Информационные процессы, Том 4, № 2, 2004, стр. 127–132.

Многодольные графы с двумя вершинами в каждой доле

В.А. Любецкий, А.В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации РАН,
101447, Россия, Москва, Большой Каретный переулок, 19,
e-mail: lyubetsk@iitp.ru, slvstv@ipc.ru
Поступила в редколлегию 02.02.2004

Аннотация—В работе рассмотрен алгоритм поиска клики в многодольном графе с двумя вершинами в каждой доле. Отметим, что это позволяет решить частный случай задачи выравнивания, т.е. поиска набора похожих слов, по одному слову в каждой из n пар. Обсуждается сложность описания политопа клик.

1. ВВЕДЕНИЕ

n-Дольным графом называется неориентированный граф, каждая вершина которого окрашена в один из n цветов, причём все рёбра имеют разноцветные концы. Вершины одного цвета составляют *долю*. *n-Клика* — это полный подграф, имеющий n вершин, каждая своего цвета.

Поиск клики в многодольном графе интересен для решения задач биоинформатики. В частности, при поиске консенсуса для регуляторных областей. В этой задаче по n данным последовательностям в алфавите $\{a, c, g, t\}$ строится n-дольный граф Γ, вершинами которого служат слова из этих последовательностей фиксированной длины. Две вершины соединены ребром в графе Γ, если они являются словами из разных последовательностей и похожи друг на друга больше некоторого фиксированного порога. Например, они отличаются друг от друга в неболее чем фиксированном числе позиций. Системе попарно похожих слов (по одному слову в каждой из n последовательностей) соответствует n-клика в графе Γ. Если из некоторых соображений в каждой последовательности выбрано по два слова, то каждая доля графа Γ содержит по две вершины.

2. ПОЛИТОПЫ И ГРАФЫ

Рациональный *политоп* — это ограниченное замкнутое множество точек, выделяемое системой линейных неравенств с рациональными коэффициентами. Политоп равен выпуклой оболочке своих вершин. Напомним две теоремы о политопах, доказательство которых можно найти в книге [1].

Теорема 1 (Фаркаш). *Если система линейных неравенств от d переменных неразрешима, то в ней есть неразрешимая подсистема из не более чем $d + 1$ неравенства.*

Длина двоичной записи положительного целого числа n равна $\operatorname{size}(n) = \lceil \log_2(n + 1) \rceil$. Размер записи рационального числа, равного несократимой дроби, $\operatorname{size}(\frac{n}{m}) = 1 + \operatorname{size}(|n|) + \operatorname{size}(|m|)$. Размер записи рациональной $n \times m$ матрицы $\operatorname{size}(M) = nm + \sum_{i,j} \operatorname{size}(M_{ij})$.

Теорема 2 (Хачиян). *Существует алгоритм для проверки совместности системы рациональных линейных неравенств за полиномиальное от размера записи время. Более того, алгоритм даёт решение, если оно есть.*

Ниже индексы p, q, r равны 1 или 2, а индексы i, j, k пробегают значения от 1 до n.

Для целого $n \geq 2$ определим политоп Ξ_n в $4n^2$ - мерном пространстве, выделяемый следующей системой равенств и неравенств.

$$\forall i, j \; \forall p, q \; X_{ijpq} = X_{jiqp} \tag{1}$$
$$\forall i \; X_{ii11} + X_{ii22} = 1 \tag{2}$$
$$\forall i \; X_{ii12} = 0 \tag{3}$$
$$\forall i, j \; \forall p \; X_{ijp1} + X_{ijp2} = X_{iipp} \tag{4}$$
$$\forall i, j \; \forall p, q \; X_{ijpq} \geq 0 \tag{5}$$
$$\forall i, j, k \; \forall p, q, r \; X_{iipp} + X_{jkqr} \geq X_{ijpq} + X_{ikpr} \tag{6}$$

Для целого $n \geq 2$ политоп Ω_n в $4n^2$ - мерном пространстве равен выпуклой оболочке точек X с координатами

$$X_{ijpq} = \begin{cases} 1, \text{ если } p = \rho(i) \text{ и } q = \rho(j) \\ 0 \qquad\qquad \text{иначе.} \end{cases}$$

для всех возможных функций $\rho : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2\}$.

Лемма 1. *Каждая вершина X политопа Ω_n является вершиной политопа Ξ_n.*

Доказательство. Координаты точки X равны 0 или 1. При этом

$$X_{ijpq} = 1 \text{ тогда и только тогда, когда } X_{iipp} = 1 \text{ и } X_{jjqq} = 1.$$

$$\text{Если } i \neq j \text{ и } X_{ijpq} = 0, \text{ то } X_{iipp} = 0 \text{ или } X_{jjqq} = 0.$$

Равенства (1) и (3) очевидны. Равенства (2) следуют из того, что в каждой сумме одно слагаемое равно 1, а другое равно нулю.

Равенства (4) следуют из того, что в каждой сумме не более одного слагаемого равно 1, а другие равны нулю.

Проверим неравенство (6). Если $X_{ijpq} = X_{ikpr} = 1$, то обе части неравенства (6) равны 2. Если среди чисел X_{ijpq}, X_{ikpr} одно равно 1, то левая и правая части равны 1. Если $X_{ijpq} = X_{ikpr} = 0$, то правая часть неравенства (6) равна 0 и не превосходит левую.

Итак точка X принадлежит политопу Ξ_n. В точке X каждое из неравенств (5) обращается в равенство. Поэтому она является единственной точкой пересечения некоторых фасет политопа Ξ_n. Следовательно, точка X является вершиной. $\square$

n-Дольному графу Γ, имеющему по две вершины в каждой доле, сопоставим пространство $H(\Gamma)$, выделяемое всеми уравнениями $X_{ijpq} = 0$, где $i \neq j$ и p-я вершина i-й доли не соединена ребром с q-й вершиной j-й доли. Точке $X \in \Xi_n$ сопоставим n-дольный граф $\gamma(X)$, имеющий 2 вершины в каждой доле, у которого p-я вершина i-й доли соединена ребром с q-й вершиной j-й доли, где $j \neq i$, если $X_{ijpq} > 0$. Очевидно, если точка $X \in \Xi_n \cap H(\Gamma)$, то граф $\gamma(X)$ является подграфом графа Γ.

Удобно считать, что положительная координата точки $X \in \Omega_n$ — это *вес* вершины или ребра графа $\gamma(X)$. Вершины политопа Ω_n соответствуют n-кликам полного n-дольного графа с двумя вершинами в доле.

Лемма 2. *Если точка X принадлежит политопу Ξ_n, то граф $\gamma(X)$ содержит n-клику. Более того, эта клика может быть явно описана за время, ограниченное полиномом от n.*

Доказательство. Выделим в каждой из долей графа $\gamma(X)$ некоторую вершину, принадлежащую n-клике. При этом удобно рассматривать такую нумерацию вершин внутри доли, чтобы в клике оказались первые вершины каждой доли. Пусть для любого индекса i координата $X_{ii11} \geq X_{ii22}$.

Согласно (2), множество индексов долей $\{1, \ldots, n\}$ равно объединению двух множеств

$$\begin{aligned} S_0 &= \{i | X_{ii11} > \tfrac{1}{2}\} \\ S_1 &= \{i | X_{ii11} = X_{ii22} = \tfrac{1}{2}\} \end{aligned}$$

Из равенств (4) следует, что для любых индексов $i \in S_0$ и $j \neq i$ выполнено

$$X_{ij11} = X_{ii11} - X_{ij12} \geq X_{ii11} - X_{jj22} > 0.$$

Более того, если индекс $j \in S_1$, то

$$X_{ij12} = X_{ii11} - X_{ij11} \geq X_{ii11} - X_{jj11} > 0.$$

Поэтому 1-я вершина в каждой доле из S_0 связана ребром с 1-й вершиной в каждой другой доле из S_0 и с каждой вершиной в любой доле из S_1. Если множество S_1 содержит не более одного элемента, то искомый полный подграф включает 1-ю вершину в каждой доле.

Если для индексов i и p число $X_{iipp} > 0$, то p-я вершина i-й доли в графе $\gamma(X)$ соединена рёбрами с некоторой вершиной каждой другой доли в силу (4). Покажем, что в графе $\gamma(X)$ есть такая клика, что каждая доля из S_1 содержит вершину, принадлежащую этой клике. Если множество $S_1 = \{i, j\}$ содержит два элемента, то найдутся такие индексы p и q, что $X_{ijpq} > 0$.

Пусть множество S_1 содержит больше двух элементов. Из равенств (4) следует, что

$$\forall i, j \in S_1 \ \forall p \ \exists q \ X_{ijpq} \geq \frac{1}{4}.$$

Фиксируем элемент $a \in S_1$ Можно считать, что $\forall j \in S_1 \backslash \{a\} \ X_{aj11} \geq X_{aj12}$. Множество $S_1 \backslash \{a\}$ является объединением двух непересекающихся множеств

$$\begin{aligned} S_{10} &= \{j \in S_1 \backslash \{a\} \, | X_{aj11} > \tfrac{1}{4}\} \\ S_{11} &= \{j \in S_1 \backslash \{a\} \, | X_{aj11} = X_{aj12} = \tfrac{1}{4}\} \end{aligned}$$

Из неравенств (6) следует, что

$$\forall i, j, k \in S_1 \ \forall p, q, r \ X_{ijpq} + X_{ikpr} \leq \frac{1}{2} + X_{jkqr}.$$

Для любых разных индексов $i, j \in S_{10}$ 1-е вершины в a-й, i-й и j-й долях соединены рёбрами. Более того, для любых индексов $i \in S_{10}$ и $j \in S_1 \backslash \{a, i\}$ 1-е вершины в a-й, i-й долях соединены рёбрами с каждой вершиной j-й доли. Если множество S_{11} пусто или содержит единственный элемент, то искомая клика включает 1-е вершины каждой доли. Поэтому остаётся построить клику, вершины которой лежат в долях с номерами из множества S_{11}, когда оно имеет не меньше 2 элементов. Для этого фиксируем элемент $b \in S_{11}$ и разбиваем множество $S_{11} \backslash \{b\}$ в объединение двух непересекающихся подмножеств S_{110} и S_{111}. Повторяя этот процесс, мы либо построим n-клику в графе $\gamma(X)$, либо за не более чем n шагов придём к задаче построения клики, вершины которой лежат в долях с номерами из такого множества S, что

$$\forall i, j \in S \ \forall p, q \ X_{ijpq} = \frac{1}{4}.$$

Очевидно, что можно выбрать любую вершину в каждой доле из S. $\square$

Теорема 3. *Существует алгоритм, который для n-дольного графа Γ, имеющего по две вершины в каждой доле, ищет n-клику за время, ограниченное полиномом от n.*

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что граф Γ содержит n-клику тогда и только тогда, когда политоп $\Xi_n \cap H(\Gamma)$ непустой. Более того, если найдена точка X в политопе $\Xi_n \cap H(\Gamma)$, то n-клика определяется эффективно по лемме 2. Политоп Ξ_n задан системой из $O(n^3)$ равенств и неравенств с коэффициентами 0 или 1. Согласно теореме 2, поиск точки $X \in \Xi_n \cap H(\Gamma)$ требует полиномиального времени. □

Лемма 3. *Размерность политопов*

$$\dim \Omega_n = \dim \Xi_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказательство. Поскольку координаты вида X_{ij11} однозначно определяют точку политопа Ξ_n, то размерность

$$\dim \Omega_n \le \dim \Xi_n \le \frac{n(n+1)}{2}.$$

С другой стороны, политоп Ω_n содержит $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ независимую точку. Это точка с координатами $X_{ii11} = 0$, n точек, у которых среди координат X_{ii11} одна единица, а остальные — нули, и $\frac{n(n-1)}{2}$ точек, у которых среди координат X_{ii11} две единицы, а остальные — нули. Поэтому размерность политопа $\dim \Omega_n \ge \frac{n(n+1)}{2}$. □

3. СЛОЖНОСТЬ ОПИСАНИЯ ПОЛИТОПА Ω_n

Литерал — это пропозициональная переменная или её отрицание. 2-КНФ есть конъюнкция дизъюнкций пар литералов, 3-КНФ — конъюнкция дизъюнкций троек литералов. КНФ *позитивная*, если каждый её литерал является пропозициональной переменной.

Каждой 2-КНФ от m переменных

$$\varphi = \bigwedge_{i=1}^{\ell} \varphi_i,$$

имеющей ℓ дизъюнкций пар литералов, сопоставим $(\ell + m)$-дольный граф Γ_φ, имеющий по две вершины в каждой доле. Доли и вершины графа пронумерованы, каждой вершине сопоставлен литерал. При $1 \le i \le \ell$ вершины i-й доли графа Γ_φ соответствуют литералам из φ_i. При $1 \le j \le m$ первая вершина $(\ell + j)$-й доли соответствует j-й переменной, вторая вершина — отрицанию j-й переменной. Две вершины из разных долей графа Γ_φ соединены ребром, если соответствующие литералы не являются отрицанием один другого.

Лемма 4. *Для* 2*-КНФ* φ *от* m *переменных с* ℓ *дизъюнкциями*

1. *граф* Γ_φ *содержит* $(\ell + m)$*-клику тогда и только тогда, когда* 2*-КНФ* φ *выполнима;*
2. *если граф* Γ_φ *содержит* $(\ell + m)$*-клику, то литералы, связанные с вершинами* $(\ell + m)$*-клики, истинны на некоторой модели* 2*-КНФ* φ*. Следовательно, разным моделям соответствуют разные* $(\ell + m)$*-клики.*

Доказательство. (Ср. [2].) Переменным, от которых зависят литералы в вершинах клики, можно независимо придать такие значения, что все эти литералы будут истинны. Обратно, если 2-КНФ истинна при некоторой оценке переменных, то каждый конъюнктивный член φ_i содержит литерал, истинный при этой оценке. □

Заметим, что разные $(\ell + m)$-клики графа Γ_φ могут соответствовать одной и той же модели.

Напомним, что множество A называется NP*-трудным*, если для любого множества $B \in NP$ существует такая функция f, вычислимая за полиномиальное время, что $x \in B$ тогда и только тогда, когда $f(x) \in A$. Множество A называется *NP-полным*, если оно принадлежит классу NP и является *NP-трудным*.

Теорема 4 (Schaefer). *Множество позитивных 3-КНФ, имеющих такую модель, в которой каждая дизъюнкция содержит ровно один истинный литерал, является NP-полным.*

Доказательство. (См. [3].) Пусть пропозициональная формула $\varphi(\lambda, \mu, \nu)$ истинна тогда и только тогда, когда ровно одна из переменных λ, μ или ν истинна, а две другие ложны.

Формула $\lambda \vee \mu \vee \nu$ эквивалентна формуле

$$\exists \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_8 \varphi(\lambda, \xi_1, \xi_4) \wedge \varphi(\mu, \xi_2, \xi_4) \wedge \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_5) \wedge \varphi(\xi_3, \xi_4, \xi_6) \wedge \varphi(\nu, \xi_3, \xi_7) \wedge \varphi(\xi_7, \xi_7, \xi_8)$$

Формула $\mu \equiv \neg\nu$ эквивалентна формуле

$$\exists \xi_1, \xi_2\ \varphi(\mu, \nu, \xi_1) \wedge \varphi(\xi_1, \xi_1, \xi_2).$$

Для любой 3-КНФ легко построить равновыполнимую коньюнкцию формул вида $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, где ξ_1, ξ_2 и ξ_3 — пропозициональные переменные. Заменяя в ней подформулы вида $\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ на дизъюнкции $(\xi_1 \vee \xi_2 \vee \xi_3)$, получим позитивную 3-КНФ, которая имеет модель, в которой каждая дизъюнкция содержит ровно один истинный литерал, тогда и только тогда, когда исходная 3-КНФ выполнима. Так известная NP-полная проблема выполнимости 3-КНФ сводится за полиномиальное время к задаче распознавания рассматриваемого множества. □

Лемма 5. *Множество таких пар $\langle$позитивная 2-КНФ φ, двоичная запись числа $k\rangle$, что 2-КНФ φ имеет модель, на которой оценка k литералов — ложь, и в каждой модели не больше чем k ложных литералов, NP-трудное.*

Доказательство. Для позитивной 3-КНФ ψ, имеющей ℓ дизъюнкций, определим индукцией по длине формулы позитивную 2-КНФ ψ^*

1. $(\lambda \vee \mu \vee \nu)^* = (\lambda \vee \mu) \wedge (\lambda \vee \nu) \wedge (\mu \vee \nu)$
2. $(\psi_1 \wedge \psi_2)^* = \psi_1^* \wedge \psi_2^*$

На любой модели 2-КНФ ψ^* имеет не более 2ℓ ложных литералов, не более одного в каждой из подформул вида $(\lambda \vee \mu) \wedge (\lambda \vee \nu) \wedge (\mu \vee \nu)$, поскольку для каждой подформулы ложность одной переменной влечёт истинность двух других. Следовательно, инвертируя оценки переменных в модели для 2-КНФ ψ^*, где 2ℓ ложных литералов, мы получим модель для 3-КНФ ψ, на которой каждая дизъюнкция имеет один истинный литерал.

С другой стороны, инвертируя оценки всех переменных в модели для 3-КНФ ψ, на которой в каждой дизъюнкции ровно один истинный литерал, получим модель для 2-КНФ ψ^*, на которой ровно 2ℓ ложных литералов. Поиск такой модели сводится к поиску модели для 2-КНФ ψ^*, на которой не менее 2ℓ ложных литералов. Так известная из теоремы 4 NP-полная проблема сводится к рассматриваемой за время, ограниченное полиномом от длины входа. □

Лемма 6. *Модель для позитивной 2-КНФ φ от m переменных с ℓ дизъюнкциями, на которой наибольшее число литералов ложны, соответствует вершине политопа $\Omega_{\ell+m} \cap H(\Gamma_\varphi)$, в которой линейный функционал*

$$f(X) = \sum_{i=1}^{m} \{\textit{число вхождений } i\textit{-й переменной}\} X_{(\ell+i)(\ell+i)22}$$

достигает максимального значения.

Доказательство. Если 2-КНФ φ выполнима, то граф Γ_φ имеет n-клику. Поэтому пересечение $\Omega_{\ell+m} \cap H(\Gamma_\varphi)$ непустое. Из неравенств (5) следует, что это пересечение является гранью политопа $\Omega_{\ell+m}$. Поэтому вершины политопа $\Omega_{\ell+m} \cap H(\Gamma_\varphi)$ соответствуют моделям для 2-КНФ φ. Линейный функционал f достигает на политопе максимального значения на некоторой вершине X. При $i \leq m$ первая вершина $(\ell + i)$-й доли графа Γ_φ соответствует i-й переменной, а вторая — её отрицанию. Поэтому вершина X соответствует модели, на которой больше всего ложных литералов. □

Теорема 5. *Если существует недетерминированный алгоритм для распознавания фасет политопа Ω_n за время, ограниченное полиномом от n, то $coNP = NP$.*

Доказательство. За полиномиальное время принадлежность входа множеству из класса $coNP$ сводится к проверке несовместности системы линейных неравенств, причём для любого неравенства за полиномиальное время проверяется его принадлежность системе. По теореме 1 надо проверить несовместность недетерминированно выбранной подсистемы полиномиального размера. Согласно теореме 2 проверить несовместность можно за полиномиальное время алгоритмом Хачияна. Итак $coNP = NP$. □

Авторы благодарны К.Ю. Горбунову за обсуждение и многочисленные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Схрейвер А., *Теория линейного и целочисленного программирования*. М.: Мир, 1991, том 1.
2. Сэвидж Дж. Э., *Сложность вычислений*. М.: Факториал, 1998.
3. Schaefer T.J., The Complexity of Satisfability Problems, *Proceedings of the 10th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*. NY: ACM Press, 1978, pp. 216–226.