr{N}$ — обозначает произвольную (т. е. «переменную») точку $\mathscr{N}$, а буквы i и j — аргументы типа ω — обозначают произвольные натуральные числа.

Операции над отношениями такие, как конъюнкция $\wedge$, дизъюнкция $\vee$, отрицание $\neg$, кванторы $\exists$ и $\forall$, а также подстановка, имеют скорее логический, чем геометрический характер, допуская однако, и естественную геометрическую интерпретацию (отрицание = дополнение, $\exists$ = проекция и т. п.). Обращение с проективными отношениями предполагает выработку определенных навыков такой интерпретации и, если угодно,

[1] О ранних работах по дескриптивной теории см. обзоры [2, 8, 10, 13].

определенной психологической установки. Однако все это себя оправдывает, давая возможность быстро вычислять класс проективных отношений и множеств с помощью небольшого числа довольно простых правил. Приведем эти правила.

1. Правило расширения: $\Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1 \subseteq \Delta_{n+1}^1$ при любом n. Это правило отражает факт расширения проективных классов с увеличением индекса n. Отметим, что расширение здесь строгое: именно, $\Sigma_n^1 \not\subseteq \Pi_n^1$, $\Pi_n^1 \not\subseteq \Sigma_n^1$, $\Delta_{n+1}^1 \not\subseteq \Sigma_n^1 \cup \Pi_n^1$ для всех n.

2. Правило непрерывной подстановки. Отношение, полученное из отношения данного проективного класса Γ ($\Gamma = \Sigma_n^1$, Π_n^1 или Δ_n^1 здесь и ниже) подстановкой непрерывных всюду определенных на соответствующих точечных пространствах функций, принадлежит тому же классу Γ. Например, если отношение $P(k, \alpha)$ (т. е. множество $P \subseteq \omega \times \mathcal{N}$) имеет класс Γ, а функции $F: \mathcal{N}^2 \times \omega \to \omega$, $G: \omega \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $H: \mathcal{N} \times \omega \to \mathcal{N}$ непрерывны, то отношение $Q(i, j, \alpha, \beta) \rightleftarrows P(F(G(i, \alpha), \beta, i), H(\alpha, j))$ также имеет класс Γ — другими словами, множество

$$Q = \{ \langle i, j, \alpha, \beta \rangle : \langle F(G(i, \alpha), \beta, i), H(\alpha, j) \rangle \in P \}$$

пространства $\omega^2 \times \mathcal{N}^2$ принадлежит Γ.

Геометрически этому правилу соответствует факт замкнутости каждого проективного класса относительно взятия полных прообразов при непрерывных всюду определенных функциях.

3. Правило подстановки параметров. Если $P(\ldots, \alpha, \ldots)$ — отношение проективного класса Γ с выделенным аргументом α типа $\mathcal{N}$ (т. е. обозначающим «переменную» точку $\mathcal{N}$; естественно, вместо α здесь может стоять любая другая буква из числа букв, резервированных выше для обозначения точек $\mathcal{N}$), а $\alpha_0 \in \mathcal{N}$ — фиксированная точка $\mathcal{N}$ (т. е. параметр), то отношение $P(\ldots, \alpha_0, \ldots)$ также принадлежит Γ. Аналогично для аргументов типа ω (они заменяются, естественно, натуральными числами).

Таким образом, переменные аргументы отношений можно менять (с сохранением проективного класса) конкретными параметрами (точками $\mathcal{N}$ или натуральными числами). Геометрически такая замена соответствует сечению посредством гиперплоскости.

Отметим, что правило 3 есть частный случай правила 2: фактически, речь идет о подстановке функций-констант, каждая из которых, конечно, непрерывна.

4. Правило отрицания. Отрицание $\neg P(\ldots)$ отношения $P(\ldots)$ класса Σ_n^1 будет отношением класса Π_n^1; символически, $\neg \Sigma_n^1 = \Pi_n^1$. Аналогично, $\neg \Pi_n^1 = \Sigma_n^1$ и $\neg \Delta_n^1 = \Delta_n^1$. С геометрической точки зрения это означает, что операция дополнения переводит Σ_n^1 в Π_n^1 и обратно, а дополнения Δ_n^1-множеств остаются в Δ_n^1.

5. Правило конъюнкции и дизъюнкции. Любое отношение, полученное из отношений данного проективного класса Г с помощью знаков конъюнкции $\wedge$ («и») и дизъюнкции $\vee$ (не исключающее «или»), будет отношением того же класса Г: $\wedge\Gamma=\vee\Gamma=\Gamma$.

Геометрически это соответствует положению о замкнутости каждого проективного класса относительно конечных объединений и пересечений. Однако правило для отношений имеет более широкую область действия, позволяя, например, заключить, что конъюнкция $P(i, \alpha)\wedge Q(\alpha, \beta)$ двух Г-отношений P и Q имеет класс Г, тогда как соответствующее множество

$$\{\langle i, \alpha, \beta\rangle : P(i, \alpha)\wedge Q(\alpha, \beta)\}$$

не является, конечно, пересечением множеств P и Q.

Перед изложением «кванторных» правил напомним, что записи $\exists x\ldots$ и $\forall x\ldots$ означают соответственно: найдется x такое, что..., и для всякого x выполняется... . При этом, в соответствии с принятым выше соглашением об употреблении определенных букв, запись, скажем, $\exists\alpha$ понимается как $\exists\alpha\in\mathcal{N}$, а $\forall k$ — как $\forall k\in\omega$, и т. п..

6. Правила для кванторов типа $\mathcal{N}$. (а) Если $P(\ldots, \alpha, \ldots)$ — отношение класса Σ_n^1 с выделенным аргументом α, то отношение $\exists\alpha P(\ldots, \alpha, \ldots)$ также принадлежит Σ_n^1. Геометрически это соответствует замкнутости каждого из классов Σ_n^1 относительно операции проектирования.

Сформулированное правило можно в символическом виде записать в виде равенства $\exists^{\mathcal{N}}\Sigma_n^1=\Sigma_n^1$, где $\exists^{\mathcal{N}}$ означает применение квантора к одному из аргументов типа $\mathcal{N}$ (т. е. обозначающему произвольную, «переменную» точку $\mathcal{N}$). Используя этот способ записи, сформулируем еще несколько пунктов правила 6 и следующее правило 7.

(б) $\forall^{\mathcal{N}}\Pi_n^1=\Pi_n^1$; (в) $\exists^{\mathcal{N}}\Pi_n^1=\Sigma_{n+1}^1$; (г) $\forall^{\mathcal{N}}\Sigma_n^1=\Pi_{n+1}^1$.

7. Правила для кванторов типа ω.

(а) $\exists^{\omega}\Sigma_n^1=\Sigma_n^1$; (б) $\forall^{\omega}\Pi_n^1=\Pi_n^1$;

(в) если $n\geqslant 1$, то $\forall^{\omega}\Sigma_n^1=\Sigma_n^1$ и $\exists^{\omega}\Pi_n^1=\Pi_n^1$.

Содержание правил 6 и 7 можно выразить еще и так. Каждый из классов Σ_n^1 замкнут относительно $\exists^{\mathcal{N}}$ и $\exists^{\omega}$, а если $n\geqslant 1$, то и относительно $\forall^{\omega}$. Каждый класс Π_n^1 замкнут относительно $\forall^{\mathcal{N}}$ и $\forall^{\omega}$, а если $n\geqslant 1$, то и относительно $\exists^{\omega}$. Отсюда, кстати, следует, что классы Δ_n^1 при $n\geqslant 1$ замкнуты относительно $\exists^{\omega}$ и $\forall^{\omega}$.

Приведем еще одно (и последнее) правило, которое, в отличие от предыдущих, более естественно формулируется для множеств, а не для отношений.

8. Правило для счетных объединения и пересечения. Если $n \geqslant 1$, то классы Σ_n^1, Π_n^1, Δ_n^1 замкнуты относительно операций счетного объединения и счетного пересечения (применяемых, естественно, к семействам множеств, расположенных в каком-либо одном из точечных пространств). Дополнительно, класс Σ_0^1 замкнут относительно счетного объединения, а класс Π_0^1 — относительно счетного пересечения.

Мы не будем останавливаться на обосновании этих правил (соответствующие доказательства можно найти в [3, гл. 8, §§ 1—3]; [4, п. 9]; [12, две последние главы]) и перейдем к изложению основных понятий, связанных с детерминированностью. «Работу» правил 1—8 можно будет увидеть в выкладках следующих параграфов.

§ 2. Введение в теорию детерминированности

Предположим, что зафиксировано некоторое множество A «бэровской плоскости» $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ — игровое множество, кратко — ИМ. Этим множеством задается игра $G(A)$ двух лиц, обозначаемых, как правило, I и II. Игра проходит следующим образом:

игрок I пишет натуральное число a_0;
игрок II, зная «ход» a_0, пишет свое натуральное число b_0;
опять игрок I, зная b_0, пишет натуральное a_1;
игрок II, зная a_1, пишет натуральное b_1;

и так далее до бесконечности. В конечном счете получается пара точек

$$\alpha = \langle a_i : i \in \omega \rangle = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$$

$$\beta = \langle b_i : i \in \omega \rangle = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$$

пространства $\mathcal{N}$, называемая партией. Если оказалось, что $\langle \alpha, \beta \rangle \in A$, то партия считается выигранной игроком I, а в противном случае определяется выигрыш игрока II.

Игроки могут делать свои ходы, руководствуясь заранее выбранными стратегиями. Стратегией в играх рассматриваемого вида может служить любая функция, заданная на множестве $FC = \omega^{<\omega}$ всех конечных кортежей натуральных чисел (с пустым кортежем Λ) и принимающая значения в множестве натуральных чисел. Если игрок I придерживается стратегии $\sigma: FC \to \omega$, то каждый свой ход a_i он должен делать в соответствии с равенством $a_i = \sigma(b_0, \ldots, b_{i-1})$ или, короче, $a_i = \sigma(\beta \restriction i)$, где $\beta \restriction i = \langle b_0, \ldots, b_{i-1} \rangle$ — кортеж первых i ходов игрока II. В частности, начальный ход a_0 дается равенством $a_0 = \sigma(\Lambda)$, далее $a_1 = \sigma(b_0)$, $a_1 = \sigma(b_0, b_1)$ и т. д. Таким образом, стратегия σ полностью определяет последовательность $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle$ ходов игрока I по последовательности $\beta = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle$

ходов игрока II. Определенную таким образом последовательность α принято обозначать через $\sigma * \beta$.

Совершенно аналогично, если игрок II придерживается стратегии τ, то каждый свой ход b_i он делает согласно равенству

$$b_i = \tau(a_0, \ldots, a_i) = \tau(\alpha \restriction i+1),$$

где $\alpha \restriction i+1 = \langle a_0, \ldots, a_i \rangle$ — кортеж первых $(i+1)$ ходов игрока I. Даваемую этими равенствами последовательность β обозначают через $\alpha * \tau$.

Говорят, что стратегия σ является выигрывающей стратегией (кратко: ВС) для игрока I в игре $G(A)$ (= в игре с ИМ A), если $\langle \sigma * \beta, \beta \rangle \in A$, какова бы ни была точка $\beta \in \mathcal{N}$. Другими словами, выигрывающая стратегия обеспечивает выигрыш, как бы ни играл противник.

Аналогично, τ является ВС для игрока II, когда $\langle \alpha, \alpha * \tau \rangle \in A$ для любой точки $\alpha \in \mathcal{N}$.

Множество A и игра $G(A)$ называются детерминированными, если один из игроков (оба одновременно очевидно не могут) имеет ВС в игре $G(A)$.

Рассматриваются различные принципы, или гипотезы детерминированности, утверждающие детерминированность множеств того или иного класса. Наибольший интерес с точки зрения приложений к дескриптивной теории представляют:

аксиома детерминированности AD, постулирующая детерминированность каждого множества $A \subseteq \mathcal{N}^2$, и

аксиома проективной детерминированности PD, постулирующая детерминированность всех проективных множеств $A \subseteq \mathcal{N}^2$

Вообще, для каждого (например, проективного) класса Γ рассматривается принцип Γ-Det, утверждающий детерминированность всех множеств $A \subseteq \mathcal{N}^2$ класса Γ.

Несколько слов о взаимоотношениях гипотез детерминированности с аксиомами системы Цермело — Френкеля, принятой большинством специалистов в качестве основы теоретико-множественных конструкций. Система эта обозначается аббревиатурой ZFC или ZF в зависимости от того, включена или нет аксиома выбора AC в число аксиом (таким образом, $ZFC = ZF + AC$). Аксиома AD противоречит аксиоме выбора (хотя бы потому, что влечет измеримость по Лебегу каждого множества действительной прямой, см. ниже). Пока что остается открытым вопрос о непротиворечивости систем $ZF + AD$ и $ZFC + PD$. Единственным аргументом в пользу непротиворечивости можно назвать лишь фактическое отсутствие противоречий в тех очень богатых картинах следствий, которые уже получены для обеих этих теорий.

Несовместимость с аксиомой выбора заставляет, конечно, несколько скептически относиться к возможностям аксиомы AD. К счастью, аксиома AD совместна с более слабым, чем AC (но достаточным для доказательства таких «позитивных» следствий

AC, как теорема о счетности счетной суммы счетных множеств или счетная аддитивность меры Лебега), принципом зависимого выбора DC[1]. Именно, Кехрис показал в [33], что если система $ZF+AD$ непротиворечива, то она остается таковой после добавления DC. В то же время ни принцип DC [70], ни аксиома выбора AC_ω для счетных семейств непустых множеств [33] не являются теоремами $ZF+AD$.

Однако нетрудно доказать, что AD (плюс аксиомы ZF) влечет аксиому выбора для счетных семейств множеств бэровского пространства (а тогда и любого другого из пространств вида $\omega^l \times \mathcal{N}^m$, а также любого евклидова пространства R^m). Приведем это простое рассуждение. Нужно построить, предполагая AD, функцию выбора для семейства непустых множеств $X_0, X_1, X_2, \ldots, \subseteq \mathcal{N}$. Рассмотрим для этого игру $G(A)$, определяемую множеством $A = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \beta \notin A_{\alpha(0)}\}$. Игрок I не может иметь выигрывающей стратегии в этой игре, поскольку какой бы начальный ход a_0 он ни сделал, игрок II обеспечит себе выигрыш, делая свои ходы b_i так, чтобы их последовательность совпала бы с выбранной им заранее (после хода a_0!) точкой $\beta \in X_{a_0}$. Следовательно, игрок II имеет ВС τ в игре $G(A)$. Эта стратегия приносит искомую функцию выбора. Действительно, пусть $k \in \omega$. Рассмотрим партию в игре $G(A)$, где игрок I делает все свои ходы равными числу k, а игрок II отвечает по стратегии τ. Последовательность $\beta = \langle b_i : i \in \omega \rangle$ ходов II в этой партии (вполне определенную, коль скоро фиксирована τ и задано k) мы обозначим через $f(k)$. Тогда $f(k) \in X_k$ при любом k в силу определения A и выбора τ, т. е. f является функцией выбора для семейства множеств X_k.

Если перейти теперь от непротиворечивости к вопросу об истинности (= доказуемости в ZF или ZFC) гипотез детерминированности, то начать можно будет со следующей теоремы, дающей простой, но достаточный для многих приложений результат.

Теорема Гейла — Стьюарта [24]. Каждое открытое множество $A \subseteq \mathcal{N}^2$ детерминировано, т. е. выполняется Σ_0^1-Det.

Доказательство этой теоремы включает некоторые моменты, достаточно общие для работы с детерминированностью — в частности, понятие игры, начинающейся с определенной позиции.

Пусть в добавление к множеству $A \subseteq \mathcal{N}^2$ заданы два кортежа $u, v \in FC$. Игра $G(u; v; A)$ — или игра $G(A)$ с позиции $u; v$ — отличается от игры $G(A)$ только тем, что игрок I обязан сделать свои первые i ходов, где i — длина кортежа u, так, чтобы

---

[1] Принцип DC постулирует следующее. Если бинарное отношение E на множестве X таково, что $\forall x \in X\ \exists y \in X\ (xEy)$, то существует последовательность $x_0, x_1, x_2, \ldots$ элементов x_l множества X такая, что $x_l E x_{l+1}$ для всех l.

они как раз составили u, а игрок II должен делать первые j (j=длина v) ходов так, чтобы эти ходы составили кортеж v.

Например, если заданы кортежи $u=\langle a_0, a_1\rangle$ и $v=\langle b_0\rangle$, то игра $G(a_0, a_1; b_0; A)$ (= игра $G(A)$ с позиции $a_0, a_1; b_0$) предусматривает, что игрок I делает начальный ход a_0, затем игрок II делает ход b_0, снова игрок I делает ход a_1 — в этих трех ходах игроки не имеют выбора, будучи обязанными брать ими соответствующие члены кортежей u и v, — а все последующие ходы $b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$ могут уже быть выбранными произвольно. Результат же такой игры определяется как и в игре $G(A)$, т. е. с учетом первых ходов, диктуемых кортежами u и v.

Понятие стратегии и выигрывающей стратегии в играх, начинающихся с определенной позиции, поясняется на примере той же игры $G(a_0, a_1; b_0; A)$. Стратегией для игрока I в этой игре будет любая функция $\sigma: FC\to\omega$, удовлетворяющая условиям: $\sigma(\Lambda)=a_0$ и $\sigma(b_0)=a_1$. Такая стратегия будет выигрывающей для игрока I, если $\langle\sigma\divideontimes\beta, \beta\rangle\in A$, какова бы ни была точка $\beta\in\mathcal{N}$, удовлетворяющая $\beta(0)=b_0$ (в общем случае — удовлетворяющая $v\subseteq\beta$). Точно так же вводятся понятия стратегии и ВС для игрока II: в рассматриваемой игре нужно потребовать, чтобы $\tau(a_0)=b_0$, и в этом случае τ будет ВС для игрока II, если $\langle\alpha, \alpha\divideontimes\tau\rangle\notin A$ для любой точки $\alpha\mathcal{N}$ такой, что $\alpha(0)=a_0$ и $\alpha(1)=$ $=a_1$ ($u\subset\alpha$ в общем случае).

Наконец, говорят, что позиция u; v является выигрывающей для игрока I (или для игрока II) в игре $G(A)$, когда игрок I (соответственно, игрок II) имеет ВС в игре $G(u; v; A)$.

Изложив эти определения, обратимся непосредственно к доказательству теоремы Гейла—Стьюарта. Рассмотрим произвольное открытое множество $A\subseteq\mathcal{N}^2$. Допуская, что игрок I не имеет ВС в игре $G(A)$, укажем, как должен действовать игрок II, чтобы выиграть в этой игре.

Пусть игрок I делает некоторый начальный ход a_0. По предположению, начальная позиция Λ; Λ не является выигрывающей для I; следовательно, и позиция a_0; Λ не будет для этого игрока выигрывающей. Поэтому игрок II может представить такой свой ход b_0, что позиция a_0; b_0 снова не будет выигрывающей для I. Один из таких ходов b_0 (для определенности, пусть наименьший) и возьмет игрок II своим ответом на ход a_0 противника.

Пусть, далее, игрок I производит очередной ход a_1. Аналогичное рассуждение показывает, что игрок II имеет ход b_1 такой, что позиция a_0, a_1; b_0, b_1 не является выигрывающей для противника. И так далее.

Из этого описания действий игрока II не составляет труда извлечь стратегию τ, обладающую тем свойством, что для любой последовательности $\alpha\in\mathcal{N}$ ходов игрока I, если определить $\beta=\alpha*\tau$ (последовательность ответов II по стратегии τ), то, каково бы ни было m, позиция $\alpha\restriction m$; $\beta\restriction m$ не является выигрывающей для I в игре $G(A)$. В частности, ко всякому m найдется пара $\langle \alpha_m, \beta_m \rangle \notin A$ такая, что $\alpha \restriction m = \alpha_m \restriction m$ и $\beta \restriction m = \beta_m \restriction m$ (иначе позиция $\alpha \restriction m$; $\beta \restriction m$ уже была бы выиграна игроком I независимо от всех последующих ходов обоих игроков). Другими словами, имеется сходящаяся к $\langle \alpha, \beta \rangle$ последовательность точек $\langle \alpha_m, \beta_m \rangle$ замкнутого дополнения множества A. Следовательно, $\langle \alpha, \beta \rangle \notin A$ и это всякий раз, когда $\beta = \alpha * \tau$. Так что найденная стратегия τ в самом деле будет ВС для игрока II в игре $G(A)$, что и требовалось. □

Следствие. Все замкнутые множества детерминированы, т. е. выполняется Π_0^1-Det.

Доказательство. Для каждой точки $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle \in \mathcal{N}$ положим $\alpha^- = \langle a_1, a_2, \ldots \rangle$. Рассмотрим произвольное замкнутое $A \subseteq \mathcal{N}^2$. Ввиду непрерывности отображения $\alpha \mapsto \alpha^-$ множество $B = \{\langle \alpha, \beta \rangle : \langle \beta, \alpha^- \rangle \notin A\}$ открыто, а потому детерминировано. Если теперь игрок I имеет ВС в игре $G(B)$, то стратегия $\tau = \sigma$ будет ВС для II в игре $G(A)$. Если же игрок II имеет ВС τ в игре $G(B)$, то ВС σ для игрока I в игре $G(A)$ можно задать посредством равенства $\sigma(u) = \tau(u^-)$ для всех $u \in FC$ (кортеж u^- получается удалением из u самого левого члена — ср. с определением α^-). □

В дальнейшем результат теоремы Гейла — Стьюарта несколько раз усиливался (см. [34, § 3]), пока Мартин не доказал в [53] следующую теорему:

Теорема борелевской детерминированности. Все борелевские множества детерминированы, т. е. выполняется Δ_1^1-Det.

И этот результат уже представляется максимально возможным в ZFC (фактически, доказательство использует только аксиомы $ZF + DC$). Дело в том, что гипотеза Σ_1^1-Det (и эквивалентная ей Π_1^1-Det) уже невыводима (см. следующий параграф) в ZFC, хотя, как показал Мартин [52], ее можно вывести из аксиомы измеримого кардинала. Исследования Харрингтона [26], Стила [72] (см. также [34]) показали, что гипотеза Σ_1^1-Det эквивалентна утверждению о том, что любые два неборелевских Σ_1^1-множества борелевски изоморфны, а также эквивалентна «гипотезе диезов», интенсивно изучавшейся в связи с измеримыми и рамсеевскими кардиналами (см. [34]; [58, гл. 8; [69]).

Теперь краткая историческая справка. Впервые бесконечные игры некоторого специального вида, связанные с доказательством свойства Бэра, появляются в исследованиях Банаха и Мазура конца 20-х — начала 30-х годов. Общая концепция игр рассматриваемого вида была введена Гейлом и Стьюартом в [24]. Однако начало серьезных исследований в связи с детерминированностью следует связать с заметкой Мычельского и

Штейнгауза [60] и последовавшими работами [59], [61], [22], где было показано, что AD влечет измеримость по Лебегу, свойство Бэра и существование совершенного подмножества при условии несчетности — для всех множеств действительной прямой.

Следующий ключевой момент в работах по детерминированности происходит уже во второй половине 60-х годов. В заметке Блэквелла [16] было показано, как, используя теорему Гейла — Стьюарта, можно доказать некоторые классические теоремы о множествах первого проективного уровня, в частности, теорему отделимости для класса Σ_1^1. Немедленно Московакис (см. [15]) и Мартин [51] обнаружили, что, приняв аксиому проективной детерминированности PD, можно выяснить законы отделимости и редукции на всех уровнях проективной иерархии (классическими средствами это можно сделать только для нулевого, первого и второго уровней). Так был открыт продолжающийся до настоящего времени период интенсивного развития приложений детерминированности к дескриптивной теории множеств.

В ходе этих исследований претерпел определенные изменения и взгляд на природу аксиом AD и PD. Если на этапе ранних работ по детерминированности (первая половина 60-х годов) специалисты склонны были рассматривать эти аксиомы просто как интересные математические гипотезы с необычными следствиями (примерно в том плане, как топологи относятся к аксиоме Мартина), то уже в 70-е годы на AD и PD стали смотреть как на постулаты, претендующие на истинность в «мире реальных множеств», либо, по крайней мере, в некоторых естественных частях этого «мира». Для такой точки зрения приводятся более или менее убедительные основания (см. об этом в [5, гл. 2 и заключение], [3, гл. 8, § 6], [23], [58, части 7, 8 и заключение]). Этот подход отразился и в терминологии: Московакис ввел в [55] концепцию «игрового универсума», понимая под этим мир множеств, в котором выполняется определенная гипотеза детерминированности, предпочитая говорить об истинности в этом универсуме, а не о выводимости из соответствующей гипотезы.

Ниже мы будем говорить об истинности в полностью детерминированном универсуме, в проективно детерминированном универсуме, или, вообще, в Г-детерминированном универсуме, понимая под этим, строго говоря, выводимость из AD, PD или гипотезы Г-Det соответственно. («Обычный» математический универсум множеств будет Σ_0^1-детерминированным по теореме Гейла — Стьюарта, и даже Δ_1^1-детерминированным по теореме Мартина.) В качестве же базисной теории множеств (к которой добавляется та или иная гипотеза детерминированности) будет использована теория $ZF+DC$; применение «полной» аксиомы выбора AC мы будем специально оговаривать (фактически, это касается только одного утверждения из § 7).

§ 3. Свойства регулярности точечных множеств в детерминированных универсумах

Под общим названием: свойства регулярности обычно понимаются следующие три свойства точечных множеств:

1) Измеримость. В евклидовых пространствах это свойство можно ассоциировать с мерой Лебега. Пространства вида $\omega^l \times \mathcal{N}^m$ не имеют какой-либо одной меры, чем-то выделяющейся среди других мер, и поэтому более естественным здесь будет говорить о свойстве абсолютной измеримости. Точечное множество X абсолютно измеримо, когда оно измеримо (т. е. имеет определенное — конечное или $+\infty$ — значение меры) в смысле любой заданной на рассматриваемом пространстве счетно аддитивной σ-конечной (т. е. все пространство есть счетная сумма множеств конечной меры) борелевской (это значит, что каждое измеримое множество совпадает с точностью до множества меры 0 с подходящим борелевским множеством) меры.

2. Свойство Бэра. Множество X имеет это свойство, когда оно совпадает с точностью до множества первой категории с подходящим открытым множеством. Другими словами, требуется, чтобы существовало открытое в рассматриваемом пространстве множество U такое, что симметрическая разность $X \triangle U = (X - U) \cup (U - X)$ есть множество первой категории. В свою очередь, множествами первой категории называются счетные объединения нигде не плотных в данном пространстве множеств.

3) Свойство совершенного ядра. Это свойство заключается в том, что данное множество должно либо быть не более чем счетным, либо включать совершенное подмножество. Совершенные множества пространств $\omega^l \times \mathcal{N}^m$ при $m \geqslant 1$ имеют, как известно, мощность континуума $\mathfrak{c}$, так что точечное множество со свойством совершенного ядра имеет мощность либо $\leqslant \aleph_0$, либо ровно $\mathfrak{c}$ — и в обоих случаях не может служить контрпримером к континуум-гипотезе.

Мы уже упоминали в предыдущем параграфе о достижениях первых работ по детерминированности: AD влечет абсолютную измеримость, свойство Бэра и свойство совершенного ядра для всех точечных множеств. Элементарный анализ доказательств этого положения показал, что проективной детерминированности достаточно для доказательства всех трех свойств регулярности для каждого проективного множества и, более точно, в Σ_n^1-детерминированном универсуме все Σ_n^1-множества обладают этими свойствами. Затем был получен еще более сильный результат:

Теорема 1 (Σ_n^1-Det)[1]. Все множества класса Σ_{n+1}^1 абсолютно измеримы, обладают свойством Бэра и свойством совершенного ядра.

[1] Запись, скажем, Σ_n^1-Det после слова «теорема» означает, что данная теорема доказывается средствами $ZF + DC + (\Sigma_n^1\text{-Det})$.

(В книге [58], где, кажется, впервые приведено доказательство этой теоремы, она отнесена к неопубликованным работам Мартина и Кехриса начала 70-х годов. Сами эти авторы указывают в [34], что главный технический прием был изобретен Соловеем.)

Отметим один специфический момент в сформулированной теореме (и присущий, как будет показано ниже, многим другим теоремам такого же типа). При $n=0$ гипотеза Σ_0^1 - Det является теоремой в ZF — теорема Гейла — Стьюарта из предыдущего параграфа. Следовательно, и заключение об измеримости, свойстве Бэра и свойстве совершенного ядра у всех Σ_1^1-множеств является обычным математическим фактом, не опирающимся ни на какие гипотезы детерминированности. Впрочем, результат этот, конечно, не нов: еще в первых работах по дескриптивной теории (П. С. Александров, М. Я. Суслин — см. [13, § 3], Н. Н. Лузин [45]) было показано, что каждое Σ_1^1-множество (т. е. A-множество в принятой тогда терминологии) имеет все три свойства регулярности. Действительно заслуживающим внимания явилось то, что теорема 1 очень естественно обобщает упомянутые классические достижения, обращаясь в последние при $n=0$.

Мы приведем здесь доказательство только того фрагмента теоремы 1, который касается свойства совершенного ядра — он особенно важен в приложениях к теории однозначных и счетнозначных множеств (см. § 6). А для свойства Бэра в конце этого параграфа будет дан эскиз доказательства даже еще более сильного результата, чем содержащийся в теореме 1.

Итак, докажем, что в Σ_n^1-детерминированном универсуме каждое точечное Σ_{n+1}^1-множество $X\subseteq\mathcal{N}$ имеет свойство совершенного ядра. План доказательства сводится к следующему: для специально построенной игры G будет показано, что если игрок I имеет ВС, то множество X включает совершенное подмножество, а если ВС есть у игрока II, то X не более чем счетно. А детерминированность игры мы выведем из гипотезы Σ_n^1 - Det.

Не ограничивая общности, можно предполагать, что $X\subseteq\mathcal{D}$, где

$$\mathcal{D}=2^{\omega}=\{\delta\in\mathcal{N}:\forall k\,(\delta(k)=0 \text{ или } 1)\}$$

— канторов дисконтинуум. (Действительно, нетрудно устроить гомеоморфизм между $\mathcal{N}$ и подходящим ко-счетным в $\mathcal{D}$ множеством, позволяющий провести редукцию к указанному частному случаю.) Найдется Π_n^1-множество $Q\subseteq\mathcal{D}\times\mathcal{N}$ такое, что

$$X=\pi Q=\{\delta:\exists\gamma Q(\delta,\gamma)\}.$$

Зафиксируем перечисление $\langle l[b], v[b]\rangle$, $b\in\omega$, всех пар $\langle l, v\rangle\in\omega\times FC_{01}$, где FC_{01} — множество всех конечных кортежей нулей и единиц (включающее и пустой кортеж Λ). Каждой паре точек $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle \in \mathcal{N}$ и $\beta = \langle b_0, b_1, b_2, \dots \rangle \in \mathcal{N}$ сопоставим точки

$$D(\alpha, \beta) = v[b_0]^\frown \langle a_1^* \rangle {}^\frown v[b_1]^\frown \langle a_2^* \rangle {}^\frown \dots \in \mathcal{D},$$

где $a_i^* = \min\{1, a_i\}$, $\langle a_i^* \rangle$ есть кортеж с единственным членом a_i^*, а знаком $^\frown$ обозначена операция соединения кортежей, и

$$H(\beta) = \langle l[b_0], l[b_1], l[b_2], \dots \rangle \in \mathcal{N}.$$

Функции D и H, конечно, непрерывны, откуда с помощью правила 2 из § 1 нетрудно вывести, что множество

$$A = \{ \langle \alpha, \beta \rangle \in \mathcal{N}^2 \colon \langle D(\alpha, \beta), H(\beta) \rangle \notin Q\}$$

принадлежит Σ_n^1, так что соответствующая игра $G(A)$ детерминирована.

Небольшое пояснение. По существу, игра $G(A)$ сводится к тому, что игрок I делает ходы $a_i^* = 0$ или 1; ходы же игрока II обязаны быть парами $\langle l_i, v_i \rangle$, где $l_i \in \omega$, а v_i — кортеж нулей и единиц. Из чисел l_i составляется точка $\gamma = \langle l_0, l_1, \dots \rangle \in \in \mathcal{N}$, а из кортежей v_i и чисел a_i^* — точка $\delta = v_0^\frown \langle a_1^* \rangle {}^\frown v_1^\frown {}^\frown \langle a_2^* \rangle {}^\frown \dots \in \mathcal{D}$. После этого, игрок I выигрывает в том и только в том случае, когда $\langle \delta, \gamma \rangle \notin Q$. Это действительное содержание игры $G(A)$ полезно иметь ввиду при разборе следующих выкладок.

Отметим также, что начальный ход a_0 игрока I совершенно не влияет на исход партии; по существу, I «пропускает» ход, предоставляя право фактически начать партию противнику. В работах по дескриптивной теории в детерминированных универсумах доказательства теорем о совершенном ядре обычно строятся с инверсией функций игроков, т. е. ходами игрока I являются пары $\langle l, v \rangle \in \omega \times FC_{01}$, а игрок II отвечает нулями и единицами, и тогда «безразличных» ходов уже нет. Изменение, предпринятое в нашем изложении, вызвано подготовкой к применению изложенной в ее доказательстве конструкции для доказательства теоремы о расщеплении счетнозначных множеств в § 6: нужно, чтобы счетность X соответствовала наличию ВС у игрока I.

Благодаря детерминированности игры $G(A)$, один из игроков имеет выигрывающую стратегию.

С л у ч а й 1: игрок I имеет ВС σ в игре $G(A)$. Убедимся, что тогда X не более чем счетно. Можно предполагать, что стратегия σ имеет своими значениями только числа 0 и 1 (иначе просто заменим каждое значение σ, большее, чем 1, на единицу).

Дадим следующие определения. Конечную последовательность $t = \langle a_0, b_0, \dots, a_{k-1}, b_{k-1}, a_k \rangle$ (нечетной длины) назовем σ-согласованной (кратко: σ-СП), если $a_i = \sigma(b_0, \dots, b_{i-1})$ для всех $i \leqslant k$. Далее, пусть $\delta \in \mathcal{D}$. Пару, состоящую из числа $l \in \omega$ и σ-СП $t = \langle a_0, b_0, \dots, a_k \rangle$, условимся называть δ-максимальной, когда, во-первых, кортеж

$$w(t)=v[b_0]^\frown\langle a_1\rangle^\frown v[b_1]^\frown\langle a_2\rangle^\frown\ldots^\frown v[b_{k-1}]^\frown\langle a_k\rangle$$

является началом δ (т. е. $w(t)\subset\delta$), и во-вторых, нет чисел $b_k\in\omega$ и $a_{k+1}=0$ или 1 таких, что $l=l[b_k]$, $a_{k+1}=\sigma(b_0,\ldots,b_{k-1},b_k)$ и $w(t)^\frown v[b_k]^\frown\langle a_{k+1}\rangle\subset\delta$.

Мы утверждаем, что ко всякой точке $\delta\in X$ имеется δ-максимальная пара. Действительно, раз $\delta\in X$, то $\langle\delta,\gamma\rangle\in Q$ для некоторой точки $\gamma=\langle l_0,l_1,l_2,\ldots\rangle\in\mathcal{N}$. Положим $a_0=\sigma(\Lambda)$. Тогда $t_0=\langle a_0\rangle$ будет σ-СП, и при этом $w(t_0)=\Lambda\subset\delta$. Если пара $\langle l_0,t_0\rangle$ не является δ-максимальной, то t_0 можно продолжить, получая σ-СП $t_1=\langle a_0,b_0,a_1\rangle$ такую, что $w(t_1)\subset\delta$ и $l[b_0]=l_0$. Если снова пара $\langle l_1,t_1\rangle$ не будет δ-максимальной, то существует еще более длинная σ-СП $t_2=\langle a_0,b_0,a_1,b_1,a_2\rangle$ такая, что $w(t_2)\subset\delta$ и $l[b_1]=l_1$. И так далее.

Но этот процесс не может продолжаться до бесконечности, ибо мы получили бы партию $\alpha=\langle a_0,a_1,\ldots\rangle$, $\beta=\langle b_0,b_1,\ldots\rangle$ в игре $G(A)$, соответствующую стратегии σ ($\alpha=\sigma*\beta$), и такую, что $\langle D(\alpha,\beta),H(\beta)\rangle=\langle\delta,\gamma\rangle\in Q$, чего не может быть, так как σ — ВС для игрока I. Итак, построение обрывается, и на соответствующем шаге k мы приходим к δ-максимальной паре $\langle l,t\rangle$.

Так что, в самом деле, для любой точки $\delta\in X$ существует δ-максимальная пара $\langle l,t\rangle$. Убедимся, что в такой ситуации δ однозначно определяется по l и t посредством σ. Этого будет достаточно для доказательства счетности X, поскольку совокупность всех пар $\langle l,t\rangle$ рассматриваемого вида счетна.

Пусть $t=\langle a_0,b_0,\ldots,a_{k-1},b_{k-1},a_k\rangle$. Раз $w(t)\subset\delta$, то найдется m такое, что $w(t)=\delta\restriction m$. Этим равенством уже определены все значения $\delta(j)$ с $j<m$. Покажем, как индукцией по i вычислить все значения $\delta(m+i)$.

Положим $v^i=\langle\delta(m),\ldots,\delta(m+i-1)\rangle$ для каждого i (в частности, $v^0=\Lambda$). Ко всякому i существует единственное натуральное b^i, удовлетворяющее $v[b^i]=v^i$ и $l[b^i]=l$. Положим также $a^i=\sigma(b_0,\ldots,b_{k-1},b^i)$. Тогда $t^i=t^\frown\langle b^i,a^i\rangle$ будет σ-СП, причем $l[b^i]=l$. Следовательно, ввиду δ-максимальности пары $\langle l,t\rangle$, получается $w(t^i)\not\subset\delta$. Однако $w(t^i)=w(t)^\frown v^{i\frown}\langle a^i\rangle$, и ясно, что $w(t)^\frown v^i\subset\delta$. Значит, $a^i\neq\delta(m+i)$.

Вместе с тем, $\delta(m+i)=0$ или 1, так как $\delta\in X\subseteq\mathcal{D}$, и $a^i=0$ или 1 в силу сделанного предположения о значениях стратегии σ. Значит, при любом $i\in\omega$ выполняется равенство

$$\delta(m+i)=1-\sigma(b_0,b_1,\ldots,b_{k-1},b^i),\qquad(*)$$

которое и позволяет последовательно найти все числа $\delta(m+i)$.

Случай 2: игрок II имеет ВС τ в игре $G(A)$. Проверим, что в этом случае наше множество X включает совершенное подмножество. Функция $F(\alpha)=D(\alpha,\alpha*\tau)$ непрерывна, а образ $C=\{F(\alpha):\alpha\in\mathcal{D}\}$ дисконтинуума $\mathcal{D}$ включен в X по выбору τ и в соответствии с определением A. Остается проверить взаимную однозначность F на D, тогда можно будет заключить, что C — искомое совершенное подмножество множества X.

Рассмотрим пару различных точек $\alpha=\langle a_0, a_1, \ldots\rangle$ и $\alpha'=\langle a_0', a_1', \ldots\rangle$ дисконтинуума и через m обозначим наименьший индекс такой, что $\alpha_m'\neq\alpha_m$. Положим

$$b_l=\tau(a_0, \ldots, a_l) \quad \text{и} \quad b_l'=\tau(a_0', \ldots, a_l')$$

для всех i. Тогда

$$F(\alpha)=v[b_0]^\frown\langle a_1\rangle^\frown v[b_1]^\frown\langle a_2\rangle^\frown\ldots,$$

$$F(\alpha')=v[b_0']^\frown\langle a_1'\rangle^\frown v[b_1']^\frown\langle a_2'\rangle^\frown\ldots.$$

По выбору m мы получим $a_l'=a_l$, а тогда и $b_l'=b_l$ для всех $l<m$, но $a_m'\neq a_m$. Значит, $F(\alpha)\neq F(\alpha')$, что и требовалось. □

Обратимся теперь к свойству Бэра. Результат, доказательство которого сейчас будет изложено, связан с «гейм-оператором» Московакиса [56]. Пусть $\mathscr{X}$ — одно из точечных пространств, и $B\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{N}^2$. Каждая точка $x\in\mathscr{X}$ определяет сечение $B/x=\{\langle\alpha, \beta\rangle: B(x, \alpha, \beta)\}$ и тем самым задает игру $G(B/x)$, в которой один из игроков может иметь выигрывающую стратегию. Московакис предложил такое определение:

$$\Game B=\{x\in\mathscr{X}: \text{игрок I имеет ВС в игре } G(B/x)\}.$$

Действие оператора $\Game$ можно символически изобразить бесконечной строкой чередующихся кванторов по натуральным числам:

$$x\in\Game B\leftrightarrow\exists\alpha(0)\forall\beta(0)\exists\alpha(1)\forall\beta(1)\ldots B(x, \alpha, \beta);$$

но любая попытка придать точный смысл бесконечнокванторной приставке неизбежно возвращает к стратегиям.

Для каждого класса Γ точечных множеств, через $\Game\Gamma$ принято обозначать совокупность всех множеств вида $\Game B$, где B — множество из Γ, расположенное в одном из пространств вида $\mathscr{X}\times\mathscr{N}^2$. В проективно детерминированном универсуме оператор $\Game$ действует на проективные классы так, что выполняются равенства $\Game\Pi_n^1=\Sigma_{n+1}^1$, $\Game\Sigma_n^1=\Pi_{n+1}^1$ (собственно, требуется только гипотеза Σ_n^1-Det) — см. следующий параграф. Поэтому результат теоремы 1 для свойства Бэра вытекает из следующей теоремы Кехриса [31]:

Теорема 2. Пусть Γ — проективный класс, и выполняется Γ-Det. Тогда каждое множество из $\Game\Gamma$ имеет свойство Бэра.

Доказательство мы проведем только для множеств пространства $\mathscr{N}$ и ограничимся лишь изложением принципиальных моментов. Достаточно показать, что, каково бы ни было $X\subseteq\mathscr{N}$ класса $\Game\Gamma$, либо X имеет первую категорию, либо найдется бэровский интервал $\mathscr{N}_w=\{\alpha\in\mathscr{N}: w\subset\alpha\}$ (где $w\in FC$) в $\mathscr{N}$ такой, что разность $\mathscr{N}_w-X$ имеет первую категорию. Итак, пусть $X=\Game B\subseteq\mathscr{N}$, где множество $B\subseteq\mathscr{N}^3$ принадлежит Γ.

Рассмотрим игру G, в которой оба игрока, I и II, каждым своим ходом выбирают одну из пар вида $\langle a, u\rangle$, где $a\in\omega$, а $u\in FC$, $u\neq\Lambda$. Таким образом, игрок I (он, как обычно, начинает) делает ходы $\langle a_0, u_0 \rangle$, $\langle a_1, u_1 \rangle$, $\langle a_2, u_2 \rangle, \ldots$, а игрок II — ходы $\langle b_0, v_0 \rangle$, $\langle b_1, v_1 \rangle$, $\langle b_2, v_2 \rangle, \ldots$. Для определения результата составляются точки

$$\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle, \quad \beta = \langle b_0, b_1, b_2, \ldots \rangle,$$
$$\gamma = u_0\hat{}\, v_0\hat{}\, u_1\hat{}\, v_1\hat{}\, u_2\hat{}\, v_2\hat{}\, \ldots$$

пространства $\mathcal{N}$. Выигрыш I происходит в случае, когда $\langle\gamma, \alpha, \beta\rangle \in B$, а иначе выигрывает II.

Игра G детерминирована. Чтобы доказать это положение, нужно зафиксировать перечисление натуральными числами всех пар $\langle a, u\rangle$ указанного вида (так, как это сделано в доказательстве фрагмента теоремы 1). После такого преобразования мы придем к игре вида $G(A)$, где $A \subseteq \mathcal{N}^2$ — множество класса Г (оно получается из B непрерывной подстановкой).

Ввиду детерминированности, один из игроков имеет ВС в игре G.

Случай 1: игрок II имеет ВС τ в игре G. (Мы предпочли подробнее рассмотреть этот случай, представляющийся более показательным). Докажем, что X имеет первую категорию.

Для дальнейшего условимся, что буквами u и v (с индексами) обозначаются только кортежи из FC, не равные Λ. Стратегия τ определяется на кортежах вида

$$\langle\langle a_0, u_0 \rangle, \langle a_1, u_1 \rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, u_{k-1} \rangle\rangle \tag{1}$$

и принимает значения среди пар $\langle b, v \rangle$ $(b \in \omega)$. Последовательность вида

$$t = \langle a_0, u_0, b_0, v_0, \ldots, a_{k-1}, u_{k-1}, b_{k-1}, v_{k-1} \rangle \tag{2}$$

назовем τ-согласованной (кратко: τ-СП), если для любого $i < k$ выполняется $\langle b_i, v_i \rangle = \tau(\langle a_0, u_0 \rangle, \ldots, \langle a_i, u_i \rangle)$. Если при этом $a \in \omega$, $\gamma \in \mathcal{N}$, кортеж

$$w(t) = u_0\hat{}\, v_0\hat{}\, u_1\hat{}\, v_1\hat{}\, \ldots\hat{}\, u_{k-1}\hat{}\, v_{k-1}$$

удовлетворяет соотношению $w(t) \subset \gamma$, и нет ни одной τ-СП t' вида $t\hat{}\,\langle a_k, u_k, b_k, v_k \rangle$ такой, что $w(t') \subset \gamma$ и $a_k = a$, — то пару $\langle a, t \rangle$ будем называть γ-максимальной.

Утверждается, что ко всякой точке $\gamma \in X$ существует γ-максимальная пара $\langle a, t\rangle$. Идея та же, что и в доказательстве теоремы 1, только каждое число a_k (аналог l_k) вычисляется по формуле $a_k = \sigma(b_0, \ldots, b_{k-1})$, где σ — заранее фиксированная ВС для игрока I в игре $G(B/\gamma)$, существующая ввиду того, что $\gamma \in \mathfrak{D}B$. Детали мы опускаем.

Приняв утверждение о существовании максимальных пар, выведем первую категорию для X. Пусть $\gamma \in X$, а пара $\langle a, t\rangle$ является γ-максимальной; t есть τ-СП вида (2). Пусть $u \in FC$, $u \neq \Lambda$ произвольно, и

$$\langle b, v \rangle = \tau(\langle a_0, u_0 \rangle, \ldots, \langle a_{k-1}, u_{k-1} \rangle, \langle a, u \rangle).$$

Определяемый этим равенством кортеж $v \in FC - \{\Lambda\}$ обозначим через $v(u)$.

Последовательность $t' = t^\frown \langle a, u, b, v(u) \rangle$ будет τ-СП, и поэтому ввиду γ-максимальности пары $\langle a, t \rangle$ мы получаем: $w(t') = w(t)^\frown u^\frown v(u) \not\subset \gamma$. Таким образом, точка γ принадлежит множеству

$$W_t = \mathcal{N}_{w(t)} - \bigcup_{u \in FC, u \neq \Lambda} \mathcal{N}_{w(t)^\frown u^\frown v(u)}.$$

Ввиду произвольности точки $\gamma \in X$ в этом рассуждении можно заключить, что $X \subseteq \bigcup_t W_t$. Но каждое из множеств W_t нигде не плотно.

Случай 2: игрок I имеет ВС σ в игре G. Пусть $\langle a, u \rangle = \sigma(\Lambda)$ — начальный ход по стратегии σ. Выкладки, близкие к проведенным в случае 1, позволяют вывести, что $\mathcal{N}_u - X$ будет множеством первой категории. Дополнительный момент здесь состоит в том, что каждое сечение B/γ, $\gamma \in \mathcal{N}$, множества B принадлежит, как и само B, классу Γ (правило 3 § 1). Следовательно, в силу предположения Γ-Det, если $\gamma \in \mathcal{N} - X$, то игрок II имеет ВС в игре $G(B/\gamma)$. □

Заканчивая этот параграф, укажем на одно принципиальное следствие теоремы 1. П. С. Новиков показал [11], что средствами аксиом ZFC невозможно доказать выполнение хотя бы одного из рассматриваемых трех свойств регулярности для всех множеств класса Σ^1_2. Следовательно, и гипотеза $\Sigma_1{}^1$-Det невыводима в теории ZFC, ибо по теореме 1 она влечет все три свойства (собственно, достаточно ограничиться хотя бы одним из них, скажем свойством совершенного ядра) для всех множеств класса Σ^1_2.

§ 4. Теоремы отделимости и редукции в детерминированных универсумах. Нормированные классы

Понятие отделимости было введено в дескриптивную теорию множеств Н. Н. Лузиным. Рассмотрим пару непересекающихся множеств X, Y какого-нибудь точечного пространства. Насколько простым может быть множество Z, отделяющее X от Y (это означает, что $X \subseteq Z$, а $Y \cap Z = \varnothing$)? Показатель простоты существующих множеств-отделителей (среди которых находится и множество X) Н. Н. Лузин предложил в [48] считать своеобразной дескриптивной мерой «расстояния» между непересекающимися множествами X и Y.

Наибольший интерес в исследованиях отделимости в проективной иерархии вызывал вопрос о том, для каких проективных классов Γ имеет место следующее утверждение — принцип отделимости[1]:

---

[1] Точнее, первый принцип. Рассматривался еще и второй принцип отделимости, о котором см. в [2, 10, 14, 6].

Г-Sep: Ко всякой паре непересекающихся Г-множеств X, Y существует множество Z, принадлежащее, вместе со своим дополнением, классу Γ и отделяющее X от Y.

Отделимость играла очень важную роль в развитии дескриптивной теории в 20-е и 30-е годы. В современных работах чаще рассматривается следующий более удобный принцип редукции, восходящий к статье Куратовского [40]:

Г-Red: Ко всякой паре Г-множеств X, Y найдется пара непересекающихся Г-множеств $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$, объединение $X' \cup Y'$ которых совпадает с объединением $X \cup Y$.

(О такой паре X', Y' говорят, что она редуцирует данную пару X, Y).

Классы Δ_n^1, будучи замкнутыми относительно операции разности двух множеств, очевидно, выполняют как Sep, так и Red. Значительно сложнее обстоит дело с классами Σ_n^1 и Π_n^1. Исследования Н. Н. Лузина [48], П. С. Новикова [63], Куратовского [40] показали, что для классов Σ_0^1, Π_1^1, Σ_2^1 имеет место принцип редукции, но не принцип отделимости, а классы Π_0^1, Σ_1^1, Π_2^1, напротив, удовлетворяют Sep, но не Red. Высшие же проективные уровни совершенно не поддавались попыткам выяснить законы отделимости и редукции. Вместе с тем, проблема отделимости и редукции — наряду с проблемой свойств регулярности — традиционно ставилась на первое место среди классических задач дескриптивной теории. Именно поэтому следующая теорема, доказанная независимо Мартином [51] и Московакисом (см. [15]), произвела очень большое впечатление на специалистов:

Теорема отделимости и редукции (Σ_{2n}^1-Det). Классы

$$\Sigma_0^1,\ \Pi_1^1,\ \Sigma_2^1,\ \ldots,\Sigma_{2n}^1,\ \Pi_{2n+1}^1,\ \Sigma_{2n+2}^1$$

удовлетворяют принципу редукции, но не удовлетворяют принципу отделимости. Напротив, классы

$$\Pi_0^1,\ \Sigma_1^1,\ \Pi_2^1,\ \ldots,\Pi_{2n}^1,\ \Sigma_{2n+1}^1,\ \Pi_{2n+2}^1$$

удовлетворяют принципу отделимости, но не принципу редукции.

Таким образом, в проективно детерминированном (т. е. с аксиомой PD) универсуме имеется ряд «редуцируемых», но не «отделимых» классов

$$\Sigma_0^1,\ \Pi_1^1,\ \Sigma_2^1,\ \ldots,\Sigma_{2n}^1,\ \Pi_{2n+1}^1,\ \Sigma_{2n+2}^1,\ \ldots$$

и ряд «отделимых», но не «редуцируемых» классов

$$\Pi_0^1,\ \Sigma_1^1,\ \Pi_2^1,\ \ldots,\Pi_{2n}^1,\ \Sigma_{2n+1}^1,\ \Pi_{2n+2}^1,\ \ldots.$$

Гипотеза Σ_{2n}^1-Det оказывается достаточно сильной, чтобы продолжить оба ряда до уровня $2n+2$. И при $n=0$ мы приходим через посредство теоремы Гейла — Стьюарта § 2 к новому, основанному на играх, доказательству отмеченных выше классических результатов об отделимости и редукции (собственно, такая возможность использования игр была продемонстрирована Блэквеллом [16] еще до выхода работ [15] и [51]).

Некоторое время оставалась невыясненной причина «осцилляции» редукции об отделимости между Σ-классами и Π-классами. Этот вопрос удалось прояснить с помощью «гейм-оператора», о котором уже шла речь в § 3. Дело в том, что гипотеза Σ_m^1-Det влечет выполнение равенств

$$\mathfrak{D}\Pi_1^m=\Sigma_{m+1}^1,\quad \mathfrak{D}\Sigma_m^1=\Pi_{m+1}^1,$$

так что в проективно детерминированном универсуме «редуцированные» классы получаются из начального класса Σ_0^1, а «отделимые» — из Π_0^1, последовательным применением оператора $\mathfrak{D}$.

Приведем доказательство этих равенств. Можно ограничиться первым из них, ибо второе легко получается из первого в предположении Σ_m^1-Det тем же способом, который использован в выводе следствия из теоремы Гейла — Стьюарта в § 2.

Включение справа налево. Пусть $X\subseteq\mathscr{X}$, $X\in\Sigma_{m+1}^1$. Тогда $X=\{x:\exists\alpha Q(x,\alpha)\}$ для подходящего Π_m^1 — множества $Q\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{N}$. Теперь $X=\mathfrak{D}B$, где

$$B=\{\langle x,\alpha,\beta\rangle : Q(x,\alpha)\wedge\beta\in\mathscr{N}\}\in\Pi^1_m.$$

Включение слева направо. Пусть $X=\mathfrak{D}B$, где $B\subseteq\mathscr{X}\times\times\mathscr{N}^2$ — множество класса Π_m^1. Таким образом,

$$X=\{x:\exists\sigma:FC\to\omega\forall\beta B(\sigma*\beta,\beta)\}.$$

Чтобы представить квантор $\exists\sigma$ посредством квантора по $\mathscr{N}$, зафиксируем раз навсегда пересчет натуральными числами кортежей из FC. Пусть $[k]$ — кортеж, соответствующий числу $k\in\omega$; таким образом, $FC=\{[k]:k\in\omega\}$. Теперь каждая точка $\varepsilon\in\mathscr{N}$ задает стратегию $[\varepsilon]$: именно, $[\varepsilon]([k])=\varepsilon(k)$ для всех k.

Отображение $\langle\varepsilon,\beta\rangle\mapsto[\varepsilon]*\beta$, разумеется, непрерывно, и поэтому наше множество

$$X=\{\alpha:\exists\varepsilon\in\mathscr{N}\forall\beta B([\varepsilon]*\beta,\beta)\}$$

имеет класс Σ_{m+1}^1 (используются правила 2 и 6 из § 1).

Начиная изложение доказательства теоремы отделимости и редукции, отметим следующее: если для некоторого класса Γ выполняется принцип редукции, то для класса $\neg\Gamma$ дополнительных множеств будет выполняться принцип отделимости (просто перейдем к дополнениям). Изобретенное П. С. Новиковым [62] изящное рассуждение с использованием «дважды универсальных пар» показывает, что Sep и Red не могут выполняться для одного и того же класса $\Gamma=\Sigma_m^1$ или Π_m^1 (см. доказательство теоремы 3.2 в книге [3, с. 249]). Так что достаточно проверить только лишь принцип редукции для классов Σ_0^1, $\Pi_1^1,\ldots,\Pi_{2n+1}^1$, Σ_{2n+2}^1 в Σ_{2n}^1-детерминированном универсуме.

Ключевым моментом классических доказательств теорем отделимости и редукции было использование (в той или иной форме) множества всех не более чем счетных ординалов. Связь первого и второго уровней проективной иерархии с ординалами имела наиболее естественное выражение в открытых П. С. Новиковым принципах сравнения индексов (о них см. в [10], [63], [6, § 3]). В современных исследованиях используются произошедшие от этих принципов два родственных понятия — норма и полное предупорядочение.

Нормой на множестве X называется всякая функция φ, отображающая X в ординалы. Каждой норме $\varphi: X \to \mathrm{Ord}$, заданной на точечном множестве $X \subseteq \mathscr{X}$, сопоставляются бинарные отношения $\leqslant_\varphi$ и $<_\varphi$ (на X), $\leqslant^*_\varphi$ и $<^*_\varphi$ (на $\mathscr{X}$):

$$x \leqslant_\varphi y \leftrightarrow \varphi(x) \leqslant \varphi(y), \quad x <_\varphi y \leftrightarrow \varphi(x) < \varphi(y);$$

$$x \leqslant^*_\varphi y \leftrightarrow x \in X \wedge (y \in X \to \varphi(x) \leqslant \varphi(y));$$

$$x <^*_\varphi y \leftrightarrow x \in X \wedge (y \in X \to \varphi(x) < \varphi(y)).$$

Если отношения $\leqslant^*_\varphi$ и $<^*_\varphi$ (они более важны, чем $\leqslant_\varphi$ и $<_\varphi$) принадлежат (как множества пар) данному классу Γ, то φ называется Γ-нормой.

Полным предупорядочением множества X называется всякое нестрогое отношение частичного порядка $\leqslant$ на X, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) если $x, y \in X$, то $x \leqslant y$ или $y \leqslant x$ (но не предполагается, что из $x \leqslant y \wedge y \leqslant x$ следует $x = y$), и

2) нет бесконечных цепочек $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots$ элементов x_i множества X ($x < y$ означает, что $x \leqslant y$, но не выполняется $y \leqslant x$).

Например, если φ — норма на X, то отношение $\leqslant_\varphi$ будет полным предупорядочением X. Обратно, легко видеть, что ко всякому полному предупорядочению $\leqslant$ множества X имеется норма φ на X такая, что $\leqslant$ совпадает с $\leqslant_\varphi$.

Наконец, ключевое определение. Класс Γ называется нормированным, если каждое множество из Γ несет Γ-норму. Приложение этих понятий к доказательству теоремы отделимости и редукции получается благодаря следующему утверждению: если проективный класс Γ нормирован, то он удовлетворяет принципу редукции. Доказательство очень простое. Рассмотрим пару Γ-множеств $X, Y \subseteq \mathscr{X}$. Следующее множество

$$P = \{\langle x, i\rangle : (x \in X \wedge i = 0) \vee (x \in Y \wedge i = 1)\}$$

также принадлежит классу Γ, ибо получается из Γ-множеств $X, Y, \{0\}, \{1\}$ с помощью $\wedge$ и $\vee$ (правило 5 § 1). Поэтому найдется Γ-норма φ: $P \to \mathrm{Ord}$. Теперь пара Γ-множеств

$$X' = \{x : \langle x, 0\rangle <^*_\varphi \langle x, 1\rangle\}, \quad Y' = \{x : \langle x, 1\rangle \leqslant^*_\varphi \langle x, 0\rangle\}$$

обеспечивает редукцию исходной пары (множества X' и Y' принадлежат Γ, ибо получаются из Γ-отношений $<^*_\varphi$ и $\leqslant^*_\varphi$ непрерывной подстановкой — правило 2 § 1).

В силу всего сказанного, для доказательства теоремы отделимости и редукции будет достаточно доказать следующую теорему:

Первая теорема периодичности (Σ^1_{2n}-Det). Классы $\Sigma_0^1, \Pi_1^1, \Sigma_2^1, \ldots, \Sigma^1_{2n}, \Pi^1_{2n+1}, \Sigma^1_{2n+2}$ нормированы.

Известные доказательства этого первого фундаментального положения дескриптивной теории детерминированных универсумов следуют такой схеме: сначала проверяется нормированность класса Σ_0^1, а затем выполняется индуктивный переход $\Sigma_m^1 \to \Pi^1_{m+1} \to \Sigma^1_{m+2}$. Имея в виду описанное выше действие оператора $\mathfrak{D}$, существо этой схемы можно было бы выразить в том, что нормированность переходит с класса Γ на $\mathfrak{D}\Gamma$. Доказательство такого общего утверждения было получено Московакисом [58, гл. 6], однако оно слишком сложное для того, чтобы поместить его в настоящей статье. Мы приведем первоначальное, принадлежащее Мартину [51] и Московакису [15] доказательство первой теоремы периодичности. Оно состоит из трех лемм:

Лемма 4.1. Класс Σ_0^1 открытых множеств нормирован.

Лемма 4.2. Если класс Π^1_m нормирован, то класс Σ^1_{m+1} также будет нормированным.

Лемма 4.3 (Σ_m^1-Det). Если класс Σ^1_m нормирован, то и класс Π^1_{m+1} будет нормированным.

Подчеркнем, что лемма 2 не предполагает каких-либо гипотез детерминированности.

Доказательство леммы 4.1. Каждое открытое точечное множество X является объединением $X = \bigcup_{k \in \omega} X_k$ открыто-замкнутых множеств X_k (напомним, что рассматриваются только множества пространств вида $\omega^l \times \mathcal{N}^m$; для евклидовых пространств это утверждение, конечно, неверно). Если $x \in X$, то определим значение нормы $\varphi(x)$ равным наименьшему числу k, при котором $x \in X_k$. Без труда можно доказать, что φ будет «открытой» нормой. □

Доказательство леммы 4.2 основано на идее минимального индекса П. С. Новикова [63]. Построим Σ^1_{m+1}-норму на Σ^1_{m+1}-множестве $X = \{x \in \mathscr{X} : \exists \alpha P(x, \alpha)\}$, где $P \subseteq \mathscr{X} \times \mathcal{N}$ — множество класса Π_m^1, несущее Π_m^1-норму φ. Положим

$$\psi(x) = \min_{\langle x, \alpha \rangle \in P} \varphi(x, \alpha)$$

для каждой точки $x \in X$. Построенная норма $\psi: X \to \mathrm{Ord}$ является Σ^1_{m+1}-нормой: например,

$$x \leqslant_{\psi}^{*} y \leftrightarrow x \in X \wedge (y \in X \rightarrow \psi(x) \leqslant \psi(y)) \leftrightarrow \exists\alpha\forall\beta\,(P(x, \alpha) \wedge (P(y, \beta) \rightarrow$$
$$\rightarrow \varphi(x, \alpha) \leqslant \varphi(y, \beta)) \leftrightarrow \exists\alpha\forall\beta\,(\langle x, \alpha\rangle \leqslant_{\varphi}^{*} \langle y, \beta\rangle),$$

т. е. отношение $\leqslant_{\psi}^{*}$ имеет класс Σ_{m+1}^{1} (правило 6, § 1). □

Доказательство леммы 4.3. Требуется построить Π_{m+1}^{1}-норму на Π_{m+1}^{1}-множестве $X=\{x \in \mathscr{X}: \forall\alpha P(x, \alpha)\}$, где $P \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{N}$ — множество класса Σ_m^1, на котором задана Σ_m^1-норма φ. Каждой паре точек x, $y \in \mathscr{X}$ сопоставляются игры G_{xy} и G'_{xy} с игровыми множествами

$$A_{xy}=\{\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathscr{N}^2: \neg(\langle x, \alpha\rangle \leqslant_{\varphi}^{*} \langle y, \beta\rangle)\},$$

и

$$A'_{xy}=\{\langle \alpha, \beta\rangle \in \mathscr{N}^2: \langle x, \beta\rangle <_{\varphi}^{*} \langle y, \alpha\rangle\}$$

классов Π_m^1 и Σ_m^1 (по выбору φ). Все эти игры детерминированы, ибо гипотеза Σ_m^1-Det влечет Π_m^1-Det (см. вывод следствия из теоремы Гейла — Стьюарта в § 2).

Рассматриваются следующие бинарные отношения на $\mathscr{X}$:

$$x \leqslant^{*} y \leftrightarrow \text{игрок II имеет ВС в игре } G_{xy};$$
$$x <^{*} y \leftrightarrow \text{игрок I имеет ВС в игре } G'_{xy}.$$

Мы утверждаем, что $\leqslant^{*}$ и $<^{*}$ — отношения класса Π_{m+1}^{1}. Действительно, скажем, $\leqslant^{*}$ тождественно дополнению множества $\mathfrak{D}B$, где

$$B=\{\langle x, y, \alpha, \beta\rangle: \neg(\langle x, \alpha\rangle \leqslant_{\varphi}^{*} \langle y, \beta\rangle)\}$$

— множество класса Π_m^1. Но $\mathfrak{D}B \in \Sigma_{m+1}^{1}$ согласно сказанному выше о действии оператора $\mathfrak{D}$ на множества класса Π_m^1. Точно так же рассматривается и отношение $<^{*}$.

Теперь остается проверить, что отношения $\leqslant^{*}$ и $<^{*}$ совпадают с $\leqslant_{\varphi}^{*}$ и $<_{\varphi}^{*}$ для подходящей нормы φ на X. Чтобы доказать существование такой нормы, вполне достаточно доказать следующие семь утверждений:

(1) Если $x \in X$, а $y \in \mathscr{X} - X$, то $x <^{*} y$.

(2) Если $x \leqslant^{*} y$, то $x \in X$.

(3) Если $x \in X$, то выполняется $x \leqslant^{*} x$.

(4) Если $x \leqslant^{*} y$ и $y \leqslant^{*} z$, то $x \leqslant^{*} z$.

(5) Если $x <^{*} y$, то $x \leqslant^{*} y$.

(6) Если x, $y \in X$, то $x \leqslant^{*} y \leftrightarrow \neg(y <^{*} x)$.

(7) Нет бесконечно убывающих в смысле $<^{*}$ цепочек элементов множества X.

Выигрывающая стратегия σ для игрока I, приносящая доказательство утверждения (1), состоит в следующем: он, независимо от ходов II, делает свои ходы a_i согласно равенству $a_i = \alpha(i)$, где α — заранее фиксированная точка $\mathscr{N}$ такая, что

$\langle y, a\rangle \notin P$ (α существует благодаря $y \notin X$). В то же время, какую бы ни сделал игрок II последовательность β своих ходов, он получит $\langle x, \beta\rangle \in P$ ввиду $x \in X$. Стало быть, $\langle x, \beta\rangle <_\varphi^* \langle y, \alpha\rangle$.

Точно так же доказывается утверждение (2). Если $x \notin X$, то игрок I обеспечивает себе выигрыш в игре G_{xy}, делая свою последовательность ходов α так, чтобы $\langle x, \alpha\rangle \notin P$.

Утверждение (3) вовсе тривиально: игроку II достаточно повторять ходы игрока I, обеспечивая $\beta = \alpha$ и $\langle x, \alpha\rangle \leqslant_\varphi * \langle x, \beta\rangle$ (важно, что $x \in X$ — это дает $\langle x, \alpha\rangle \in P$ для всех α).

Для доказательства (4) пусть игрок II имеет ВС τ_1 в игре G_{xy} и ВС τ_2 в игре G_{yz}. ВС τ в игре G_{xz} для игрока II получается своеобразной композицией стратегий τ_1 и τ_2:

$$\tau(a_0, \ldots, a_k) = \tau_2(b_0, \ldots, b_k),$$

где $b_i = \tau_1(a_0, \ldots, a_i)$ для всех i. Эта стратегия выполняет равенство $\alpha * \tau = (\alpha * \tau_1) * \tau_2$ для всех $\alpha \in \mathcal{N}$.

Докажем (5). Пусть игрок I имеет ВС σ в игре G_{xy}'. Тогда ВС τ для II в игре G_{xy} можно задать равенством:

$$\tau(a_0, \ldots, a_k) = \sigma(a_0, \ldots, a_{k-1}).$$

Легко видеть, что для любой точки $\alpha \in \mathcal{N}$ если $\beta = \alpha * \tau$, то $\sigma * \alpha = \beta$ и $\langle x, \alpha\rangle <_\varphi^* \langle y, \beta\rangle$ по выбору σ.

Доказательство (6). Слева направо. Пусть напротив, игроки I и II имеют выигрывающие стратегии σ и τ в играх G_{yx}' и G_{xy} соответственно. Рассмотрим партию $\langle \alpha, \beta\rangle$, в которой игроки придерживаются указанных стратегий: т. е. $\alpha = \sigma * \beta$ и $\beta = \alpha * \beta$. Немедленно приходим к противоречию:

$$\langle y, \beta\rangle <_\varphi^* \langle x, \alpha\rangle \quad \text{и} \quad \langle x, \alpha\rangle \leqslant_\varphi^* \langle y, \beta\rangle.$$

Справа налево. Раз $y <^* x$ не выполняется, то ввиду детерминированности игр G_{yx}' игрок II имеет ВС τ в игре G_{yx}'. Покажем, что эта стратегия будет ВС и в игре G_{xy} для игрока II. Пусть $\alpha \in \mathcal{N}$ произвольно и $\beta = \alpha * \tau$. Тогда не выполняется $\langle y, \beta\rangle <_\varphi^* \langle x, \alpha\rangle$. Но $\langle x, \alpha\rangle$ и $\langle y, \beta\rangle$ принадлежат P, поскольку $x, y \in X$. Следовательно $\langle x, \alpha\rangle \leqslant_\varphi^* \langle y, \beta\rangle$.

Наконец, утверждение (7). Предположим противное: существует бесконечная $<^*$-убывающая последовательность точек $x_i \in X$ (где $i \in \omega$). При любом i игрок I имеет ВС σ_i в игре $G'_{x_{i+1} x_i}$. Зададим последовательность точек $\alpha_i \in \mathcal{N}$ равенствами $\alpha_i(l) = \sigma_i(\alpha_{i+1} \restriction l)$ индукцией по l одновременно для всех i. Таким образом, $\alpha_i(0) = \sigma_i(\Lambda)$, $\alpha_i(1) = \sigma_i(\alpha_{i+1}(0))$, $\alpha_i(2) = \sigma_i(\alpha_{i+1}(0), \alpha_{i+1}(1))$, и т. д. В результате получим $\alpha_i = \sigma_i * \alpha_{i+1}$, т. е. $\langle x_{i+1}, \alpha_{i+1}\rangle <_\varphi^* \langle x_i, \alpha_i\rangle$ для всех i. Другими словами, $\varphi(x_0, \alpha_0) > \varphi(x_1, \alpha_1) > \varphi(x_2, \alpha_2) > \ldots$, чего не может быть, поскольку значения φ — ординалы. □

Недавно проведенное Стилом исследование [73] дало следующий результат: если Γ — класс точечных множеств, удовлетворяющий некоторым достаточно элементарным условиям и не совпадающий с классом $\neg\Gamma$ дополнительных множеств, то в предположении полной аксиомы детерминированности AD в точности один из классов Γ, $\neg\Gamma$ удовлетворяет принципу отделимости.

Нормы и полные предупорядочения используются сейчас отнюдь не только для доказательства теорем отделимости. О различных приложениях этих понятий в теории детерминированных универсумов см. сборник [35].

§ 5. Униформизация и лестницы в детерминированных универсумах

Исследования, связанные с проблемой униформизации, составляют один из наиболее важных разделов как классической, так и современной дескриптивной теории множеств. Изложим несколько необходимых определений. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — пара точечных пространств.

Множество $P\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ называется однозначным, или униформным (в смысле $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$), когда каждое его сечение

$$P/x=\{y\in\mathscr{Y}\colon P(x, y)\},$$

где $x\in\mathscr{X}$, содержит не более одной точки. Проекция πP множества $P\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ (на пространство $\mathscr{X}$) задается равенством

$$\pi P=\{x\in\mathscr{X}\colon P/x\neq\varnothing\}=\{x\in\mathscr{X}\colon \exists y P(x, y)\}.$$

Если $P\subseteq Q\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, множество P однозначно, и $\pi P=\pi Q$, то говорят, что множество P униформизует Q.

Проблема униформизации в дескриптивной теории множеств состоит в том, чтобы к данному проективному классу Γ подобрать по возможности наименьший класс Γ' такой, что каждое Γ-множество допускает униформизацию множеством класса Γ' (в этом случае говорят, что Γ' является униформизационным базисом класса Γ). Обычно речь идет о решении вопроса о выполнении для того или иного проективного класса Γ следующего принципа униформизации:

Γ-Unif: Каждое Γ-множество можно униформизовать множеством этого же класса Γ.

Проблема униформизации ,как и само это слово, была введена в дескриптивную теорию Н. Н. Лузиным [47], однако еще до выхода этой работы Н. Н. Лузиным и П. С. Новиковым было получено несколько интересных результатов по униформизации борелевских и Σ_1^1-множеств (см. следующий параграф). Наиболее же важная классическая теорема униформизации, доказанная Кондо [39] с помощью введенной П. С. Новиковым (см. [49]) униформизационной техники, состоит в том, что принцип униформизации выполняется для класса $\mathbf{\Pi}_1^1$. Этот результат вошел в математику под названием: теорема Новикова — Кондо.

Униформизация влечет редукцию для того же класса. Действительно, чтобы редуцировать пару Г-множеств $X, Y \subseteq \mathscr{X}$ проведем униформизацию Г-множества

$$Q = \{\langle x, i \rangle : (x \in X \wedge i = 0) \vee (x \in Y \wedge i = 1)\}$$

множеством $P \subseteq Q$ того же класса Г и возьмем множества

$$X' = \{x : P(x, 0)\}, \quad Y' = \{x : P(x, 1)\}.$$

Они принадлежат Г и редуцируют пару X, Y. В этом рассуждении предполагается, что Г — проективный класс.

Таким образом, в силу сказанного в предыдущем параграфе, принцип униформизации не выполняется для класса Σ_1^1. Фактически, П. С. Новиков построил [69] Π_0^1-множество в $\mathscr{N} \times \mathscr{N}$, не допускающее униформизации множеством класса Σ_1^1, так что и класс Π_0^1 замкнутых множеств не удовлетворяет Unif. По очевидным соображениям это справедливо и для класса открытых множеств Σ_0^1.

Униформизация переходит с класса Π_1^1 на Σ_2^1 и вообще с любого Π_m^1 на Σ_{m+1}^1. Действительно, рассмотрим произвольное Σ_{m+1}^1-множество $Q \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Тогда $Q = \{\langle x, y \rangle : \exists \alpha Q'(x, y, \alpha)\}$ для подходящего Π_m^1-множества $Q' \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \times \mathscr{N}$. Используя Π_1^1-Unif, униформизуем в смысле $\mathscr{X} \times (\mathscr{Y} \times \mathscr{N})$ множество Q' посредством Π_m^1-множества P' и возьмем в качестве P множество $\{\langle x, y \rangle : \exists \alpha P'(x, y, \alpha)\}$.

Таким образом, Σ_2^1-Unif и отрицание Π_2^1-Unif являются следствиями теоремы Новикова — Кондо.

Естественно, в свете результатов предыдущего параграфа и сказанного здесь, напрашивается предположение о том, что в Σ_{2n}^1-детерминированном универсуме все классы первого ряда (см. теорему отделимости и редукции в § 4) удовлетворяют принципу униформизации, кроме, конечно, класса Σ_0^1. Именно так и обстоят дела, однако понятие нормы и первая теорема периодичности оказываются слишком слабыми для того, чтобы работать с униформизацией. Приходится использовать более сложное понятие лестницы, извлеченное Московакисом [55] из классических работ [39, 49] по униформизации.

Лестницей на точечном множестве X называется набор $\varphi = \langle \varphi_k : k \in \omega \rangle$ норм $\varphi_k : X \to \mathrm{Ord}$, удовлетворяющий следующему условию:

(A) Если $x_0, x_1, x_2, \ldots \in X$ и $\lim x_i = x$, причем ко всякому k имеется ординал λ_k такой, что почти все по i (т. е. за исключением конечного числа индексов i) ординалы $\varphi_k(x_i)$ совпадают с λ_k, то $x \in X$ и $\varphi_k(x) \leqslant \lambda_k$ для каждого k.

Подобно нормам, лестницы классифицируются с точки зрения определимости. Лестница $\varphi = \langle \varphi_k : k \in \omega \rangle$ на множестве $X \subseteq \mathscr{X}$ называется Г-лестницей, когда оба множества

$$\{\langle k, x, y \rangle : x \leqslant^*_{\varphi_k} y\}, \quad \{\langle k, x, y \rangle : x <^*_{\varphi_k} y\}$$

в пространстве $\omega\times\mathscr{X}^2$ имеют класс Γ. Необходимым и достаточным условием для этого в случае, когда Γ — проективный класс, будет требование того, чтобы каждая норма φ_k была Γ-нормой.

Если на каждом множестве данного класса Γ существует Γ-лестница, то говорят, что класс Γ имеет свойство лестницы. В этом случае, по крайней мере для проективных классов Γ, на каждом Γ-множестве X можно задать Γ-лестницу $\varphi=\langle\varphi_k : k\in\omega\rangle$, удовлетворяющую таким двум дополнительным условиям:

(Б) Если $x_0, x_1, x_2, \ldots \in X$ и для любого k почти все по i ординалы $\varphi_k(x_i)$ совпадают с некоторым одним $\lambda_k\in\mathrm{Ord}$, то найдется точка $x\in X$ такая, что $\lim x_i=x$;

(В) Если $j<k$ и $\varphi_k(x)\leqslant\varphi_k(y)$, то $\varphi_j(x)\leqslant\varphi_j(y)$.

Лестницы, удовлетворяющие (Б) и (В), называются хорошими.

Докажем это утверждение. Пусть на Γ-множестве $X\subseteq\mathscr{N}$ (можно ограничиться рассмотрением множеств только этого пространства) задана Γ-лестница $\psi=\langle\psi_k : k\in\omega\rangle$. Требуется построить хорошую Γ-лестницу на X. Выберем ординал λ так, чтобы было $\psi_k(\alpha)<\lambda$ для всех $k\in\omega$ и $\alpha\in\mathscr{N}$. Каждому k сопоставляется порядковый изоморфизм f_k множества

$$C_k=\{\langle\xi_0, l_0, \xi_1, l_1, \ldots, \xi_k, l_k\rangle : \xi_i\leqslant\lambda\wedge l_i\in\omega\},$$

упорядоченного лексикографически, на соответствующий (единственный) ординал $\varkappa_k$. Положим

$$\varphi_k(\alpha)=f_k(\psi_0(\alpha), \alpha(0), \ldots, \psi_k(\alpha), \alpha(k))$$

для $\alpha\in X$ и $k\in\omega$. Легко проверяется, что нормы φ_k составляют искомую хорошую лестницу φ на X.

Роль хороших лестниц раскрывает следующее

Предложение [55] (на основе работ [39, 49]). Пусть $m\geqslant 1$. Если класс $\mathbf{\Pi}_m^1$ имеет свойство лестницы, то он удовлетворяет принципу униформизации.

Доказательство. Униформизуем $\mathbf{\Pi}_m^1$-множество $Q\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$. Согласно предыдущему, на множестве Q имеется хорошая $\mathbf{\Pi}_m^1$-лестница $\varphi=\langle\varphi_k : k\in\omega\rangle$. Положим

$$S=\{\langle k, x, y\rangle\in\omega\times\mathscr{X}\times\mathscr{Y}: \forall y'(\langle x, y\rangle\leqslant^*_{\varphi_k}\langle x, y'\rangle)\},$$

$$P=\{\langle x, y\rangle : \forall k S(k, x, y)\},$$

и покажем, что P униформизует наше множество Q (класс $\mathbf{\Pi}_m^1$ множества P обеспечивается правилами 6 и 7 § 1 и тем, что φ является $\mathbf{\Pi}_m^1$-лестницей). Прежде всего,

$$\langle x, y\rangle\in P\to\langle x, y\rangle\leqslant^*_{\varphi_0}\langle x, y\rangle\to\langle x, y\rangle\in Q,$$

т. е. $P\subseteq Q$. Остается проверить, что для каждой точки $x\in\mathscr{X}$, если сечение Q/x непусто, то P/x содержит ровно одну точку. Положим для этого $B_0=Q/x$ и $\lambda_k=\inf\limits_{y'\in B_0}\varphi_k(x, y')$,

$$B_{k+1}=\{y:S(k,x,y)\}=\{y:\varphi_k(x,y)=\lambda_k\}$$

для всех k. Каждое из множеств B_k, конечно, непусто, причем P/x совпадает с пересечением всех B_k. Остается проверить, что это пересечение содержит ровно одну точку.

Заметим, что $B_1 \subseteq B_0$ по определению. При $k \geqslant 1$ включение $B_{k+1} \subseteq B_k$ дается «хорошестью» лестницы φ. Следовательно, при $i \geqslant k$ выполняется $B_i \subseteq B_k$ и, выбрав в каждом B_i произвольным образом точку y_i, мы получим $\varphi_k(x, y_i)=\lambda_k$ всякий раз, когда $i > k$. Снова ввиду «хорошести» найдется точка $y=\lim y_i$ такая, что $\langle x, y\rangle \in Q$, т. е. $y \in Q/x$, и $\varphi_k(x,y) \leqslant \lambda_k$ — фактически $=\lambda_k$ — для всех k. Но это и означает, что $y \in \bigcap_{k \in \omega} B_k$.

Если y' — другая точка пересечения всех B_k, то, повторив проведенное рассуждение для последовательности $y, y', y, y', \ldots$, мы получим сходимость последней, откуда $y'=y$. □

Итак, свойство лестницы для класса Π_m^1 приводит к доказательству принципа униформизации для классов Π_m^1 и Σ_{m+1}^1, т. е. лестницы играют по отношению к униформизации примерно ту же роль, что и нормы — к редукции. Эта аналогия продолжается следующими двумя теоремами Московакиса [55]:

Теорема униформизации (Σ_{2n}^1-Det). Классы Π_1^1, $\Sigma_2^1, \ldots$ $\ldots, \Sigma_{2n}^1, \Pi_{2n+1}^1, \Sigma_{2n+2}^1$ удовлетворяют принципу униформизации, а классы $\Sigma_1^1, \Pi_2^1, \ldots, \Pi_{2n}^1, \Sigma_{2n+1}^1, \Pi_{2n+2}^1$, а также Σ_0^1 и Π_0^1 — не удовлетворяют.

Вторая теорема периодичности (Σ_{2n}^1-Det). Классы

$$\Sigma_0^1,\ \Pi_1^1,\ \Sigma_2^1, \ldots, \Sigma_{2n}^1,\ \Pi_{2n+1}^1,\ \Sigma_{2n+2}^1$$

имеют свойство лестницы.

Как было показано, вторая теорема влечет первую. Сама же вторая теорема периодичности доказывается по той же схеме, что и первая теорема периодичности в § 4:

Лемма 5.1. Класс Σ_0^1 открытых множеств имеет свойство лестницы.

Лемма 5.2. Если класс Π^1_m, $m \geqslant 1$, имеет свойство лестницы, то класс Σ_{m+1}^1 также имеет это свойство.

Лемма 5.3 (Σ^1_m-Det). Если класс Σ^1_m имеет свойство лестницы, то это свойство будет и у класса Π_{m+1}^1.

Доказательство леммы 5.1. Построим Σ_0^1-лестницу на открытом множестве $X=\bigcup_{u \in c} \mathcal{N}_u$, где $c \subseteq FC$, а $\mathcal{N}_u$ (для $u \in FC$) есть бэровский интервал: $\mathcal{N}_u \doteq \{\alpha \in \mathcal{N}: u \subset \alpha\}$. Для каждого $\alpha \in X$ через m_α обозначим наименьшее число m такое, что $\alpha \restriction m \in c$.

Если $k \in \omega$, то существует единственный порядковый изоморфизм f_k множества ω^k с лексикографическим порядком на соответствующий (также единственный) ординал. Положим

$$\varphi_k(\alpha)=f_{k+1}(\langle m_\alpha \rangle \hat{}\, (\alpha \restriction k))$$

для всех $\alpha \in X$ и $k \in \omega$. Нормы φ_k и составляют Σ_0^1-лестницу на X. $\square$

Доказательство леммы 5.2. Построим Σ^1_{m+1}-лестницу на Σ^1_{m+1}-множестве $X=\{x \in \mathscr{X} : \exists \alpha P(x, \alpha)\}$, где $P \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{N}$ — множество класса $\Pi_m{}^1$. Благодаря предложению, доказанному перед теоремой униформизации, можно считать, что множество P однозначно, т. е. для всякого $x \in X$ существует единственная точка $\alpha_x \in \mathscr{N}$ такая, что $P(x, \alpha_x)$. Далее, существует хорошая $\Pi_m{}^1$-лестница $\varphi = \langle \varphi_k : k \in \omega \rangle$ на X. Положим $\psi_k(x)=\varphi_k(x, \alpha_x)$ для $x \in X$ и $k \in \omega$. Нормы ψ_k дают искомую Σ^1_{m+1}-лестницу на X. $\square$

Доказательство леммы 5.3. Пусть $P \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{N}$, $P \in \Sigma_m{}^1$. Построим Π^1_{m+1}-лестницу на множестве $X=\{x : \forall \alpha P(x, \alpha)\}$. Свойство лестницы для класса Σ^1_m приносит хорошую Σ^1_m-лестницу $\varphi = \langle \varphi_k : k \in \omega \rangle$ на множестве P.

Теперь нам опять будет нужна введенная в § 4 нумерация кортежей натуральных чисел, при которой каждому $k \in \omega$ взаимно однозначно соответствует кортеж $[k] \in FC$. В дальнейшем предполагается выполнение такого требования: если $[k_1] \subset [k_2]$, то $k_1 < k_2$.

Пусть x, $y \in \mathscr{X}$ и $k \in \omega$. Рассматривается игра $G_{kxy}=G([k]; [k]; A_{kxy})$ с игровым множеством

$$A_{kxy}=\{\langle \alpha, \beta \rangle : \neg(\langle x, \alpha \rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle y, \beta \rangle)\},$$

начинающаяся с позиции $[k]$; $[k]$ (см. § 2). Как и в доказательстве леммы 4.3, ко всякому k существует Π^1_{m+1}-норма ψ_k на X, удовлетворяющая, каковы бы ни были x, y, эквивалентности

$$x \leqslant^*_{\psi_k} y \leftrightarrow \text{игрок II имеет ВС в игре } G_{kxy}.$$

Остается проверить, что эти нормы образуют лестницу на X.

Пусть $x_0, x_1, x_2, \ldots \in X$, $x=\lim x_i$, и при любом k почти все по i ординалы $\psi_k(x_i)$ совпадают с одним зависящим от k ординалом λ_k. Требуется проверить, что $x \in X$ и $\psi_k(x) \leqslant \lambda_k$ для всех k. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $\psi_k(x_i)=\lambda_k$ для любой пары $i \geqslant k$ (иначе, просто переходим к подходящей подпоследовательности). Тогда при $k \leqslant m$ мы получим $\psi_k(x_k)= =\psi_k(x_m)=\lambda_k$, т. е. игрок II имеет некоторую ВС τ_{km} в игре $G_{kx_m x_k}$.

Чтобы доказать $x \in X$, фиксируем произвольную точку $\alpha \in \mathscr{N}$ и удостоверимся, что $\langle x, \alpha \rangle \in P$. Если $i \in \omega$, то существует единственное натуральное k_i такое, что $[k_i]=\alpha \restriction i$. При этом $k_i < k_{i+1}$ для всех i ввиду принятого требования к нумерации кортежей, так что $\tau_i=\tau_{k_i k_{i+1}}$ будет ВС для II в игре $G_i= =G_{k_i x_{k_{i+1}} x_{k_i}}$. Существует последовательность точек $\alpha_i \in \mathscr{N}$ такая, что $\alpha_i=\alpha_{i+1} * \tau_i$ для всех i: значения $\alpha_i(l)$ определяются равенствами $\alpha_i(l)=\alpha(l)$ при $l<i$, и $\alpha_i(l)=\tau_i(\alpha_{i+1} \restriction l+1)$ при $l \geqslant i$. (Игра

G_i начинается с позиции $\alpha\restriction i$; $\alpha\restriction i$, и поэтому равенство $\alpha_i(l)=$ $=\tau_l(\alpha_{i+1}\restriction l+1)$ будет выполнено автоматически и при $l<i$.)

Таким образом, $\langle x_{k_{i+1}}, \alpha_{i+1}\rangle \leqslant^*_{\varphi_{k_i}} \langle x_{k_i}, \alpha_i\rangle$ для всех i, а поскольку $x_k \in X$, $\forall k$, то, каково бы ни было i, мы получаем

$$\langle x_{k_i}, \alpha_i\rangle \in P \quad \text{и} \quad \varphi_{k_i}(x_{k_{i+1}}, \alpha_{i+1}) \leqslant \varphi_{k_i}(x_{k_i}, \alpha_i).$$

Ввиду «хорошести» лестницы φ, отсюда следует, что

$$\varphi_j(x_{k_{i+1}}, \alpha_{i+1}) \leqslant \varphi_j(x_{k_i}, \alpha_i) \tag{1}$$

всякий раз, когда $j\leqslant k_i$. Поэтому для каждого j имеется ординал μ_j такой, что $\varphi_j(x_{k_i}, \alpha_i)=\mu_j$ для почти всех i. Снова благодаря «хорошести», получаем $\lim\langle x_{k_i}, \alpha_i\rangle \in P$. Однако $\lim x_k=x$, а $\lim\alpha_i=\alpha$. Итак, $\langle x, \alpha\rangle\in P$, а поскольку α произвольно в этом рассуждении, то $x\in X$.

Заметим, что по определению лестницы в рассматриваемой ситуации будет $\varphi_j(x, \alpha)\leqslant\mu_j$ для всех j. Соединяя с неравенством (1) и учитывая выбор μ_j, получаем

$$\varphi_k(x, \alpha)\leqslant\varphi_k(x_k, \alpha_i), \text{ т. е } \langle x, \alpha\rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x_k, \alpha_i\rangle \tag{2}$$

для любой пары i, k такой, что $k=k_i$ (следует взять $j=k$). Вместе с тем, анализируя построение последовательности точек α_i, нетрудно заметить, что каждое значение $\alpha_i(l)$ требует для своего определения знать только числа $\alpha(l')$, $l'\leqslant l$. Следовательно, мы можем записать, что $\alpha_i=\alpha*\tau^i$, где τ^i — стратегия (для игрока II), зависящая только от i.

Теперь мы без труда докажем неравенство $\psi_k(x)\leqslant\lambda_k$, где $k\in\omega$ произвольно. Благодаря тому, что $\psi_k(x_k)=\lambda_k$, достаточно убедиться, что игрок II имеет ВС в игре G_{kxx_k}. Обозначив через i длину кортежа $[k]$, покажем, что τ^i будет искомой стратегией. Пусть $\alpha\in\mathcal{N}$ произвольно. Если $[k]\not\subset\alpha$, то игрок I проигрывает при любом ответе II, так что можно предполагать, что $[k]\subset\alpha$. Тогда, повторив выкладки из первой части доказательства леммы, мы имеем $k=k_i$, $\alpha*\tau^i=\alpha_i$ и, наконец, $\langle x, \alpha\rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x_k, \alpha*\tau^i\rangle$, согласно (2). А это и означает выигрыш игрока II в игре G_{kxx_k}. □

Значение лестниц в дескриптивной теории детерминированных универсумов отнюдь не исчерпывается второй теоремой периодичности и приложениями к униформизации. Вместе с нормами и предупорядочениями, понятие лестницы занимает центральное место в дескриптивных исследованиях. В частности, лестницам в детерминированных универсумах посвящено большинство статей недавно опубликованного сборника [36] (о чем сказано в предисловии редакторов сборника). Отметим в нем интересную статью [74], где рассмотрен вопрос о лестницах на множествах класса Σ^1_1. Естественно, названный класс не имеет свойства лестницы, т. е. нельзя утверждать, что на любом Σ^1_1-

множестве имеется Σ_1^1-лестница (или хотя бы Σ_1^1-норма). Вторая теорема периодичности (при $n=0$) дает следующий результат: на каждом Σ_1^1-множестве существует Σ_2^1-лестница. Как показано в [74], этот результат отнюдь не наилучший: на самом деле, каждое Σ_1^1-множество несет лестницу класса $\mathbf{B}_{\omega_1}(\Sigma_1^1)$, где знак $\mathbf{B}_{\omega_1}$ означает замыкание стоящего в скобках класса относительно борелевских операций дополнения и счетного объединения.

§ 6. Проективные множества со специальными сечениями в детерминированных универсумах

Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — два точечных пространства и $P \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Напомним, что каждая точка $x \in \mathscr{X}$ задает сечение $P/x = \{y : P(x, y)\}$ множества P. Можно выделить множества P такие, что каждое сечение P/x содержит не более одной точки — однозначные, или униформные множества. Более слабое требование — не более чем счетность каждого P/x — выделяет счетнозначные множества. Однозначные и счетнозначные множества образуют наиболее простые категории множеств со специальными сечениями; помимо них, рассматриваются множества с компактными и σ-компактными сечениями, с сечениями положительной меры и др. (см. работы [20, 17, 43]). Классические исследования по проективным множествам со специальными сечениями начались еще во второй половине 20-х годов (обзор полученных результатов можно найти в работах [2], [4, § 2], [6, § 4]).

Ограниченные рамки настоящей статьи заставляют остановиться подробно только на одной какой-нибудь задаче из рассматриваемой области. Мы рассмотрим задачу расщепления счетнозначного множества данного проективного класса на счетное число однозначных множеств того же класса. Скажем, что проективный класс Γ имеет свойство расщепления, если любое плоское счетнозначное (в смысле данной пары точечных пространств $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$) Γ-множество является счетной суммой однозначных Γ-множеств.

Изыскания Н. Н. Лузина [48] и П. С. Новикова [62] показали, что свойством расщепления обладают классы $\mathbf{\Delta}_1^1$ (борелевских множеств) и $\mathbf{\Sigma}_1^1$. Этот результат, подобно теоремам отделимости, редукции и униформизации, обобщается в детерминированных универсумах на более высокие нечетные уровни:

Теорема расщепления [77] (Σ_{2n}^1-Det). Классы $\mathbf{\Delta}_{2n+1}^1$ и Σ_{2n+1}^1 имеют свойство расщепления.

Известные доказательства теоремы расщепления так или иначе включают использование одного из вариантов теоремы [57, 58] о выборе выигрывающей стратегии. Мы предпочли воспользоваться тем вариантом, который позволяет обойтись без обращения к «эффективным» классам, хотя и не является наиболее естественным.

Теорема о выборе выигрывающей стратегии (Σ^1_{2n}-Det). Если $B \subseteq \mathscr{X} \times \mathscr{N}^2$, $B \in \Sigma^1_{2n}$, то существует функция $\Phi: \mathfrak{D}B \to \mathscr{N}$ класса Σ^1_{2n+1} на $\mathfrak{D}B$ (т. е. график Φ представляет собой пересечение $\mathfrak{D}B \times \mathscr{N}$ с некоторым подмножеством $\mathscr{X} \times \mathscr{N}$ класса Σ^1_{2n+1}), обладающая тем свойством, что при любом $x \in \mathfrak{D}B$ стратегия $[\Phi(x)]$ будет ВС для I в игре $G(B/x)$. (Определение стратегии $[\varepsilon]$ для $\varepsilon \in \mathscr{N}$ см. в § 4.)

Доказательство теоремы о выборе выигрывающей стратегии начинается с определения двух семейств игр. Пусть $x \in \mathscr{X}$, $k \in \omega$, u и v принадлежат ω^k (т. е. являются кортежами натуральных чисел длины k) и $a \in \omega$. Через $G_{xkuv}(a)$ обозначается игра с ИМ B/x, начинающаяся с позиции $u^\frown \langle a \rangle ; v$. Все эти игры детерминированы, благодаря гипотезе Σ^1_{2n}-Det.

Перед определением второго семейства игр каждой паре точек $\alpha, \beta \in \mathscr{N}$ сопоставим точку $\prec\alpha\beta\succ \in \mathscr{N}$, заданную равенствами

$$\prec\alpha\beta\succ(2k) = \alpha(k), \quad \prec\alpha\beta\succ(2k+1) = \beta(k)$$

для всех k. Согласно второй теореме периодичности, на нашем Σ^1_{2n}-множестве B имеется Σ^1_{2n}-лестница, а тогда, как было показано в § 5, и хорошая Σ^1_{2n}-лестница $\varphi = \langle \varphi_k : k \in \omega \rangle$. С ее помощью каждому набору $k \in \omega$, $x \in \mathscr{X}$; $u, v \in \omega^k$ и $a, a' \in \omega$ сопоставим игру $G_{xkuv}(a', a)$ с ИМ

$$\{\langle \prec\alpha\beta'\succ, \prec\alpha'\beta\succ \rangle : \neg(\langle x, \alpha', \beta' \rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x, \alpha, \beta \rangle)\},$$

начинающуюся с позиции $\prec uv\succ^\frown \langle a \rangle ; \prec uv\succ^\frown \langle a' \rangle$, где соединение $\prec uv\succ$ кортежей u, v длины k определяется подобно соединению $\prec\alpha\beta\succ$ точек $\alpha, \beta \in \mathscr{N}$, т. е. $\prec uv\succ$ — кортеж длины $2k$ и

$$\prec uv\succ(2i) = u(i), \quad \prec uv\succ(2i+1) = v(i)$$

для всех $i < k$. Игровые множества этих игр имеют класс Π^1_{2n} по выбору лестницы φ, и потому детерминированы, поскольку из гипотезы Σ^1_{2n}-Det следует Π^1_{2n}-Det (см. § 2).

Дадим еще три определения:

$$W_{xk} = \{\langle u, a, v \rangle : u, v \in \omega^k \wedge a \in \omega \wedge \text{игрок I имеет ВС в игре } G_{xkuv}(a)\};$$

$$a' \leqslant_{xkuv} a \leftrightarrow \text{II имеет ВС в игре } G_{xkuv}(a', a);$$

$$M_{xk} = \{\langle u, a', v \rangle \in W_{xk} : \forall a \in \omega\, (a' \leqslant_{xkuv} a)\}.$$

Лемма 6.1. Пусть $x \in \mathscr{X}$, $k \in \omega$ и точки $\alpha, \beta \in \mathscr{N}$ таковы, что $\langle \alpha \restriction k, \alpha(k), \beta \restriction k \rangle \in M_{xk}$ для всех k. Тогда $\langle \alpha, \beta \rangle \in B/x$.

Доказательство. При $k=0$ имеем $\langle \Lambda, \alpha(0), \Lambda \rangle \in M_{x0}$, т. е. игрок I имеет ВС σ в игре $G_{x0\Lambda\Lambda}(\alpha(0))$. Далее, если $k \in \omega$, то $\alpha(k) \leqslant_{xk(\alpha\restriction k)(\beta\restriction k)} a$ при любом $a \in \omega$ по определению M_{xk}, т. е. игрок II имеет ВС τ_{ka} в игре $G^{ka} = G_{xk(\alpha\restriction k)(\beta\restriction k)}(\alpha(k), a)$. Определим, пользуясь этой системой стратегий, последовательность точек $\alpha_k, \beta_k \in \mathscr{N}$ и стратегий τ_k, с помощью следующей системы равенств:

(1) $\alpha_k(l) = \alpha(l)$ и $\beta_k(l) = \beta(l)$ при $l < k$;

(2) $\tau_k = \tau_{k\alpha_k(k)}$ для всех k;

(3) $\alpha_0(l) = \sigma(\beta_0(0), \ldots, \beta_0(l-1))$ для всех l;

(4) $\alpha_{k+1}(l) = \tau_k(\alpha_k(0), \beta_{k+1}(0), \ldots, \alpha_k(l-1), \beta_{k+1}(l-1), \alpha_k(l))$ и $\beta_k(l) = \tau_k(\alpha_k(0), \beta_{k+1}(0), \ldots, \alpha_k(l), \beta_{k+1}(l))$ при $l \geqslant k$.

Соотношение (3) дает $\alpha_0 = \sigma * \beta_0$, т. е. $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in B/x$ по выбору σ. Далее, соотношение (1) показывает, что равенства (4) выполняются также и при $l < k$, ибо игры G^{ka} начинаются с позиций $\prec\alpha\restriction k, \beta\restriction k\succ{}^\frown\langle a \rangle$; $\prec\alpha\restriction k, \beta\restriction k\succ{}^\frown\langle \alpha(k) \rangle$. Значит, $\prec\alpha_{k+1}\beta_k\succ = \prec\alpha_k\beta_{k+1}\succ * \tau_k$, т. е. $\langle x, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1} \rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x, \alpha_k, \beta_k \rangle$ для всех k. Соединяя это с доказанным $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in B/x$, получаем:

$$\langle \alpha_k, \beta_k \rangle \in B/x \text{ и } \varphi_k(x, \alpha_{k+1}, \beta_{k+1}) \leqslant \varphi_k(x, \alpha_k, \beta_k)$$

для всех k. Свойство «хорошести» лестницы φ позволяет вывести отсюда (см. доказательство леммы 5.3) сходимость последовательности точек $\langle x, \alpha_k, \beta_k \rangle$ к некоторой точке B. Но этой точкой может быть только точка $\langle x, \alpha, \beta \rangle$. □

Лемма 6.2. Пусть $x \in \mathscr{X}$. Если $x \in \Game B$, то найдется $a \in \omega$ такое, что $\langle \Lambda, a, \Lambda \rangle \in M_{x0}$. Если $k \in \omega$ и $\langle u, a, v \rangle \in M_{xk}$, $b \in \omega$, то найдется $c \in \omega$ такое, что $\langle u^\frown\langle a \rangle, c, v^\frown\langle b \rangle \rangle \in M_{x,k+1}$.

Доказательство. Для множеств W_{xk} вместо M_{xk} лемма очевидна. Поэтому предположение противного приносит нам точку $x \in \mathscr{X}$, натуральное k, пару кортежей $u, v \in \omega^k$ и последовательность натуральных a_i, $i \in \omega$ так, что $\langle u, a_0, v \rangle \in W_{xk}$ и $\neg(a_i \leqslant_{xkuv} a_{i+1})$ для всех $i \in \omega$. Таким образом, игрок I получает ВС σ в игре $G_{xkuv}(a_0)$ и ВС σ_i в каждой игре $G_{xkuv}(a_i, a_{i+1})$, $i \in \omega$. С помощью этой системы стратегий можно построить последовательность точек $\alpha_i, \beta_i \in \mathscr{N}$, удовлетворяющих соотношениям: $\alpha_i \restriction k = u$, $\beta_i \restriction k = v$ для всех i,

$$\alpha_0 = \sigma * \beta_0, \text{ и } \prec\alpha_{i+1}\beta_i\succ = \sigma_i * \prec\alpha_i\beta_{i+1}\succ \text{ при } i \in \omega.$$

По выбору стратегий σ и σ_i получим $\langle \alpha_0, \beta_0 \rangle \in B/x$ и

$$\neg(\langle x, \alpha_i, \beta_i \rangle \leqslant^*_{\varphi_k} \langle x, \alpha_{i+1}, \beta_{i+1} \rangle)$$

для всех $i \in \omega$, откуда индукцией по i нетрудно вывести, что

$$\langle \alpha_i, \beta_i \rangle \in B/x \quad \text{и} \quad \varphi_k(x, \alpha_{i+1}, \beta_{i+1}) < \varphi_k(x, \alpha_i, \beta_i)$$

для всех i, чего не может быть, так как φ_k — норма. □

Продолжаем доказательство теоремы о выборе выигрывающей стратегии. Если $x \in \Game B$, то стратегия $\sigma_x = [\Phi(x)]$ должна действовать на произвольный кортеж $v=\langle b_0, \ldots, b_{k-1}\rangle \in FC$ так, чтобы $\langle u, \sigma_x(v), v\rangle \in M_{xk}$, где $u=\langle a_0, \ldots, a_{k-1}\rangle$ и $a_i=\sigma_x(b_0, \ldots, b_{i-1})$ для $i<k$. Лемма 6.2 обеспечивает возможность такой стратегии, а согласно лемме 6.1 эта стратегия (точнее, любая из стратегий, удовлетворяющих указанному условию) будет выигрывающей для игрока I в игре $G(B/x)$. Остается обеспечить при этом построение Φ как Σ^1_{2n+1}-функции на множестве $\mathfrak{D}B$.

С этой целью рассмотрим множество

$$M=\{\langle x, k, l, j, a\rangle : x\in\mathscr{X}\wedge\langle [l], a, [j]\rangle \in M_{xk}\}$$

(где, напомним, $[i]$ — кортеж с номером i). Оно принадлежит классу Π^1_{2n+1}: используем сказанное в § 4 о действии оператора $\mathfrak{D}$ (существование ВС для игрока II в определении $\leqslant_{xkuv}$ выражается посредством отсутствия ВС для игрока I). Так что согласно теореме униформизации § 5 множество M можно униформизовать Π^1_{2n+1}-множеством $C\subseteq M$. По сути, C является функцией, заданной на некотором подмножестве $\mathscr{X}\times\omega^3$ (целиком включающем $\mathfrak{D}B\times\omega^3$) со значениями в ω, и при этом $\langle x, k, l, j, C(x, k, l, j)\rangle \in M$ для любой четверки $\langle x, k, l, j\rangle$ из области определения C, а график C является множеством класса Π^1_{2n+1}.

Теперь уже можно дать построение Φ. Пусть $x\in\mathfrak{D}B$, и $j\in\omega$ произвольно. Значение $a=\Phi(x)(j)$ определяется следующим образом. Пусть $v=[j]=\langle b_0, \ldots, b_{k-1}\rangle$. Индукцией по $i\leqslant k$ определяем набор чисел a_i с помощью равенств

$$a_i=C(x, i, \operatorname{num}\langle a_0, \ldots, a_{i-1}\rangle, \operatorname{num}\langle b_0, \ldots, b_{i-1}\rangle),$$

где для каждого кортежа w через $\operatorname{num} w$ обозначен его номер, т. е. $w=[\operatorname{num} w]$. Наконец, положим $\Phi(x)(j)=a_k$.

Чтобы убедиться, что функция Φ обеспечивает доказательство теоремы о выборе выигрывающей стратегии, требуется только проверить, что она является Σ^1_{2n+1}-функцией на $\mathfrak{D}B$; то обстоятельство, что $[\Phi(x)]$ будет ВС для I в игре $G(B/x)$ при любом $x\in\mathfrak{D}B$, обеспечивается, как мы видели выше, леммой 6.1. Используя выбор множества C (в классе Π^1_{2n+1}) и различные правила из § 1, можно легко показать, что множество

$$U=\{\langle x, j, a\rangle : x\in\mathfrak{D}B\wedge\Phi(x)(j)=a\}$$

также принадлежит Π^1_{2n+1}. Однако

$$\Phi(x)=\varepsilon\leftrightarrow x\in\mathfrak{D}B\wedge\forall j\forall a(U(x, j, a)\rightarrow\varepsilon(j)=a),$$

откуда немедленно следует искомый факт о функции Φ. □

Обратимся к доказательству теоремы расщепления. Рассмотрим счетнозначное Σ^1_{2n+1}-множество $P\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$. Можно считать, что вторая ось есть $\mathscr{N}$ и, более того (см. начало доказательства теоремы 1 в § 3), что $P\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{D}$ (где $\mathscr{D}=2^\omega$ — канторов дисконтинуум). В этой ситуации покажем, что P накрывается суммой счетного числа однозначных Δ^1_{2n+1}-множеств.

Пусть $P=\{\langle x, \delta\rangle : \exists\gamma Q(x, \delta, \gamma)\}$, где $Q\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{D}\times\mathscr{N}$ есть Π^1_{2n}-множество. С помощью функций D и H из доказательства теоремы 1 § 3 определим множество

$$B=\{\langle x, \alpha, \beta\rangle \in\mathscr{X}\times\mathscr{N}^2\colon \langle x, D(\alpha, \beta), H(\beta)\rangle \notin Q\}.$$

Оно принадлежит Σ^1_{2n} (правило 2 § 1), и при этом, в соответствии с положениями упомянутого доказательства, мы имеем:

$$\mathfrak{D}B=\{x\in\mathscr{X}\colon \text{сечение } P/x \text{ не более чем счетно}\},$$

так что $\mathfrak{D}B=\mathscr{X}$ ввиду счетнозначности P. Теорема о выборе выигрывающей стратегии приносит Σ^1_{2n+1}-функцию $\Phi\colon\mathscr{X}\to\mathscr{N}$ такую, что стратегия $[\Phi(x)]$ будет выигрывающей для I в игре $G(P/x)$, каково бы ни было $x\in\mathscr{X}$. При этом можно считать, что $\Phi(x)\in\mathscr{D}$ при любом $x\in\mathscr{X}$ — см. замечание в начале разбора случая 1 в доказательстве теоремы 1 в § 3. Таким образом, Φ — функция из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{D}$.

Возвращаясь к разбору названного случая, обозначим через T множество всех последовательностей вида $t=\langle a_0, b_0, \ldots, a_{k-1}, b_{k-1}, a_k\rangle$ чисел $a_i=0$ или 1 и $b_i\in\omega$ произвольной нечетной длины $2k+1$. Каждой последовательности $t\in T$ сопоставляем функцию $F_t\colon\mathscr{D}\to\mathscr{D}$, действующую следующим образом. Пусть $\varepsilon\in\mathscr{D}$. Стратегия $\sigma=[\varepsilon]$, вместе с t, определяют с помощью соотношений $w(t)\subset\delta$ и (*) из разбора упомянутого случая единственную точку $\delta\in\mathscr{D}$, которую мы и обозначим через $F_t(\varepsilon)$. Все функции $F_t\colon\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ непрерывны.

Ключевое свойство семейства так определенных функций F_t состоит в том, что для любой точки $x\in\mathscr{X}$, если $\varepsilon\in\mathscr{D}$ и стратегия $[\varepsilon]$ является выигрывающей для игрока I в игре $G(B/x)$, то $P/x\subseteq\{F_t(\varepsilon)\colon t\in T\}$. Следовательно, определив

$$P_t=\{\langle x, F_t(\Phi(x))\rangle : x\in\mathscr{X}\},$$

мы получим семейство однозначных множеств $P_t\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{D}$, объединение которых накрывает P. При этом каждое P_t имеет класс Σ^1_{2n+1}, согласно выбору Φ и непрерывности F_t, а тогда и класс Δ^1_{2n+1}, поскольку

$$\langle x, \delta\rangle \in P_t \leftrightarrow \forall\delta'(\delta'\neq\delta\to\langle x, \delta'\rangle\notin P_t). \ \square$$

Закончив доказательство теоремы расщепления, приведем еще несколько следствий изложенной конструкции, касающихся однозначных и счетнозначных множеств в Σ^1_{2n}-детерминированном (для фиксированного натурального n) универсуме.

1. Счетнозначное Σ^1_{2n+1}-множество P накрывается счетнозначным Δ^1_{2n+1}-множеством — именно, объединением всех множеств P_t. Таким образом, в Σ^1_{2n}-детерминированном универсуме

каждое счетнозначное множество класса Σ^1_{2n+1} можно накрыть счетнозначным Δ^1_{2n+1}-множеством. При $n=0$, как и выше в подобных случаях, получается классический результат — теорема Н. Н. Лузина из [48].

Интересно, что однозначные Σ^1_{2n+1}-множества накрываются однозначными же Δ^1_{2n+1}-множествами — этот факт можно доказать также с помощью теоремы о выборе выигрывающей стратегии.

2. Предположим, что наше счетнозначное множество P принадлежит классу $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$. Тогда этот же класс Δ^1_{2n+1} имеет и его проекция $\pi P=\{x\colon \exists \delta P(x, \delta)\}$. В самом деле, то, что $\pi P \in \Sigma^1_{2n+1}$, тривиально (применим правило 6 § 1). А класс Π^1_{2n+1} дается равенством

$$\pi P=\bigcup_{t\in T}\{x\in\mathscr{X}\colon \forall\delta(\langle x, \delta\rangle\in P_t\rightarrow\langle x, \delta\rangle\in P)\}.$$

Итак, проекции счетнозначных Δ^1_{2n+1}-множеств являются (в предположении Σ^1_{2n}-Det) множествами класса Δ^1_{2n+1}. При $n=0$ этот результат дает классическую теорему П. С. Новикова [62]. Интересно, что каждое Δ^1_{2n+1}-множество $X\subseteq\mathscr{X}$ есть проекция подходящего однозначного множества $P\subseteq\mathscr{X}\times\mathscr{N}$ класса $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$ (для $n=0$ — теорема Лузина [45, 48]). Этот обратный результат также доказывается с помощью теоремы о выборе выигрывающей стратегии.

3. Униформизация. Снова предполагаем, что наше счетнозначное P имеет класс Δ^1_{2n+1}. Тогда P униформизуется Δ^1_{2n+1}-множеством $P'\subseteq P$. Действительно, по теореме расщепления, P есть сумма однозначных Δ^1_{2n+1}-множеств P_k, $k\in\omega$, причем проекция πP_k любого из них также принадлежит Δ^1_{2n+1} (см. выше). Поэтому каждое из множеств

$$P'_k=\{\langle x, \alpha\rangle\in P_k\colon x\notin\bigcup_{l<k}\pi P_l\}$$

имеет опять-таки класс $\mathbf{\Delta}^1_{2n+1}$. Остается взять в качестве P' объединение всех P'_k.

При $n=0$ теорема о том, что каждое счетнозначное множество класса $\mathbf{\Delta}_1^1$ (т. е. борелевское множество, ибо класс Δ_1^1 тождествен классу борелевских множеств по теореме М. Я. Суслина [71]) униформизуется Δ_1^1-множеством, была доказана П. С. Новиковым в [62].

Отметим принципиальное значение счетнозначности униформизуемого множества. В предположении Σ^1_{2n}-Det существует $\mathbf{\Pi}^1_{2n}$-множество, не допускающее униформизации множеством класса Σ^1_{2n+1} (и, разумеется, не являющееся счетнозначным). Такое множество нетрудно получить, отправляясь от пары

Π^1_{2n+1}-множеств пространства $\mathcal{N}$, для которых нарушается принцип редукции (существующих согласно теореме отделимости и редукции § 4). При $n=0$ построение выполнено в работе П. С. Новикова [62].

Конструкция, дающая униформизацию счетнозначных Δ^1_{2n+1}-множеств, может быть использована для униформизации счетнозначных множеств класса Σ^1_{2n+1}. Результат получается следующий: в Σ^1_{2n}-детерминированном универсуме каждое счетнозначное Σ^1_{2n+1}-множество можно униформизовать множеством, представляющим собой счетную сумму разностей Σ^1_{2n+1}-множеств.

Пока что остается открытой задача униформизации Σ^1_{2n+1}-множеств общего вида посредством множеств, существенно более простых, чем множества класса Σ^1_{2n+2} (обеспечивающего униформизацию даже Σ^1_{2n+2}-множеств по теореме униформизации из § 5). Для $n=0$ имеется важный результат Лузина — Янкова (см. [48] или [2, § 11]): счетные пересечения счетных сумм разностей $\Sigma_1{}^1$-множеств составляют униформизационный базис для класса $\Sigma_1{}^1$.

О других интересных приложениях теоремы о выборе выигрывающей стратегии в дескриптивной теории см. в [57; 58, гл. 6]. Там же содержится более подробная информация о результатах, приведенных нами в пп. 1, 2, 3. Отметим, что сама теорема о выборе выигрывающей стратегии доказана в [58] для «эффективных» проективных классов, где она может быть сформулирована более простым и естественным образом: в предположении Σ^1_{2n}-Det, если $\varepsilon \in \mathcal{N}$, A — множество класса $\Sigma^{1,\varepsilon}_{2n}$ и игрок I имеет ВС в игре $G(A)$, то игрок I имеет в указанной игре ВС, определяемую точкой класса $\Delta^{1,\varepsilon}_{2n+1}$.

§ 7. Обобщенные борелевское и суслинское представления проективных множеств в детерминированных универсумах. Проективные ординалы

Упоминавшиеся в § 1 нашего обзора теоремы М. Я. Суслина [71] о совпадении проективных классов $\Sigma_1{}^1$ и $\Delta_1{}^1$ соответственно с классами A-множеств и борелевских множеств также получили в детерминированных универсумах обобщения на более высокие проективные уровни. Но обобщения эти, в отличие от рассмотренных в предыдущих параграфах, предполагают и определенное обобщение рассматриваемых понятий. Пусть $\varkappa$ — бесконечный ординал, и фиксировано некоторое топологическое пространство (например, одно из точечных пространств в смысле § 1).

Через $\mathbf{B}_\varkappa$ обозначается наименьшее семейство множеств данного пространства, содержащее все открытые множества и замкнутое относительно операций дополнения и объединения в числе $<\varkappa$. Множества из $\mathbf{B}_\varkappa$ принято называть $\varkappa$-борелевскими. Обычные борелевские множества — это в точности множества из $\mathbf{B}_{\omega_1}$.

Понятие суслинского множества обобщается следующим образом. Предположим, что каждому кортежу u, составленному из ординалов, меньших $\varkappa$, сопоставлено замкнутое множество X_u рассматриваемого пространства (т. е. задана $\varkappa$-ветвящаяся система множеств). Образуем множество $X=\bigcup\limits_f \bigcap\limits_{m\geqslant 1} X_{f\restriction m}$, где объединение берется по всем ω-последовательностям f, составленным из ординалов, меньших $\varkappa$, а через $f\restriction m$ обозначается кортеж, образованный первыми m членами бесконечной последовательности f. Все конструируемые таким способом множества X называются $\varkappa$-суслинскими; семейство всех $\varkappa$-суслинских множеств обозначается через $S_\varkappa$ [1]. Очевидно, что при $\varkappa=\omega$ получается определение обычных суслинских множеств (они же A-множества), см. [1].

Результаты Суслина можно теперь сформулировать в виде равенств: $\Delta_1^1=\mathbf{B}_{\omega_1}$ и $\Sigma_1^1=S_\omega$.

Интересные результаты о борелевском и суслинском представлениях получены и для второго проективного уровня: $\Sigma_2^1\subseteq\subseteq\bigcup\limits_{\omega_1}\Delta_1^1$ — т. е. каждое Σ_2^1-множество есть сумма $\aleph_1$ множеств класса Δ_1^1 — Серпинский [66], и $\Sigma_2^1\subseteq S_{\omega_1}$ — Шенфилд [65].

И еще одно определение. Каждому натуральному m сопоставляется ординал δ_m^1 — верхняя грань длин Δ_m^1-норм (длиной нормы φ считается порядковый тип множества всех значений, принимаемых φ). Именно эти введенные Московакисом «проективные ординалы» составляют тот набор порядковых чисел, который дает возможность обобщить теоремы Суслина, Серпинского и Шенфилда на более высокие проективные уровни.

Теорема (AD). Пусть $n\in\omega$. Тогда:

(а) δ^1_{2n+1} и δ^1_{2n+2} — кардиналы, причем $\delta^1_{2n+2}=(\delta^1_{2n+1})^+$ (через λ^+ обозначается следующий за λ кардинал). Кроме того, существует (конечно, единственный) кардинал $\varkappa_{2n+1}$ такой, что $\delta^1_{2n+1}=\varkappa^+_{2n+1}$.

(б) $\Delta^1_{2n+1}=\mathbf{B}_{\delta^1_{2n+1}}$ и $\Sigma^1_{2n+1}=\mathbf{S}_{\varkappa_{2n+1}}$.

(в) $\Sigma^1_{2n+2}=\bigcup\limits_{\delta^1_{2n+1}}\Delta^1_{2n+1}=\mathbf{S}_{\delta^1_{2n+1}}$.

Исследования, итогом которых стала эта теорема, были начаты в работе Московакиса [54], а затем продолжены Кюненом, Мартином и Кехрисом; окончательный результат появился в статье [29].

---

1) В книге [3, гл. 8, § 6] дается другое, но эквивалентное определение $\varkappa$-суслинского множества. Эквивалентность доказана, например, в [58, гл. 2].

Довольно простые вычисления (см., например, [29]) показывают, что $\delta_1^1 = \omega_1$ и $\varkappa_1 = \omega$. Отсюда видно, что при $n=0$ утверждение (б) сформулированной теоремы превращается в результаты Суслина (и здесь уже гипотеза AD не нужна), а утверждение (в) даже усиливает результаты Серпинского и Шенфилда, превращая содержащиеся в них включения в точные равенства.

В проективно детерминированном универсуме (точнее, используя гипотезу Σ^1_{2n}—Det) можно доказать лишь только включения слева направо в пунктах (б) и (в). Пока неизвестно, являются ли обязательно кардиналами все ординалы $\delta_m{}^1$ в предположении PD, однако из Σ^1_{2n}-Det следует существование кардинала $\varkappa_{2n+1}$ такого, что $\varkappa_{2n+1} < \delta^1_{2n+1} \leqslant \varkappa^+_{2n+1}$.

Значительный интерес представляет проблема положения кардиналов $\delta_m{}^1$ в ряду кардиналов в полностью детерминированном универсуме. Мы уже указывали, что $\delta_1{}^1 = \omega_1$ и $\varkappa_1 = \omega$. Далее, удалось установить, что $\delta_2{}^1 = \omega_2$, $\varkappa_3 = \omega_\omega$, $\delta_3{}^1 = \omega_{\omega+1}$ и $\delta_4{}^1 = \omega_{\omega+2}$ в предположении AD [29, 58]. Совсем недавно было проведено вычисление следующей «триады»: $\varkappa_5 = \omega_\lambda$, где $\lambda = \omega^{(\omega^\omega)}$, и, следовательно, $\delta_5{}^1 = \omega_{\lambda+1}$ и $\delta_6{}^1 = \omega_{\lambda+2}$, об этом сказано в [36, заключение].

Интересно, что если вместо AD взять аксиому проективной детерминированности PD с полной аксиомой выбора AC, то получаются другие соотношения для начальных проективных ординалов: $\delta_2{}^1 \leqslant \omega_2$, $\varkappa_3 \leqslant \omega_2$, $\delta_3{}^1 \leqslant \omega_3$, $\delta_4{}^1 \leqslant \omega_4$. Кроме того, из $PD + AC$ следует, что $\Sigma_3{}^1 \subseteq \bigcup\limits_{\omega_2} \Delta_1{}^1$ и $\Sigma_4{}^1 \subseteq \bigcup\limits_{\omega_3} \Delta_1{}^1$. Отметим, что первое из записанных включений следует также из гипотезы $\Sigma_1{}^1$-Det, а тогда (см. § 2) и из аксиомы существования измеримого кардинала.

Все эти результаты (с доказательствами и ссылками на оригинальные работы) изложены в обзоре [29] и книге [58].

Из более поздних работ отметим исследования [32 и 27]. В статье [32] рассмотрены суслинские кардиналы — так называется каждый бесконечный кардинал $\varkappa$ такой, что $\mathbf{S}_\varkappa \not\subseteq \bigcup\limits_{\lambda<\varkappa} \mathbf{S}_\lambda$. Доказано, что в предположении AD первые ω суслинских кардиналов образуют ряд $\varkappa_1, \delta_1{}^1, \varkappa_3, \delta_3{}^1, \varkappa_5, \delta_5{}^1, \ldots$, а суслинские классы $\mathbf{S}_\varkappa$, соответствующие этим кардиналам — соответственно, ряд проективных классов $\Sigma_m{}^1$, $m \geqslant 1$. Следующие суслинские кардиналы оказываются связанными с классами так называемой гиперпроективной иерархии.

Статья [27] содержит несколько приложений игр на ординалах, т. е. игр, ходы в которых могут быть ординалами, меньшими некоторого заранее фиксированного бесконечного ординала λ (игры из § 2 соответствуют случаю $\lambda = \omega$). Уже для $\lambda = \omega_1$ можно доказать, не используя аксиому выбора, существование недетерминированных игр, но некоторые важные типы игр на проективных ординалах $\lambda=\delta_m^1$ оказываются детерминированными. Отсюда возникает ряд интересных приложений к «проективным» подмножествам проективных ординалов. Проективизация достигается здесь следующим образом. Пусть $m\geqslant 1$. Предполагая PD, можно построить Π_m^1-норму $\varphi:Z$ на δ_m^1, заданную на подходящем Π_m^1-множестве $Z\subseteq\mathcal{N}$. Теперь каждому множеству $X\subseteq\delta_m^1$ сопоставляется его «код» $\{\alpha\in Z:\varphi(\alpha)\in X\}$, по принадлежности которого к некоторому проективному классу определяется принадлежность тому же классу и множества X. Можно исследовать замкнутость так получаемых классов, состоящих из множеств ординалов, относительно тех или иных операций, и другие вопросы. Подробнее см. в [27].

§ 8. Некоторые приложения борелевских игр

Естественно, что рассмотренная выше в § 2 теорема о детерминированности борелевских множеств применяется прежде всего для изучения самих борелевских множеств. С ее помощью удалось прояснить несколько важных вопросов о свойствах этих множеств.

Напомним построение борелевской иерархии. Она образована борелевскими классами Σ_ξ^0, Π_ξ^0, Δ_ξ^0, где $1\leqslant\xi<\omega_1$. Начальный класс Σ_1^0 образован всеми открытыми множествами рассматриваемого пространства. При любом ξ класс Π_ξ^0 состоит из дополнений Σ_ξ^0-множеств, а Δ_ξ^0 есть общая часть классов Σ_ξ^0 и Π_ξ^0. Наконец, если $\xi\geqslant 2$, то в класс Σ_ξ^0 зачисляются всевозможные счетные суммы множеств, принадлежащих классам Π_η^0, где $1\leqslant\eta<\xi_1$. Каждое борелевское множество принадлежит одному из борелевских классов, а тогда и всем классам с большими индексами, поскольку выполняется условие возрастания: $\Sigma_\xi^0\cup\Pi_\xi^0\subset\Delta_\zeta^0$ при $\xi<\zeta$; кстати, включение здесь строгое.

Борелевская иерархия позволяет классифицировать борелевские множества в отношении их сложности: более простыми считаются множества, появляющиеся в ней раньше. Уместно воспользоваться следующими определениями. Всякое множество, принадлежащее классу Σ_ξ^0, но не принадлежащее Π_ξ^0, называется строго Σ_ξ^0-множеством. Точно так же вводится понятие строго Π_ξ^0-множества (принадлежит Π_ξ^0, но не Σ_ξ^0) и строго Δ_ξ^0-множества (принадлежит Δ_ξ^0, но не принадлежит ни одному из Σ_η^0, Π_η^0 с $\eta<\xi$). Таким образом, каждое борелевское множество является либо строго Σ_ξ^0-множеством, либо строго Π_ξ^0-множеством, либо строго Δ_ξ^0-множеством для некоторого (единственного) ординала $\xi<\omega_1$. Теперь, к примеру, строго Σ_5^0-множество можно рассматривать как более сложное, чем строго Π_4^0-множество, а скажем, два строго Σ_ξ^0-множества (для одного и того же ξ) — считать одинаково сложными.

Но здесь возникает естественный вопрос: существует ли внутреннее отношение между точечными множествами, соответствующее описанной «иерархической» сложности? Наиболее естественной выглядит идея рассмотреть гомеоморфию. Из результатов М. А. Лаврентьева [41] следует, что при $\xi \geqslant 3$ (а для класса Π_ξ^0 — и для $\xi = 2$) каждое точечное множество, гомеоморфное строго Σ_ξ^0 (Π_ξ^0, Δ_ξ^0)-множеству, само будет множеством этого же типа. Обратно, будут ли гомеоморфны друг другу два любых, скажем, строго Σ_ξ^0-множества? Для классов Σ_ξ^0 и Π_ξ^0 пока не получено исчерпывающего ответа, однако имеются важные частные результаты. Стил [72] установил, что при $\xi \geqslant 3$ гомеоморфны друг другу любые два строго Σ_ξ^0-множества (а также любые два строго Π_ξ^0-множества) первой категории, остающиеся строго Σ_ξ^0-множествами (строго Π_ξ^0-множествами соответственно) в пересечении с каждым бэровским интервалом. В то же время, как отмечено в [34, § 5], при $\xi \geqslant 3$ между любыми двумя строго Σ_ξ^0-множествами (или строго Π_ξ^0-множествами) X и Y имеется изоморфизм класса 1, т. е. такое взаимно однозначное отображение, при котором сохраняется класс F_σ (более слабое требование, чем сохранение открытости в определении гомеоморфизма). Оба результата используют теорему борелевской детерминированности.

Как видно, «строгие» классы Σ_ξ^0 и Π_ξ^0 по меньшей мере близки к тому, чтобы быть топологически однородными. Напротив, «строгие» Δ-классы существенно неоднородны, во всяком случае для непредельных индексов. М. А. Лаврентьев указал [42], что при $\xi \geqslant 1$ строго $\Delta_{\xi+1}^0$-множества разбиваются на $\aleph_1$ непустых подклассов так, что множества из разных подклассов друг другу не гомеоморфны (и не изоморфны в смысле изоморфизма класса 1).

В целом же топологическая классификация борелевских множеств остается открытой задачей. Значительно лучше обстоит дело с другой классификацией, введенной Уэджем. Пусть X и $\mathcal{Y}Y$ — множества, расположенные в точечных пространствах $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Пишут $X \leqslant_w Y$ (порядок Уэджа), когда существует непрерывная функция $F: \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ такая, что $X = F^{-1}(Y)$. Вводится и соответствующее отношение эквивалентности: $X \sim_w Y$, когда $X \leqslant_w Y$ и $Y \leqslant_w X$. Каждому точечному множеству X сопоставляется его степень Уэджа $[X] = \{Y : Y \sim_w X\}$ и модифицированная степень $[X]^* = [X] \cup [CX]$, где CX — дополнение множества X. Степени и модифицированные степени упорядочиваются следующим естественным образом:

$$[X] < [Y], \text{ когда } [X] \neq [Y] \text{ и } X \leqslant_W Y;$$

$$[X]^* < [Y]^*, \text{ когда } [X] < [Y] \text{ или } [X] < [CY].$$

С помощью очень простой игры (см. [3, гл. 8, § 6]) Уэдж доказал, что в полностью детерминированном универсуме для любой пары точечных множеств X, Y выполняется $X \leqslant_W Y$ или $Y \geqslant_W CX$. Другими словами, из AD следует линейная, а как было установлено Мартином — и полная упорядоченность модифицированных степеней Уэджа точечных множеств (см. [78]). Аксиома PD является достаточной для полной упорядоченности модифицированных степеней Уэджа проективных множеств, а теорема борелевской детерминированности обеспечивает полную упорядоченность модифицированных степеней борелевских множеств.

При этом все строго Σ^0_ξ-множества и строго Π^0_ξ-множества попадают в одну (зависящую от ξ) модифицированную степень, составленную из двух различных степеней Уэджа — степени строго Σ^0_ξ-множеств и степени строго Π^0_ξ-множеств. Напротив, строго Δ^0_ξ-множества (при любом фиксированном ξ) образуют несчетно много степеней Уэджа (для непредельных ξ это обнаруживается хотя бы подклассами Лаврентьева), структура и способы конструирования которых были изучены ван Везепом [78].

Каждый проективный (правило 2 § 1) и каждый борелевский класс Γ обладает следующим свойством замкнутости по Уэджу: если $X \in \Gamma$ и $Y \leqslant_W X$, то $Y \in \Gamma$. Структура замкнутых по Уэджу классов, состоящих только из борелевских множеств, рассматривается в работе [44].

Очень интересные применения борелевские игры нашли в теории C-множеств и R-множеств. Эти типы точечных множеств интенсивно изучались Е. А. Селивановским, Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном [28], П. С. Новиковым, А. А. Ляпуновым [9] и другими[1] с помощью методов основанной А. Н. Колмогоровым [7] теории операций над множествами. Было обнаружено [28, 9], что C-множества составляют собственную часть R-множеств, последние же все входят в проективный класс Δ_2^1. Кроме того, А. Н. Колмогоров (об этом см. в [9, введение]) доказал теорему о том, что все R-множества абсолютно измеримы и имеют свойство Бэра — наилучший классический результат для этих двух свойств регулярности.

Недавно Берджес [19] показал, что C-множества и R-множества можно получить действием гейм-оператора:

$$\{C\text{-множества}\} = \mathfrak{D}\Delta^0_2, \quad \{R\text{-множества}\} = \mathfrak{D}\Delta^0_3,$$

а $\mathfrak{D}\Delta^0_1 = \Delta_1^1$ — класс борелевских множеств. Таким образом, борелевские множества, C-множества и R-множества образуют

---

[1] Обзор результатов по C-множествам, R-множествам и теории операций см. в ([9, 10], [6, § 5]).

три первых шага в иерархии классов $\mathfrak{D}\Delta^0_\xi$, $1 \leqslant \xi < \omega_1$. Все эти классы дают в объединении класс $\mathfrak{D}\Delta_1^1 (\subset \mathbf{\Delta}_2^1)$ и расширяются с увеличением ξ: $\mathfrak{D}\Delta^0_\xi \subset \mathfrak{D}\Delta^0_\zeta$ при $\xi < \zeta$. Отметим, что все множества, принадлежащие $\mathfrak{D}\Delta_1^1$, имеют свойство Бэра (теорема 2 § 3 плюс теорема борелевской детерминированности) и абсолютно измеримы (утверждение, аналогичное теореме 2 из § 3, имеет место и для измеримости).

О приложениях борелевских игр к самой теории операций над множествами см. статью [64].

Детерминированность борелевских множеств получила приложения и в исследованиях свойств отношений эквивалентности. Сильвер показал в [68], что всякое $\mathbf{\Pi}_1^1$-отношение эквивалентности (т. е. отношение, график $\{\langle x, y\rangle : x$ эквивалентно $y\}$ которого принадлежит $\mathbf{\Pi}_1^1$) на любом из точечных пространств либо имеет не более чем счетное число классов эквивалентности, либо допускает совершенное (и тогда континуальное по мощности) множество, состоящее из попарно неэквивалентных элементов. Отношения первого вида уместно назвать счетными, а второго вида — континуальными. Берджес [17] установил, что для $\mathbf{\Sigma}_1^1$-отношений эквивалентности появляется еще одна возможность: неконтинуальное отношение, имеющее ровно $\aleph_1$ классов эквивалентности. Весьма сложные выкладки Сильвера и Берджеса включают и использование теоремы борелевской детерминированности.

Неборелевские игры также находят интересные приложения в исследовании отношений эквивалентности. Например, Стерн обнаружил (см. [75]), что в проективно детерминированном универсуме каждое проективное отношение эквивалентности, все классы эквивалентности которого суть борелевские множества ограниченного ранга (т. е. все они принадлежат какому-нибудь одному борелевскому классу Δ_ξ^0, $\xi < \omega_1$), является счетным либо континуальным. В работе [76] игры с игровыми множествами класса $\mathbf{\Pi}_1^1$ используются для изучения Σ_1^1-отношений эквивалентности (в частности, обладающих указанным свойством ограниченности по рангу).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров П. С.*, Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977, 368 с. (РЖМат, 1978, 2А450)
2. *Арсенин В. Я., Ляпунов А. А.*, Теория *А*-множеств. Успехи мат. наук, 1950, *5*, вып. 5 (39), 45—108
3. *Барвайс Дж.* (ред.), Справочная книга по математической логике, ч. II. Теория множеств. М.: Наука, 1982, 376 с. (РЖМат, 1983, 3А28К)
4. *Кановей В. Г.*, Проективная иерархия Н. Н. Лузина: современное состояние теории. В сб. «Справочная книга по математической логике, ч. II, теория множеств», М.: Наука, 1982, 273—364
5. —, Аксиома выбора и аксиома детерминированности. М.: Наука, 1984, 64 с.

6. —, Развитие и современное состояние дескриптивной теории множеств в свете трудов Н. Н. Лузина. Успехи мат. наук, 1985, *40*, вып. 3 (243), 117—155
7. *Колмогоров А. Н.*, Об операциях над множествами. Мат. сб., 1928, *35*, № 3—4, 414—422
8. *Лузин Н. Н.*, О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. М.: Изд-во АН СССР, 1935, 86 с.
9. *Ляпунов А. А.*, *R*-множества. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1953, *40*, 1—68 (РЖМат, 1954, 1598)
10. —, *Новиков П. С.*, Дескриптивная теория множеств. В сб. «Математика в СССР за 30 лет». М.: Гостехиздат, 1948, 243—255
11. *Новиков П. С.*, О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1951, *38*, 279—316
12. *Роджерс X.*, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972, 624 с. (РЖМат, 1973, 8А39)
13. *Успенский В. А.*, Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания. Успехи мат. наук, 1985, *40*, вып. 3 (243), 85—116
14. *Addison J. W.*, Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory. Fund. Math., 1958, *46*, № 2, 123—135 (РЖМат, 1961, 3Б17)
15. —, *Moschovakis Y. M.*, Some consequences of the axiom of definable determinateness. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, *59*, № 3, 708—712 (РЖМат, 1969, 7А58)
16. *Blackwell D.*, Infinite games and analytic sets. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1967, *58*, № 6, 1836—1837 (РЖМат, 1968, 11Б392)
17. *Burgess J.*, Effective enumeration of classes of Σ_1^1 equivalence relation. Indiana Univ. Math. J., 1979, *28*, № 3, 353—364 (РЖМат, 1980, 4А35)
18. —, Careful choices: a last word on Borel selectors. Notre Dame J. Form. Log., 1981, *22*, № 3, 219—226 (РЖМат, 1982, 3А23)
19. —, What are *R*-sets? Patras Logic Symp. Proc. Log. Symp., Patras, 18—22 Aug., 1980. Amsterdam, 1982, 307—324 (РЖМат, 1984, 1А44)
20. *Cenzer D., Mauldin R.*, Inductive definability: measure and category. Adv. Math., 1980, *38*, № 1, 55—90 (РЖМат, 1981, 5А29)
21. —, —, Borel equivalence and isomorphism of coanalytic sets. Rozpr. math., 1984, № 228, 38 p. (РЖМат, 1984, 12А31)
22. *Davis M.*, Infinite games of perfect information. Ann. Math. Stud., 1964, *52*, 85—101
23. *Friedman H.*, Higher set theory and mathematical practice. Ann. Math. Log., 1971, *2*, № 3, 326—357 (РЖМат, 1971, 9А40)
24. *Gale D., Stewart F.*, Infinite games with perfect information. Ann. Math. Stud., 1953, *2*, № 3, 245—256
25. *Guaspari D.*, Trees, norms and scales. London Math. Soc. Lect. Notes Ser., 1983, № 87, 135—161 (РЖМат, 1984, 1А45)
26. *Harrington L. A.*, Analytic determinacy and $0^{\#}$. J. Symbol. Log., 1978, *43*, № 4, 685—693 (РЖМат, 1979, 9А36)
27. —, *Kechris A. S.*, On the determinacy of games on ordinals. Ann. Math. Log., 1981, *20*, № 2, 109—154 (РЖМат, 1982, 1А30)
28. *Kantorovitch L., Livenson E.*, Memoire on the analytical operations and projective sets. Fund. Math., 1932, *18*, 214—279; 1933, *20*, 54—97
29. *Kechris A. S.*, AD and projective ordinals. Lect. Notes Math., 1978, *689*, 91—132 (РЖМат, 1979, 6А51)
30. —, On transfinite sequences of projective sets with an application to Σ_2^1 equivalence relations. Logic Colloquium 77. Amsterdam, 1978, 155—160
31. —, Forcing in analysis. Lect. Notes Math., 1978, *669*, 277—302 (РЖМат, 1979, 7А47)
32. —, Souslin cardinals, $\varkappa$-souslin sets and the scale property in the hyperprojective hierarchy. Lect. Notes Math., 1981, *839*, 127—146 (РЖМат, 1981, 8А41)

33. —, The axiom of determinacy implies dependent choices in $L(R)$. J. Symbol. Log., 1984, *49*, № 1, 161—175 (РЖМат, 1984, 12А25)
34. —, *Martin D. A.*, Infinite games and effective descriptive set theory. In: «Analytic Sets». London, 1980, 403—470
35. —, —, *Moschovakis Y. M.* (eds). Cabal Seminar 77—79. Lect. Notes Math., 1981, *839*, 1—274 (РЖМат, 1981, 8А35)
36. —, —, — (eds), Cabal Seminar 79—81. Lect. Notes Math., 1983, 1—288
37. —, *Moschovakis Y. M.* (eds), Cabal Seminar 76—77. Lect. Notes Math., 1978, *689*, 1—322 (РЖМат, 1979, 4А59)
38. *Kleinberg E. M.*, Infinitary combinatorics and the axiom of determinateness. Lect. Notes Math., 1977, *612*, 1—150
39. *Kondo M.*, Sur l'uniformisation des complementaires analytiques et les ensembles projectifs de seconde classe. Jap. J. Math., 1938, *15*, 197—230
40. *Kuratowski K.*, Sur les theoremes de separation dans la theorie des ensembles. Fund. Math., 1936, *26*, 183—191
41. *Lavrentieff M.*, Contribution a la théorie des ensembles homéomorphes. Fund. Math., 1924, *6*, 149—160
42. —, Sur les sous-classes et la classification de M. Baire. C. r. Acad. sci. Paris, 1925, *180*, 111—114
43. *Louveau A.*, A separation theorem for Σ_1^1 sets. Trans. Amer. Math. Soc., 1980, *260*, № 2, 363—378 (РЖМат, 1981, 2А32)
44. —, Some results in the Wadge hierarchy of Borel sets. Lect. Notes Math., 1983, *1019*, 28—55 (РЖМат, 1984, 7А36)
45. *Lusin N.*, Sur la classification de M. Baire. C. r. Acad. sci. Paris, 1917, *164*, 91—94. Рус. пер.: в кн. Лузин Н. Н., РЖМат, 1959, 10969, стр. 270—272 книги)
46. —, Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue. C. r. Acad. sci. Paris, 1925, *180*, 1572—1574. Рус. пер.: в кн.: (Лузин Н. Н., РЖМат, 1959, 10969, стр. 304—306 книги)
47. —, Sur la probleme de M. Hadamard d'uniformisation des ensembles. Mathematica, Cluj, 1930, 54—66
48. —, Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris, 1930. Рус. пер. (РЖМат, 1954, 3659)
49. —, *Novikoff P.*, Choix effectif d'un point dans un complementaire analytique donne par un crible. Fund. Math., 1935, *25*, 559—560. Рус. пер. (РЖМат, 1959, 10969)
50. *Mansfield R.*, A Souslin operation for Π_2^1. Isr. J. Math., 1971, *9*, № 3, 367—369 (РЖМат, 1971, 11А81)
51. *Martin D. A.*, The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy. Bull. Amer. Math. Soc., 1968, *74*, № 4, 687—689 (РЖМат, 1970, 9А45)
52. —, Measurable cardinals and analytic games. Fund. Math., 1970, *66*, № 3, 287—291 (РЖМат, 1970, 11А41)
53. —, Borel determinacy. Ann. Math., 1975, *102*, № 2, 363—371 (РЖМат, 1976, 5В708)
54. *Moschovakis Y. M.*, Determinacy and prewell orderings of the continuum. Math. Logic and Foundat. Set Theory», Amsterdam—London, 1970, 24—62 (РЖМат, 1972, 4А70)
55. —, Uniformization in a playful universe. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, *77*, № 5, 731—736 (РЖМат, 1972, 4А65).
56. —, The game quantifier. Proc. Amer. Math. Soc., 1972, *31*, № 1, 245—250 (РЖМат, 1972, 10А56)
57. —, Analytical definability in a playful universe. In: «Logic, Methodology and Philosophy of Science, IY». Amsterdam, 1973, 77—85
58. —, Descriptive set theory. Amsterdam, 1980, 637 p.
59. *Mycielski J.*, On the axiom of determinateness. Fund. Math., 1964, *53*, № 2, 205—224; 1966, *59*, № 2, 203—212 (РЖМат, 1964, 11А82)
60. —, *Steinhaus H.*, A mathematical axiom contradicting the axiom of choice.

Bull. Acad. pol. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1962, *10*, № 1, 1—3. (РЖМат, 1963, 1A89)
61. —, *Swierczkowski S.*, On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness. Fund. Math., 1964, *54*, № 1, 67—71 (РЖМат, 1965, 5Б78)
62. *Novikoff P.*, Sur. les fonctions implicites mesurables *B*. Fund. Math., 1931, *17*, 8—25. Рус. пер. (РЖМат, 1980, 2Б27К, с. 13—25 книги)
63. —, Sur la separabilite des ensembles projectifs de seconde classe. Fund. Math., 1935, *25*, 459—466. Рус. пер. (РЖМат, 1980, 2Б27К, с. 43—48 книги)
64. *Shilling K.*, *Vaught R. L.*, Borel games and the Baire property. Trans. Amer. Math. Soc., 1983, *279*, № 1, 411—428 (РЖМат, 1984, 4A44)
65. *Shoenfield J.*, The problem of predicativity. In: «Essays on the Foundations of mathematics». Jerusalem, 1961, 132—139
66. *Sierpinski W.*, Sur une classe d'ensembles. Fund. Math., 1925, *7*, 237—243
67. *Silver J.*, Some applications of model theory in set theory. Ann. Math. Log., 1970, *3*, № 1, 45—110 (РЖМат, 1971, 9A67)
68. —, Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations. Ann. Math. Log., 1980, *18*, № 1, 1—28 (РЖМат, 1980, 12A29)
69. *Solovay R. M.*, A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable. Ann. Math., 1970, *92*, № 1, 1—56 (РЖМат, 1971, 1A37)
70. —, The independence of *DC* from *AD*. Lect. Notes Math., 1978, *689*, 171—184 (РЖМат, 1979, 6A37)
71. *Souslin M.*, Sur une definition des ensembles mesurables *B* sans nombres transfinis. C. r. Acad. sci. Paris, 1917, *164*, 89—91
72. *Steel J. R.*, Analytic sets and Borel isomorphisms. Fund. Math., 1980, *108*, № 2, 83—88 (РЖМат, 1981, 3A534)
73. —, Determinateness and the separation property. J. Symbol. Log., 1981, *46*, № 1, 41—44 (РЖМат, 1981, 12A28)
74. —, Scales on Σ_1^1 sets. Lect. Notes Math., 1983, *1019*, 72—76 (РЖМат, 1984, 5A54)
75. *Stern J.* Effective partitions of the real line into Borel sets of bounded rank. Ann. Math. Log., 1980, *18*, № 1, 29—60 (РЖМат, 1980, 12A30)
76. —, Analytic equivalence relations and coanalytic games. Patras Logic Symp. Proc. Log. Symp., Patras, 18—22 Aug., 1980. Amsterdam, 1982, 239—260 (РЖМат, 1984, 3A55)
77. *Tanaka H.*, Recursion theory in analytical hierarchy. Comment. Math. Univ. St. Pauli, 1978, *27*, № 2, 113—132 (РЖМат, 1980, 1A42)
78. *Wesep R. van*, Wadge degrees and descriptive set theory. Lect. Notes Math., 1978, *689*, 151—170 (РЖМат, 1979, 4A59)