УДК 510.225+510.223

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Неуниформизуемые множества второго проективного уровня со счетными сечениями в виде классов Витали

Используя произведение инвариантных форсингов Йенсена, мы строим модель теории множеств **ZFC**, в которой принцип униформизации не выполняется для некоторого плоского множества типа Π^1_2, все вертикальные сечения которого являются счетными множествами, и, более определенно, классами Витали. Также определена подмодель этой модели, в которой истинно, что существует счетная Π^1_2-последовательность классов Витали P_n, объединение $\bigcup_n P_n$ которых не является счетным множеством; в этой подмодели аксиома выбора, разумеется, не имеет места.
Библиография: 30 наименований.

Ключевые слова: униформизация, форсинг, класс Витали.

DOI: https://doi.org/10.4213/im8521

§ 1. Основные результаты

Классом Витали вещественного числа x называется множество $x+\mathbb{Q}=\{x+q\colon q\in\mathbb{Q}\}$, т. е. класс эквивалентности числа x в смысле отношения эквивалентности Витали: $x\equiv y$, когда разность $x-y$ рациональна.[1] Понятно, что каждый класс Витали – счетное плотное подмножество вещественной прямой $\mathbb{R}$. Наша первая главная теорема продолжает серию исследований по проблеме униформизации в современной дескриптивной теории множеств, сообщая пример эффективно неуниформизуемого Π^1_2-множества, все вертикальные сечения которого счетны, и, более того, представляют собой простейший возможный для такого результата тип множеств: именно, являются классами Витали.

Теорема 1.1. *Существует модель теории множеств* **ZFC**, *в которой истинно, что имеется плоское Π^1_2-множество $P\subseteq\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, все вертикальные сечения $P_x=\{y\colon\langle x,y\rangle\in P\}$ которого являются классами Витали, и которое нельзя униформизовать никаким ROD множеством.*

Через ROD (real-ordinal definable) обозначают класс всех множеств, которые определимы формулами с вещественными числами и ординалами в роли параметров определения. Это наиболее широкий класс множеств, которые можно назвать *эффективно определимыми* в самом общем смысле.

Вторая главная теорема дает пример счетной Π^1_2-последовательности классов Витали, объединение которых не является счетным множеством. Модель,

Исследование В. Г. Кановея выполнено за счет гранта РФФИ 17-01-00705. Исследование В. А. Любецкого выполнено за счет гранта Российского научного фонда 14-50-00150.

[1] Как обычно, $\omega\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ – натуральные, рациональные и вещественные числа.

о которой идет речь в этой теореме, является *симметрической подмоделью* модели для теоремы 1.1, и аксиома выбора в ней, разумеется, неверна.

Теорема 1.2. *Существует модель теории множеств* **ZF**, *где истинно, что имеется множество* $P \subseteq \omega \times \mathbb{R}$ *класса* Π^1_2, *для которого*:

i) *все вертикальные сечения* $P_n = \{x : \langle n, x\rangle \in P\}$ – *классы Витали*;

ii) *объединение* $\bigcup_n P_n$ *не является счетным множеством или, что эквивалентно,* P *нельзя униформизовать никаким множеством.*[2]

§ 2. Комментарии

Этот раздел содержит необходимые определения и комментарии к теоремам 1.1 и 1.2 и краткое введение в структуру изложения.

2.1. Проблема униформизации. Эта проблема была введена в дескриптивную теорию множеств Н.Н. Лузиным[3] в заметке [1] и в более подробной статье [5]. Плоское множество Q вещественной плоскости $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ называется, по Лузину, *униформным* (или *однозначным*), если оно пересекается каждой вертикальной прямой не более чем в одной точке – в сущности, это означает, что Q – график частичной функции $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Если $Q \subseteq P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, множество Q униформно, и его проекция на первую ось совпадает с такой же проекцией множества P, то, по Лузину, множество Q *униформизует* множество P. Говоря по-другому, униформизовать данное плоское множество P – значит выбрать по одной точке q_x в каждом непустом вертикальном сечении P_x множества P, а затем свести все выбранные точки q_x, точнее, все пары вида $\langle x, q_x\rangle$, в одно униформизующее множество $Q \subseteq P$.

Разумеется, аксиома выбора дает возможность образовать униформизующее множество $Q \subseteq P$ в любом плоском множестве P, однако *проблема Адамара*, по Лузину, состоит в том, чтобы выяснить,[4] *возможно или нет определить точечное множество* E, *для которого нельзя было бы назвать никакого униформизующего множества* E'.

---

[2]Чтобы объяснить эквивалентность в ii), отметим следующее. Любое униформизующее множество $Q \subseteq P$ сводится к функции $f : \omega \to \mathbb{R}$, выбирающей элемент $f(n) \in P_n$ в каждом сечении P_n. Но тогда объединение $\bigcup_n P_n = \{f(n) + q : n \in \omega \wedge q \in \mathbb{Q}\}$ – счетное множество. Обратно, если $U = \bigcup_n P_n$ счетно, т.е. имеется функция $g : \omega \xrightarrow{\text{на}} U$, то мы получаем униформизующее множество $Q \subseteq P$, выбрав в каждом сечении P_n элемент $p_n = g(k_n)$, где k_n есть наименьший индекс k, для которого $g(k) \in P_n$.

[3]Заметка [1] не вошла в число работ Лузина по дескриптивной теории множеств, изданных в томе II Собрания сочинений [2], но ее основные положения рассмотрены, частично переведены и детально проанализированы В.А. Успенским в замечательной статье [3] (§ 4 статьи, называется "Униформизация, проблема Адамара"). Лузин приводит в [1] довольно длинную выдержку из первого письма Адамара в известных "пяти письмах" [4], которую можно понимать в том смысле, что Адамар делает различие между "чистым" цермеловским выбором и выбором элементов в непустых множествах при помощи конкретной, эффективно определенной функции, считая, впрочем, обе возможности математически корректными. Это дает Лузину повод связать с именем Адамара проблему униформизации. Успенский показал в [3, § 4], что роль Адамара здесь определенно преувеличена, а приоритет в связи с униформизацией и лежащими в ее основе понятиями принадлежит самому Лузину.

[4]Перевод курсива взят из [3, стр. 105], курсив Лузина и Успенского.

2.2. Эффективно определенные множества. Переходя на терминологию более современного типа, слова “определить” и “назвать” в только что приведенной цитате выражают существование эффективно определенных множеств, заданных конкретным определением или построением, в противовес множествам, полученным в результате чистых доказательств существования, например, с помощью аксиомы выбора. В этой терминологии, задача униформизации в самой общей форме состоит в том, чтобы *выяснить возможность униформизации эффективно определенных плоских множеств опять же эффективно определенными* (*и униформными*) *подмножествами.*

Как уже упоминалось, наиболее широким классом эффективно определимых множеств в современной теории множеств считается класс ROD (real-ordinal definable) всех множеств, которые определимы формулой с вещественными числами и ординалами в роли параметров определения.

Выделяется также подкласс OD $\subseteq$ ROD (ordinal definable) всех *ординально определимых* множеств, т. е. таких, которые определимы формулой с ординалами (но не вещественными числами) в роли параметров.

Более специальными подклассами в ROD и OD являются соответственно *проективные классы* $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, и $\mathbf{\Delta}^1_n = \mathbf{\Sigma}^1_n \cap \mathbf{\Pi}^1_n$ и *эффективно проективные классы* Σ^1_n, Π^1_n и $\Delta^1_n = \Sigma^1_n \cap \Pi^1_n$; здесь $n \geqslant 1$. О проективной иерархии см. наиболее обстоятельно в книге [6], а также в [7]–[11]. Напомним, что для уровня $n = 1$, $\mathbf{\Delta}^1_1$ = борелевские множества, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ = суслинские, или A-множества, $\mathbf{\Pi}^1_1$ = косуслинские, или CA-множества.

2.3. Классические теоремы униформизации. Первые результаты в связи с униформизацией были получены к 1930-му году самим Лузиным в сотрудничестве с П. С. Новиковым и В. Серпинским и изложены в заметках [5], [6]; они состоят в следующем:

(I) каждое плоское $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество может быть униформизовано борелевской комбинацией $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств и дополнительных $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств;

(II) существует плоское борелевское, т. е. $\mathbf{\Delta}^1_1$, множество, которое нельзя униформизовать борелевским же множеством, и даже множеством более широкого класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$;

(III) любое борелевское множество можно униформизовать $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеством;

(IV) любое борелевское множество может быть униформизовано борелевским множеством при условии, что все вертикальные сечения данного множества не более чем счетны; то же верно и для $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств.

Проблема униформизации множеств следующего по сложности класса $\mathbf{\Pi}^1_1$ косуслинских множеств некоторое время оставалась открытой, причем Лузин первоначально даже считал ее вообще невыполнимой (см. [1, п. 4]). Решил ее японский математик Кондо [12], доказавший, что

(V) любое плоское $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество можно униформизовать $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеством.

Определяющей частью доказательства Кондо был метод эффективного выбора точки в непустом $\mathbf{\Pi}^1_1$-множестве по П. С. Новикову, изложенный в работе [13]. Наконец, довольно простым следствием результата (V) является п. (VI).

(VI) любое плоское $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество можно униформизовать $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеством, но есть $\mathbf{\Pi}^1_2$-множество, не униформизуемое никаким $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеством.

2.4. Униформизация в моделях теории множеств. Неразрешимость. Результаты, упомянутые в п. 2.3, оставили открытым вопрос униформизации $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеств множествами, более сложными, чем $\mathbf{\Pi}^1_2$. Более поздние исследования показали, что этот вопрос и не мог быть решен в обычном смысле *доказательства* возможности или невозможности униформизации $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеств эффективно определимыми множествами. Именно, удалось построить *модели* аксиом теории Цермело–Френкеля[5] **ZFC**, реализующих как возможность, так и невозможность ROD-униформизации $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеств.

В направлении возможности униформизации, Гёдель [15] построил модель аксиом **ZFC** (класс **L** *конструктивных множеств*), в которой вещественная прямая допускает полное упорядочение класса Δ^1_2, а потому, выбрав в каждом непустом вертикальном сечении данного $\mathbf{\Pi}^1_2$-множества элемент наименьший в смысле этого полного упорядочения, мы получаем:

(VII) в модели Гёделя **L** любое плоское $\mathbf{\Pi}^1_2$-множество можно униформизовать $\mathbf{\Delta}^1_3$-множеством.

В некоторых других моделях теории множеств установлены другие теоремы униформизации для $\mathbf{\Pi}^1_2$, как, например, теорема Мартина–Соловея–Мэнсфилда об униформизации $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеств множествами класса $\mathbf{\Pi}^1_3$, см. [6, 8H.10], или теоремы униформизации в предположении гипотезы проективной детерминированности [6, 6C]. Более современные результаты см. в [16].

В направлении неуниформизации отметим результат [17, теорема 3]:

(VIII) с теорией **ZFC** совместимо, что множество

$$P = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 \colon y \notin \mathbf{L}[x]\}$$

(класса Π^1_2) не униформизуется никаким ROD-множеством.

Класс $\mathbf{L}[x]$ содержит все множества, конструктивные *относительно* данного x. Уместно отметить, что каждое вертикальное сечение

$$P_x = \{y \in \mathbb{R} \colon y \notin \mathbf{L}[x]\}$$

этого множества P либо пустое (если $\mathbb{R} \subseteq \mathbf{L}[x]$), либо же несчетное множество, т. е. оно в принципе не может быть непустым конечным или счетным. (А, к примеру, в модели Соловея из [18] вообще все сечения P_x ко-счетны.)

2.5. Неуниформизация $\mathbf{\Pi}^1_2$ множеств со счетными сечениями. Анализируя результат (VIII) в свете той роли свойства счетных сечений, которая видна, скажем, из сравнения результатов (II) и (IV), мы приходим к следующему естественному вопросу.

Проблема 1. Существует ли модель теории **ZFC**, в которой имеется ROD-неуниформизуемое $\mathbf{\Pi}^1_2$-множество со *счетными* вертикальными сечениями?

[5] Теория **ZFC**, включающая аксиому выбора, считается аксиоматической базой современной теории множеств. Существование модели **ZFC**, в которой истинно некоторое предложение A, означает, что A не противоречит аксиомам **ZFC** (говорят: совместимо с **ZFC**), и потому доказать *отрицание* $\neg A$ средствами теории множеств невозможно. Если также существует другая модель **ZFC**, в которой истинно $\neg A$, то и $\neg A$ не противоречит аксиомам **ZFC**, и потому предложение A *не зависит от* **ZFC**, или *неразрешимо в* **ZFC**, т. е. ни доказать, ни опровергнуть A в теории множеств невозможно. Такова ситуация с континуум-гипотезой [14] (наиболее известный пример неразрешимости).

Отметим, что результат (VIII) не решает этой проблемы, так как множество P имеет несчетные сечения в силу сказанного выше. Проблема 1, очевидно, связана с другим вопросом, обсуждение которого состоялось в авторитетных интернет-сообществах математиков Mathoverflow[6] и FOM.[7]

Проблема 2. Существует ли модель теории **ZFC**, в которой имеется *счетное* определимое множество вещественных чисел $X \neq \varnothing$, не содержащее ни одного OD (ординально определимого) элемента?

Эту задачу мы решили в [19], где доказано, что искомым свойством обладает генерическое расширение гёделевой модели $\mathbf{L}$ посредством счетной степени $\boldsymbol{J}^\omega$ (с конечной базой) введенного в [20] *минимального форсинга Йенсена*, который мы здесь обозначим через $\boldsymbol{J}$, для удобства ссылок. (Об этом форсинге см. также раздел 28A в [21].) Используя несчетное произведение форсингов, подобных $\boldsymbol{J}^\omega$, мы решили в последовавшей работе [22] и проблему 1, а именно: в подходящей модели неуниформизуемое $\varPi^1_2$-множество со счетными сечениями действительно существует.

Оставался, однако, открытым вопрос о том, могут ли счетные множества, упомянутые в проблемах 1 и 2, быть классами Витали? В отношении проблемы 2 положительный ответ был получен в работе [23], где построена модель, в которой имеется *определимый класс эквивалентности Витали, не имеющий ни одного определимого элемента.* Эта модель получена при помощи форсинга $\boldsymbol{J}^{\mathrm{inv}}$, по основным свойствам близкого к форсингу Йенсена $\boldsymbol{J}$, но отличного тем, что он инвариантен относительно рациональных сдвигов, вследствие чего его уместно назвать *инвариантным форсингом Йенсена.* Из-за инвариантности форсинг $\boldsymbol{J}^{\mathrm{inv}}$ присоединяет не одно генерическое число, а целый класс Витали $\boldsymbol{J}^{\mathrm{inv}}$-генерических чисел, который и становится определимым $\varPi^1_2$-множеством без определимых элементов. В другой работе [24] этот же форсинг использован для построения модели с OD парой множеств Грошек–Лейвера, также являющихся классами Витали.

2.6. Почему классы Витали. Теорема 1.1, т. е. *первый главный результат* настоящей статьи, положительно решает проблему 1 так, что вертикальные сечения множества-контрпримера оказываются классами Витали, а не просто произвольными счетными множествами. Для построения искомой модели используется форсинг $\mathbb{P} = \prod_{\xi<\omega_1} P_\xi$ (см. 12), где каждый множитель P_ξ полностью тождествен форсингу $\boldsymbol{J}^{\mathrm{inv}}$ в отношении основных свойств, но отличается в деталях построения, что делает все форсинги P_ξ в определенной мере независимыми друг от друга. Этим получено продолжение упомянутого результата работы [23] на вопросы униформизации.

Интерес именно к классам Витали в этом контексте обусловлен тем, что их можно рассматривать как простейшие счетные множества в $\mathbb{R}$, для которых не видно эффективного выбора элемента. В самом деле, если множество $X \subseteq \mathbb{R}$ содержит хотя бы одну изолированную, или даже односторонне-изолированную точку, то одну из таких точек можно эффективно выбрать. Но множество

[6] A question about ordinal definable real numbers. Mathoverflow, March 09, 2010. http://mathoverflow.net/questions/17608.

[7] Ali Enayat. Ordinal definable numbers. FOM Jul 23, 2010. http://cs.nyu.edu/pipermail/fom/2010-July/014944.html

$X \subseteq \mathbb{R}$ без односторонне-изолированных точек – это просто всюду плотное множество, если не считать замкнутых отрезков дополнительного множества. Классы же Витали, т. е. сдвиги множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ – это простейшие и наиболее типичные счетные плотные множества в $\mathbb{R}$.[8]

2.7. О счетных последовательностях классов Витали. Задачи ROD-униформизации можно ставить и для множеств $P \subseteq \omega \times \mathbb{R}$, но здесь имеется своя специфика.[9] Каждое такое множество распадается в счетную последовательность множеств-сечений $P_n = \{x : \langle n, x\rangle \in P\} \subseteq \mathbb{R}$. Соответственно, униформизующее множество – это счетная же последовательность чисел, которая всегда принадлежит ROD, ибо эффективно кодируется одним вещественным числом. Итак, любое множество $P \subseteq \omega \times \mathbb{R}$ допускает ROD-униформизацию, в общем, по тривиальным соображениям.

Но это в теории **ZFC**, где имеется аксиома выбора для первоначального выбора по точке в каждом непустом сечении P_n. В теории **ZF**, где аксиомы выбора нет, это невозможно из-за такого результата [17, теорема 8]:

(IX) с теорией **ZF** совместимо, что существует $\varPi^1_2$-множество $P \subseteq \omega \times \mathbb{R}$, которое невозможно униформизовать вообще никаким множеством.

В этом случае также можно ставить вопрос о счетности вертикальных сечений, который решается теоремой 1.2, *вторым главным результатом* настоящей статьи, причем снова вертикальные сечения контрпримера оказываются классами Витали. Таким образом, оказывается, что гипотеза существования счетной последовательности классов Витали P_n, объединение которых не является счетным множеством, не противоречит аксиомам **ZF**.

Отметим здесь, что непротиворечивость (относительно **ZF**) существования счетной последовательности счетных множеств с несчетным объединением принадлежит к первым результатам, полученным методом форсинга [14], [17], но именно для классов Витали результат получен нами впервые. О сложности именно этого варианта говорит то, что более сильный классический результат о непротиворечивости того, что сама вещественная прямая $\mathbb{R}$ есть объединение счетного числа счетных множеств, заведомо не допускает варианта для классов Витали. Именно, пусть $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\omega} P_n$, где каждое множество P_n – класс Витали. Нетрудно построить такое совершенное множество $X \subseteq \mathbb{R}$, что разность $x - y$ между любыми двумя числами $x \neq y$ из X иррациональна, т. е., другими словами, числа из X принадлежат разным классам Витали.[10] Но тогда

---

[8] Надо сказать, что интерес к отношению эквивалентности Витали и его классам имеет глубокие корни в дескриптивной теории множеств. Еще Серпинский [25, с. 147] и Лузин [26, § 64] указали, что множество $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ всех классов Витали обладает тем свойством, что (*) оно не может быть отображено в $\mathbb{R}$ взаимно однозначной борелевской функцией. С другой стороны, в моделях без аксиомы выбора множество $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ может иметь число Хартогса много больше континуума, см. [27]. (О числе Хартогса, равном наименьшему кардиналу, который не допускает взаимно однозначного отображения в данное множество, см. в книге [28, гл. 4].) Отношение Витали вообще играет ключевую роль в современных исследованиях борелевских отношений эквивалентности, будучи наименьшим (в смысле борелевской сводимости, [29]) среди тех из них, которые имеют свойство (*).

[9] Напомним, что, $\omega = \{0, 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ – множество натуральных чисел.

[10] Чтобы построить такое множество X, сначала доказывается, что если $J_1, \dots, J_n$ – конечная совокупность попарно непересекающихся замкнутых сегментов в $\mathbb{R}$ вида $[a, b]$, $a < b$, а q – рациональное число, то найдется совокупность меньших сегментов $J'_k \subseteq J_k$, для которых выполнено $(q + J'_k) \cap J'_l = \varnothing$ для всех $k \neq l$. (Для случая $n = 2$ это элементарно, и далее по

функция $f(x)$, определяемая соотношением

$$f(x) = \text{ то значение } n, \text{ для которого } x \in P_n,$$

является биекцией из континуального множества X на некоторое подмножество натурального ряда, чего, конечно, не может быть.

2.8. Структура статьи. Доказательство теорем 1.1 и 1.2 организовано следующим образом. Во-первых, надо сказать, что, следуя современному стилю в дескриптивной теории множеств, основанному на определенных технических преимуществах, в существенной части рассуждений мы будем рассматривать не вещественную прямую $\mathbb{R}$ с отношением эквивалентности Витали, а канторов дисконтинуум 2^ω со специальным отношением эквивалентности E_0 (см. определение 15.2). Именно в этом контексте будут доказаны теоремы 1.1 и 1.2 в §§ 17, 18; переход же к их прямым формулировкам (как выше в § 1) будет дан там же при помощи простых топологических аргументов.

Понятия, связанные с совершенными деревьями в множестве диадических кортежей $2^{<\omega}$ и их конечными произведениями (мультидеревьями), вводятся в §§ 3–6. Каждое множество P из совершенных деревьев $T \subseteq 2^{<\omega}$, замкнутое относительно обрезки деревьев по кортежам, можно рассматривать как форсинг, присоединяющий P-генерическую точку $x \in 2^\omega$.

Рассуждая в гёделевом конструктивном универсуме $\mathbf{L}$, мы строим форсинг для доказательства теоремы 1.1 в § 12 в виде произведения $\mathbb{P} = \prod_{\xi<\omega_1} P_\xi$ с конечной базой, где каждый сомножитель P_ξ (аналогичный форсингу $\boldsymbol{J}^{\text{inv}}$ из [23], см. выше п. 2.6) сам определяется как объединение $P_\xi = \bigcup_{\alpha<\omega_1} Q_\xi^\alpha$. Члены Q_ξ^α этого общего индуктивного построения – счетные множества совершенных *деревьев Сильвера* в $\mathbf{L}$, предплотные в P_ξ. Именно $\mathbb{P}$-генерическое расширение класса $\mathbf{L}$ послужит искомой моделью для теоремы 1.1.

Главный момент построения форсингов P_ξ, общий с техникой построения того же форсинга Йенсена, состоит в том, чтобы каждый последующий "слой" Q_ξ^α был в определенном роде *генерическим* над уже образованными "слоями" Q_ξ^γ, $\gamma < \alpha$. Это основано на довольно сложной конструкции в §§ 9–11, включающей технику расщепления и слияния совершенных деревьев. Отдельный аспект конструкции, введенный в [23] и не имеющий аналога в построении форсинга Йенсена, состоит в том, чтобы каждый "слой" Q_ξ^α оказался инвариантным относительно той группы гомеоморфизмов (фактически, $2^{<\omega}$ с покомпонентным сложением $\bmod 2$), которая индуцирует отношение E_0; этим обеспечивается, что каждый форсинг P_ξ приносит не одну генерическую точку, как в [20], а целый E_0-класс таких точек.

Главные свойства форсинга $\mathbb{P} = \prod_{\xi<\omega_1} P_\xi$ и соответствующих генерических расширений рассматриваются в §§12–15; критическим свойством является то,

индукции.) Используя этот факт, строится система замкнутых сегментов J_s в $\mathbb{R}$, индексированная конечными диадическими кортежами $s = \langle k_1, \dots, k_n \rangle$ чисел $k_i = 0, 1$ произвольной длины $n = \text{lh}(s)$, включая и "пустой" кортеж Λ длины $\text{lh}(\Lambda) = 0$, удовлетворяющая таким требованиям: (1) если кортеж s продолжается кортежем t, то $J_t \subseteq J_s$, (2) если $s \neq t$ – кортежи равной длины, то $J_s \cap J_t = \varnothing$, и (3) если $s \neq t$ – кортежи равной длины $\text{lh}(s) = \text{lh}(t) = n$, то $(q_n + J_s) \cap J_t = \varnothing$, где $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ – заранее фиксированное перечисление рациональных чисел. После того, как такая система построена, множество $X = \bigcap_n \bigcup_{\text{lh}(s)=n} J_s$ будет искомым.

что каков бы ни был генерический фильтр $G \subseteq \mathbb{P}$, если $\xi < \omega_1$, то только точка $x_\xi[G]$ и те точки $x \in 2^\omega$, которые ей E_0-эквивалентны, являются P_ξ-генерическими над $\mathbf{L}$ в $\mathbf{L}[G]$ (лемма 15.3). Заключительная часть §§16–18 содержит, собственно, доказательства главных теорем.

§ 3. Деревья и расщепление

Через $2^{<\omega}$ обозначается множество всех кортежей (конечных последовательностей) чисел 0, 1 – *диадических кортежей*, включающее *пустой кортеж* Λ. Если $t \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$, то $t^\frown i$ является продолжением кортежа t числом i как самым правым членом. Если $s, t \in 2^{<\omega}$, то $s \subseteq t$ означает, что кортеж t продолжает s (включая возможность $s = t$), а $s \subset t$ означает собственное продолжение. Длина кортежа s обозначается $\mathrm{lh}(s)$, и мы определяем $2^n = \{s \in 2^{<\omega} \colon \mathrm{lh}(s) = n\}$ (кортежи длины n).

Каждый кортеж $s \in 2^{<\omega}$ *действует* на 2^ω так, что $(s \cdot x)(k) = x(k) + s(k) \pmod 2$ при $k < \mathrm{lh}(s)$, а иначе просто $(s \cdot x)(k) = x(k)$. Если $X \subseteq 2^\omega$ и $s \in 2^{<\omega}$, то положим $s \cdot X = \{s \cdot x \colon x \in X\}$.

Аналогично, если $s \in 2^m$, $t \in 2^n$, $m \leqslant n$, то определим кортеж $s \cdot t \in 2^n$ условиями $(s \cdot t)(k) = t(k) + s(k) \pmod 2$ при $k < m$ и $(s \cdot t)(k) = t(k)$ при $m \leqslant k < n$. Если же $m > n$, то пусть $s \cdot t = (s \restriction n) \cdot t$. В обоих случаях, $\mathrm{lh}(s \cdot t) = \mathrm{lh}(t)$. Положим $s \cdot T = \{s \cdot t \colon t \in T\}$ для $T \subseteq 2^{<\omega}$.

Множество $T \subseteq 2^{<\omega}$ называется *деревом*, когда для любых кортежей $s \subset t$ из $2^{<\omega}$, из $t \in T$ следует $s \in T$. Любое непустое дерево $T \subseteq 2^{<\omega}$ содержит пустой кортеж Λ. Если $T \subseteq 2^{<\omega}$ – дерево и $u \in T$, то определим *обрезку* $T \restriction_u = \{t \in T \colon u \subseteq t \vee t \subseteq u\}$ дерева T.

Лемма 3.1. *Если $T \subseteq 2^{<\omega}$ – дерево, $\sigma \in 2^{<\omega}$, $u \in T$, то выполнено равенство $\sigma \cdot (T \restriction_u) = (\sigma \cdot T) \restriction_{\sigma \cdot u}$.*

Через $\mathbf{PT}$ обозначается множество всех *совершенных* деревьев $\varnothing \neq T \subseteq 2^{<\omega}$. Таким образом, непустое дерево $T \subseteq 2^{<\omega}$ принадлежит $\mathbf{PT}$, когда оно не имеет концевых вершин и изолированных ветвей. В этом случае существует самый длинный кортеж $s \in T$, для которого $T = T \restriction_s$; он обозначается $s = \mathrm{stem}(T)$ (*ствол* дерева T). Тогда мы имеем $s^\frown 1 \in T$ и $s^\frown 0 \in T$.

Если $T \in \mathbf{PT}$, то множество $[T] = \{a \in 2^\omega \colon \forall\, n (a \restriction n \in T)\}$ всех *ветвей дерева T* представляет собой совершенное множество в 2^ω. Заметим, что $[S] \cap [T] = \varnothing$, если и только если $S \cap T$ конечно.

Определение 3.2. Дерево $T \in \mathbf{PT}$ называется *деревом Сильвера*, символически $T \in \mathbf{ST}$, когда существует такая бесконечная последовательность кортежей $u_k = u_k(T) \in 2^{<\omega}$, что T состоит из всех кортежей вида

$$s = u_0{}^\frown i_0{}^\frown u_1{}^\frown i_1{}^\frown u_2{}^\frown i_2{}^\frown \cdots {}^\frown u_n{}^\frown i_n$$

и их подкортежей, где $n < \omega$ и $i_k = 0, 1$.

Тогда $\mathrm{stem}(T) = u_0$, а множество $[T]$ состоит из всех последовательностей $a = u_0{}^\frown i_0{}^\frown u_1{}^\frown i_1{}^\frown u_2{}^\frown i_2{}^\frown \cdots \in 2^\omega$, где $i_k = 0, 1$, $\forall\, k$. Положим

$$\mathrm{spl}_n(T) = \mathrm{lh}(u_0) + 1 + \mathrm{lh}(u_1) + 1 + \cdots + \mathrm{lh}(u_{n-1}) + 1 + \mathrm{lh}(u_n),$$

в частности, $\operatorname{spl}_0(T) = \operatorname{lh}(u_0)$, так что $\operatorname{spl}(T) = \{\operatorname{spl}_n(T) \colon n < \omega\} \subseteq \omega$ – множество всех *уровней расщепления* дерева T.

Пример 3.3. Если $s \in 2^{<\omega}$, то дерево $T[s] = \{t \in 2^{<\omega} \colon s \subseteq t \vee t \subset s\}$ принадлежит $\mathbf{ST}$, $\operatorname{stem}(T[s]) = u_0(T[s]) = s$, и $u_k(T[s]) = \Lambda$ при $k \geqslant 1$. Заметим, что $T[\Lambda] = 2^{<\omega}$, и $T[\Lambda]{\restriction}_s = (2^{<\omega}){\restriction}_s = T[s]$ для всех $s \in 2^{<\omega}$.

Лемма 3.4. *Пусть $T \in \mathbf{ST}$. Тогда справедливы следующие утверждения*:

i) *если $u \in T$, то $T{\restriction}_u \in \mathbf{ST}$*;

ii) *если $s \in 2^{<\omega}$, то $s \cdot T \in \mathbf{ST}$, $\operatorname{spl}(T) = \operatorname{spl}(s \cdot T)$, $u_k(s \cdot T) = s \cdot u_k(T)$*;

iii) *если множество $X \subseteq 2^\omega$ открыто и $X \cap [T] \neq \varnothing$, то найдется такой кортеж $s \in T$, что $T{\restriction}_s \subseteq X$*;

iv) *если $h \in \operatorname{spl}(T)$ и $u, v \in 2^h \cap T$, то $T{\restriction}_v = (u \cdot v) \cdot T{\restriction}_u$, и $(u \cdot v) \cdot T = T$*;

v) *если $h \in \operatorname{spl}(T)$ и $u \in 2^h \cap T$, то $T \subseteq \bigcup_{t \in 2^h} (t \cdot T{\restriction}_u)$*.

Доказательство. iii) Пусть $a \in X \cap [T]$. Понятно, что $\{a\} = \bigcap_n T{\restriction}_{a\restriction n}$, а потому $T{\restriction}_{a\restriction n} \subseteq X$ для некоторого n по компактности. Берем $s = a{\restriction}n$. Остальные утверждения очевидны. Лемма доказана.

§ 4. Расщепление деревьев Сильвера

Простое расщепление дерева $T \in \mathbf{PT}$ состоит из поддеревьев

$$T(\to 0) = T{\restriction}_{\operatorname{stem}(T)^\frown 0} \quad \text{и} \quad T(\to 1) = T{\restriction}_{\operatorname{stem}(T)^\frown 1},$$

так что $[T(\to i)] = \{x \in [T] \colon x(h) = i\}$, где $h = \operatorname{lh}(\operatorname{stem}(T))$. Ясно, что $T(\to i) \in \mathbf{PT}$, а если $T \in \mathbf{ST}$, то и $T(\to i) \in \mathbf{ST}$, причем

$$u_0(T(\to i)) = u_0(T)^\frown\langle i\rangle^\frown u_1(T), \qquad u_k(T(\to i)) = u_{k+1}(T) \quad \text{при} \quad k \geqslant 1,$$

и $\operatorname{spl}(T(\to i)) = \operatorname{spl}(T) \smallsetminus \{\operatorname{spl}_0(T)\}$.

Расщепление можно итерировать. Именно, если $s \in 2^n$, то определяем

$$T(\to s) = T(\to s(0))(\to s(1))(\to s(2)) \cdots (\to s(n-1)).$$

Отдельно положим $T(\to \Lambda) = T$ для пустого кортежа Λ.

Пример 4.1. В условиях примера 3.3 справедливо, что $T[s] = (2^{<\omega})(\to s) = (2^{<\omega}){\restriction}_s$ для любого кортежа s. Вообще, если $T \in \mathbf{ST}$ и $2^n \subseteq T$, то мы имеем $T(\to s) = T{\restriction}_s$ для всех $s \in 2^n$.

Лемма 4.2. *Пусть $T \in \mathbf{ST}$, $n < \omega$, и $h = \operatorname{spl}_n(T)$. Тогда*:

i) *если $s \in 2^n$, то $T(\to s) \in \mathbf{ST}$, $\operatorname{lh}(\operatorname{stem}(T(\to s))) = h$, и существует такой кортеж $u[s] \in 2^h \cap T$, что $T(\to s) = T{\restriction}_{u[s]}$*;

ii) *обратно, если $u \in 2^h \cap T$, то существует такой кортеж $s[u] \in 2^n$, что $T{\restriction}_u = T(\to s[u])$*;

iii) *следовательно, $\{T{\restriction}_u \colon u \in 2^h \cap T\} = \{T(\to s) \colon s \in 2^n\}$, а также $\{T{\restriction}_u \colon u \in T\} = \{T(\to s) \colon s \in 2^{<\omega}\}$*;

iv) *если $s \neq t \in 2^n$, то $T = \bigcup_{s \in 2^n} T(\to s)$ и $[T(\to s)] \cap [T(\to t)] = \varnothing$*.

Доказательство. i) Определим искомый кортеж так:

$$u[s] = u_0(T)^\frown\langle s(0)\rangle^\frown \cdots {}^\frown u_{n-1}(T)^\frown\langle s(n-1)\rangle^\frown u_n(T).$$

ii) Определим $s = s[u] \in 2^n$ через $s(k) = u(\mathrm{spl}_k(T))$ для всех $k < n$.

iii) Для доказательства второго равенства, пусть $u \in T$. Тогда мы имеем $\mathrm{spl}_{n-1}(T) < \mathrm{lh}(u) \leqslant \mathrm{spl}_n(T)$ для некоторого n. По определению 3.2 существует (единственный) кортеж $v \in 2^h \cap T$, где $h = \mathrm{spl}_n(T)$, для которого $T{\restriction}_u = T{\restriction}_v$. Остается сослаться на ii).

Доказательство п. iv) элементарно и опускается.

Лемма доказана.

Если $T, S \in \mathbf{ST}$ и $n \in \omega$, то определим $S \subseteq_n T$ (дерево S *n-измельчает* T), когда $S \subseteq T$ и $\mathrm{spl}_k(T) = \mathrm{spl}_k(S)$ для всех $k < n$. В частности, $S \subseteq_0 T$ равносильно $S \subseteq T$. По определению, если $S \subseteq_{n+1} T$, то $S \subseteq_n T$ (и $S \subseteq T$).

Лемма 4.3. *Если $T \in \mathbf{ST}$, $n < \omega$, $s_0 \in 2^n$ и $U \in \mathbf{ST}$, $U \subseteq T(\to s_0)$, то имеется единственное дерево $T' \in \mathbf{ST}$ такое, что $T' \subseteq_n T$ и $T'(\to s_0) = U$.*

Доказательство. Пусть $h = \mathrm{spl}_n(T)$. Выберем кортеж $u_0 = u[s_0] \in 2^h$ по лемме 4.2, i). Следуя лемме 3.4, iv), определим искомое дерево T' так, что $T' \cap 2^h = T \cap 2^h$, и если $u \in T \cap 2^h$, то $T'{\restriction}_u = (u \cdot u_0) \cdot U$; в частности, тогда выполнено $T'{\restriction}_{u_0} = U$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. *Пусть $\cdots \subseteq_5 T_4 \subseteq_4 T_3 \subseteq_3 T_2 \subseteq_2 T_1 \subseteq_1 T_0$ – бесконечная убывающая последовательность деревьев из $\mathbf{ST}$. Тогда справедливо, что*:

i) $T = \bigcap_n T_n \in \mathbf{ST}$;

ii) *если $n < \omega$ и $s \in 2^{n+1}$, то $T(\to s) = T \cap T_n(\to s) = \bigcap_{m \geqslant n} T_m(\to s)$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{spl}(T) = \{\mathrm{spl}_n(T_n) \colon n < \omega\}$; после этого оба утверждения очевидны. Лемма доказана.

§ 5. ДС-форсинги

Назовем *форсингом деревьями Сильвера*, или кратко ДС-*форсингом*, любое множество $P \subseteq \mathbf{ST}$, для которого:

(A) если $u \in T \in P$, то $T{\restriction}_u \in P$;

(B) если $T \in P$ и $\sigma \in 2^{<\omega}$, то $\sigma \cdot T \in P$.

Замечание 5.1. Любой ДС-форсинг P можно рассматривать как форсинг (множество вынуждающих условий) с порядком, а именно, если $T \subseteq T'$, то T – более сильное “условие”. Тогда форсинг P присоединяет точку $x \in 2^\omega$. Точнее говоря, если множество $G \subseteq P$ является P-генерическим над рассматриваемой моделью или универсумом множеств M (предполагается, что $P \in M$), то пересечение $\bigcap_{T \in G}[T]$ содержит единственную точку $x = x[G] \in 2^\omega$, и для этой точки выполнены равенства $M[G] = M[x[G]\,]$ и $G = \{T \in P \colon x \in [T]\}$. Точки $x[G]$ такого вида в свою очередь называются *P-генерическими*.

Соглашение 5.2. Деревья в $2^{<\omega}$ будут обозначаться буквами T, S, U, V, а множества деревьев, в частности, ДС-форсинги – буквами P, Q, R.

Пример 5.3. Множество $\mathbf{ST}$ всех деревьев Сильвера (т. е. сам *форсинг Сильвера*) является ДС-форсингом по очевидным причинам. Другой пример ДС-форсинга доставляет счетное множество $P_{\rm coh} = \{T[s] \colon s \in 2^{<\omega}\}$ всех деревьев $T[s]$ примера 3.3, т. е. *форсинг Коэна*.

Лемма 5.4. *Если* $\varnothing \neq Q \subseteq \mathbf{ST}$, *то множество*

$$P = \{\sigma \cdot (T{\restriction}_u) \colon u \in T \in Q \wedge \sigma \in 2^{<\omega}\} = \{\sigma \cdot (T(\to s)) \colon T \in Q \wedge s,\ \sigma \in 2^{<\omega}\}$$

есть ДС-форсинг.

Доказательство. Для доказательства свойства (A), пусть $T \in Q$ и $v \in S = \sigma \cdot (T{\restriction}_u)$. Тогда выполнено $w = \sigma \cdot v \in T{\restriction}_u$ и $v = \sigma \cdot w$. Отсюда вытекает $S{\restriction}_v = \sigma \cdot (T{\restriction}_u{\restriction}_w)$ по лемме 3.1, где $T{\restriction}_u{\restriction}_w = T{\restriction}_u$ или $= T{\restriction}_w$, при $w \subseteq u$ или $u \subset w$ соответственно. Второе равенство выделенной формулы леммы следует из леммы 4.2, iii). Лемма доказана.

Если $P \subseteq \mathbf{ST}$, $T \in \mathbf{ST}$, $n < \omega$ и все расщепленные деревья $T(\to s)$, $s \in 2^n$, принадлежат к P, то дерево T назовем *n-коллажем над P*. Через $\mathbf{Colg}_n(P)$ обозначается множество всех деревьев $T \in \mathbf{ST}$, которые являются n-коллажами над P, и пусть $\mathbf{Colg}(P) = \bigcup_n \mathbf{Colg}_n(P)$.

Лемма 5.5. *Пусть* $P \subseteq \mathbf{ST}$ – *ДС-форсинг и* $n < \omega$. *Тогда*:

i) *если* $T \in P$ *и* $s \in 2^{<\omega}$, *то* $T(\to s) \in P$;

ii) $P = \mathbf{Colg}_0(P) \subseteq \mathbf{Colg}_n(P) \subseteq \mathbf{Colg}_{n+1}(P)$;

iii) *если* $\sigma \in 2^{<\omega}$, *то предложения* $T \in \mathbf{Colg}_n(P)$ *и* $\sigma \cdot T \in \mathbf{Colg}_n(P)$ *равносильны*;

iv) *если* $T \in \mathbf{ST}$ *и* $s_0 \in 2^n$, *то предложения* $T(\to s_0) \in P$ *и* $T \in \mathbf{Colg}_n(P)$ *равносильны*;

v) *если* $U \in \mathbf{Colg}_n(P)$, $s_0 \in 2^n$, $S \in P$ *и* $S \subseteq U(\to s_0)$, *то существует такое дерево* $V \in \mathbf{Colg}_n(P)$, *что* $V \subseteq_n U$ *и* $V(\to s_0) = S$;

vi) *если* $U \in \mathbf{Colg}_n(P)$ *и множество* $D \subseteq P$ *открыто плотно в* P, *то существует дерево* $V \in \mathbf{Colg}_n(P)$, *удовлетворяющее* $V \subseteq_n U$ *и* $V(\to s) \in D$ *для всех* $s \in 2^n$.

Напомним, что множество $D \subseteq P$ *плотно* в P, когда для любого $S \in P$ существует дерево $T \in D$, $T \subseteq S$, и *открыто плотно*, если к тому же мы имеем $S \in D$ всякий раз, когда $S \in P$, $T \in D$ и $S \subseteq T$.

Доказательство леммы 5.5. Для вывода i) используется (A) и лемма 4.2, i). Чтобы доказать ii), используем i).

Доказательство iii) элементарно и опускается.

iv) Если $T \in \mathbf{Colg}_n(P)$, то по определению $T(\to s_0) \in P$. В обратную сторону, пусть $h = \operatorname{spl}_n(T)$, и пусть кортеж $h[s] \in 2^h \cap T$ удовлетворяет $T(\to s) = T{\restriction}_{u[s]}$ для всех $s \in 2^n$ по лемме 4.2, i). Если $T(\to s_0) \in P$ и $s \in 2^n$, то $T(\to s) = T{\restriction}_{u[s]} = (u[s] \cdot u[s_0]) \cdot T{\restriction}_{u[s]}$ по лемме 3.4, откуда $T(\to s) \in P$ согласно условию (B). Таким образом, $T \in \mathbf{Colg}_n(P)$.

v) По лемме 4.3 существует дерево $V \in \mathbf{ST}$, для которого $V \subseteq_n U$ и $V(\to s_0) = S$. Но $V \in \mathbf{Colg}_n(P)$ согласно iv).

Для вывода vi) применим 2^n раз v) для всех $s \in 2^n$.

Лемма доказана.

§ 6. Мультидеревья и мультифорсинги

Назовем *мультифорсингом* любую функцию $\mathbf{P}$, для которой $|\mathbf{P}| = \operatorname{dom}\mathbf{P} \subseteq \omega_1$ и каждое значение $\mathbf{P}(\xi)$, $\xi \in |\mathbf{P}|$, есть ДС-форсинг. Таким образом, мультифорсинг – это частичная ω_1-последовательность ДС-форсингов. Мультифорсинг $\mathbf{P}$ назовем *малым*, если область $|\mathbf{P}|$ и каждый форсинг $\mathbf{P}(\xi)$, $\xi \in |\mathbf{P}|$ – не более чем счетные множества.

Если $\mathbf{Q}$ – другой мультифорсинг, то определим покомпонентное объединение $\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q}$ как мультифорсинг, для которого $|\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q}| = |\mathbf{P}| \cup |\mathbf{Q}|$ и

$$(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})(\xi) = \begin{cases} \mathbf{P}(\xi), & \text{когда } \xi \in |\mathbf{P}| \smallsetminus |\mathbf{Q}|, \\ \mathbf{Q}(\xi), & \text{когда } \xi \in |\mathbf{Q}| \smallsetminus |\mathbf{P}|, \\ \mathbf{P}(\xi) \cup \mathbf{Q}(\xi), & \text{когда } \xi \in |\mathbf{P}| \cap |\mathbf{Q}|. \end{cases}$$

Аналогично, если $\langle \mathbf{P}_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda}$ – последовательность мультифорсингов, то покомпонентное объединение $\mathbf{P} = \bigcup^{\mathbf{cw}}_{\alpha<\lambda} \mathbf{P}_\alpha$ есть мультифорсинг, удовлетворяющий $|\mathbf{P}| = \bigcup_{\alpha<\lambda} |\mathbf{P}_\alpha|$ и $\mathbf{P}(\xi) = \bigcup_{\alpha<\lambda,\ \xi\in|\mathbf{P}_\alpha|} \mathbf{P}_\alpha(\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{P}|$.

Назовем *мультидеревом* любую функцию $\mathbf{T}\colon |\mathbf{T}| \to \mathbf{ST}$, где, аналогично предыдущему, $|\mathbf{T}| = \operatorname{dom}\mathbf{T} \subseteq \omega_1$, и каждое значение $\mathbf{T}(\xi)$, $\xi \in |\mathbf{T}|$, есть дерево Сильвера, но требуется, чтобы *множество* $|\mathbf{T}|$ *было конечным.* Множество всех мультидеревьев обозначается $\mathbf{MT}$.

Соглашение 6.1. Мультидеревья будут обозначаться полужирными буквами $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$, а ДС-форсинги – полужирными буквами $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$.

Если $\mathbf{P}$ – мультифорсинг, то $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ будет обозначать множество всех таких мультидеревьев $\mathbf{T}$, что $|\mathbf{T}| \subseteq |\mathbf{P}|$ и $\mathbf{T}(\xi) \in \mathbf{P}(\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{P}|$. Определим в этом случае совершенный “параллелепипед” в $2^{|\mathbf{T}|}$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{T}] &= \{x \in 2^{|\mathbf{T}|} \colon \forall \xi \in |\mathbf{T}|\ (x(\xi) \in [\mathbf{T}(\xi)])\} \\ &= \{x \in 2^{|\mathbf{T}|} \colon \forall \xi\ \forall m\ (x(\xi){\restriction}m \in \mathbf{T}(\xi))\}. \end{aligned}$$

Множество $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ тождественно *произведению* $\prod_{\xi\in|\mathbf{P}|} \mathbf{P}(\xi)$ *с конечной базой*; конечность базы означает, что в произведение отбираются только элементы $\mathbf{T}$ с *конечной* областью $|\mathbf{T}| \subseteq |\mathbf{P}|$.

Множество мультидеревьев $\mathbf{MT}$ упорядочивается покомпонентно, а именно, $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S}$ ($\mathbf{S}$ есть *более сильное* мультидерево), когда $|\mathbf{T}| \subseteq |\mathbf{S}|$ и $\mathbf{S}(\xi) \subseteq \mathbf{T}(\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{T}|$. Таким образом, порядок на мультидеревьях обратен покомпонентному включению. Самое слабое (и наименьшее в смысле порядка $\leqslant$) “условие” в $\mathbf{MT}$ и в любом $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ – это мультидерево $\mathbf{\Lambda}$, удовлетворяющее $|\mathbf{\Lambda}| = \varnothing$. Мультидеревья $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$, принадлежащие множеству $P \subseteq \mathbf{MT}$, *совместимы в* P, если найдется мультидерево $\mathbf{U} \in P$, удовлетворяющее $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{U}$ и $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{U}$.

Как обычно, множество $D \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ называется:

плотным в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$, когда

$$\forall\, \mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})\ \exists \mathbf{S} \in D\ (\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S}),$$

открыто плотным в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$, если к тому же

$$\forall\, \mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})\ (\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S} \wedge \mathbf{T} \in D \Rightarrow \mathbf{S} \in D);$$

предплотным в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$, если множество

$$D^{+} = \{\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P}) \colon \exists \mathbf{S} \in D \ (\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T})\} \quad \text{плотно в } \mathbf{MT}(\mathbf{P}).$$

Замечание 6.2. Как форсинг с указанным порядком, множество $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ присоединяет последовательность $\langle x_\xi \rangle_{\xi \in |\mathbf{P}|}$ генерических точек. Именно, каково бы ни было $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-генерическое над исходной моделью M множество $G \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ (предполагается, что $\mathbf{P} \in M$, поскольку тогда и $\mathbf{MT}(\mathbf{P}) \in M$), если $\xi \in |\mathbf{P}|$, то множество $G_\xi = \{\mathbf{T}(\xi) \colon \mathbf{T} \in G\}$ является $\mathbf{P}(\xi)$-генерическим над M, и, соответственно, точка $x_\xi[G] = x[G_\xi] \in 2^\omega$ (см. замечание 5.1) является $\mathbf{P}(\xi)$-генерической над M, и $M[G] = M[\langle x_\xi[G] \rangle_{\xi \in |\mathbf{P}|}]$.

§ 7. Имена и прямое вынуждение

Чтобы не повторяться, мы считаем, что мультифорсинг $\mathbf{P}$ фиксирован в этом разделе. Нашей целью будет ввести подходящую терминологию, касающуюся имен точек из 2^ω в контексте форсинга $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$.

Определение 7.1. $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-*именем точки* называется любое индексированное семейство $\mathbf{c} = \langle D^{\mathbf{c}}_{ni} \rangle_{n<\omega,\ i<2}$ множеств $D^{\mathbf{c}}_{ni} \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, для которого каждое объединение $D^{\mathbf{c}}_{n} = D^{\mathbf{c}}_{n0} \cup D^{\mathbf{c}}_{n1}$ плотно или хотя бы предплотно в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$, и если $\mathbf{T} \in D^{\mathbf{c}}_{n0}$ и $\mathbf{S} \in D^{\mathbf{c}}_{n1}$, то $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$ несовместны в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$.

Если множество $G \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ является $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-генерическим по крайней мере над семейством всех множеств $D^{\mathbf{c}}_{n}$, то мы определяем точку $\mathbf{c}[G] \in 2^\omega$ так, что $\mathbf{c}[G](n) = i$ если и только если $G \cap D^{\mathbf{c}}_{ni} \neq \varnothing$.

Таким образом, каждое $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-имя точки $\mathbf{c}$ является $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-именем для точки из 2^ω в стандартной терминологии форсинга.

Пример 7.2. Если $\xi \in |\mathbf{P}|$, то определим $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-имя $\dot{\boldsymbol{x}}_\xi$ таким образом, что каждое множество $D^{\xi}_{ni} = D^{\dot{\boldsymbol{x}}_\xi}_{ni}$ содержит все мультидеревья $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, для которых $|\mathbf{U}| = \{\xi\}$ и $s(n) = i$ всякий раз, когда $s \in \mathbf{U}(\xi)$ и $\mathrm{lh}(s) > n$. Понятно, что это имя $\dot{\boldsymbol{x}}_\xi$ является $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-именем генерической точки $x_\xi[G]$ (см. замечание 6.2). Точнее говоря, если множество $G \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ является $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-генерическим, то $\dot{\boldsymbol{x}}_\xi[G] = x_\xi[G]$.

Пусть $\mathbf{c}$ является $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-именем точки. Скажем, что мультидерево $\mathbf{T}$ (не обязательно $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$):

a) *прямо вынуждает* $\mathbf{c}(n) = i$, где $n < \omega$ и $i = 0, 1$, если имеется мультидерево $\mathbf{S} \in D^{\mathbf{c}}_{ni}$, для которого $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$;

b) *прямо вынуждает* $s \subset \mathbf{c}$, где $s \in 2^{<\omega}$, если для каждого $n < \mathrm{lh}(s)$, мультидерево $\mathbf{T}$ прямо вынуждает $\mathbf{c}(n) = i$, где $i = s(n)$;

c) *прямо вынуждает* $\mathbf{c} \notin [T]$, где $T \in \mathbf{PT}$, если имеется кортеж $s \in 2^{<\omega} \smallsetminus T$, для которого $\mathbf{T}$ прямо вынуждает $s \subset \mathbf{c}$.

Определение прямого вынуждения не связано с каким-то конкретным форсингом, но во всех трех вариантах совместимо с любым мультифорсингом.

Лемма 7.3. *Пусть* $\mathbf{P}$ *является мультифорсингом*, P *есть ДС-форсинг*, $\mathbf{c}$ *есть* $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-*имя*, $S \in P$ *и* $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$. *Тогда*:

i) *найдется такое мультидерево* $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ *и такое дерево* $S' \in P$, *что* $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S}$, $S' \subseteq S$ *и* $\mathbf{S}$ *прямо вынуждает* $\mathbf{c} \notin [S']$;

ii) *если* $n < \omega$ *и* $U \in \mathbf{Colg}_n(P)$, *то найдутся такие* $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ *и дерево* $U' \in \mathbf{Colg}_n(P)$, *что* $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S}$, $U' \subseteq_n U$ *и* $\mathbf{S}$ *прямо вынуждает* $\mathbf{c} \notin [U']$.

Доказательство. i) Понятно, что существуют такие мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ и кортеж $u \in 2^{<\omega}$, что $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S}$, $\mathrm{lh}(u) > \mathrm{lh}((\mathrm{stem}(S)))$ и $\mathbf{S}$ прямо вынуждает $u \subset \mathbf{c}$. Тогда существует и кортеж $v \in S$, удовлетворяющий $\mathrm{lh}(v) = \mathrm{lh}(u)$, $v \neq u$. Но тогда дерево $S' = S{\restriction}_v$ принадлежит P, $S' \subseteq S$, и по определению мультидерево $\mathbf{S}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [S']$.

ii) Пусть $s_1 \in 2^n$ (кортеж длины n). Применяя i) к дереву $S = U(\to s_1) \in P$, находим мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ с $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{S}$ и дерево $S' \in P$, $S' \subseteq S$, такие, что мультидерево $\mathbf{S}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [S']$. По лемме 5.5, v) найдется такое дерево $U' \in \mathbf{Colg}_n(P)$, что $U' \subseteq_n U$ и $U'(\to s_1) = S'$, так что $\mathbf{S}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [U'(\to s_1)]$. Берем следующий кортеж $s_2 \in 2^n$, и тем же способом находим $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ и дерево $U'' \in \mathbf{Colg}_n(P)$, для которых $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{U}$, $U'' \subseteq_n U'$ и $\mathbf{U}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [U'(\to s_2)]$. Дальнейшие построения проводятся аналогично с перебором всех кортежей из 2^n, что и приносит искомый результат. Лемма доказана.

§ 8. Генерическое продолжение мультифорсинга

Как мы уже упоминали во вводной части, форсинг для доказательства наших главных теорем будет определен в виде ω_1-объединения своих более простых составляющих частей-слоев. Следующее определение сообщает требования, которые будут предъявлены к каждому слою.

Через $\mathbf{ZFC}'$ обозначим подтеорию теории $\mathbf{ZFC}$, включающую все аксиомы кроме аксиомы степени, но с добавлением аксиомы, утверждающей существование $\mathcal{P}(\omega)$. (Тогда выводится существование ординала ω_1, а также континуальных множеств подобных $\mathbf{PT}$.)

Определение 8.1. Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}'$, а $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}$ – мультифорсинг. (Тогда $|\mathbf{P}| \in \mathfrak{M}$ и все множества $\mathbf{P}(\xi)$, $\xi \in |\mathbf{P}|$, а также множество $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$, принадлежат $\mathfrak{M}$.) Скажем, что другой мультифорсинг $\mathbf{Q}$ (не обязательно из $\mathfrak{M}$) есть $\mathfrak{M}$-*продолжение* мультифорсинга $\mathbf{P}$ при выполнении таких требований:

(A) $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}|$ и $\mathbf{Q}$ – малый мультифорсинг;

(B) если $\xi \in |\mathbf{P}|$, то $\mathbf{Q}(\xi)$ плотно в $\mathbf{Q}(\xi) \cup \mathbf{P}(\xi)$ и $\mathbf{Q}(\xi) \cap \mathbf{P}(\xi) = \varnothing$;

(C) если $\xi \in |\mathbf{P}|$ и множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{P}(\xi)$ предплотно в $\mathbf{P}(\xi)$, то
  a) множество D остается предплотным в $\mathbf{P}(\xi) \cup \mathbf{Q}(\xi)$,
  b) если $U \in \mathbf{Q}(\xi)$, то $U \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D$, т. е. существует конечное множество $D' \subseteq D$, для которого $U \subseteq \bigcup D'$;

(D) если $\xi \in |\mathbf{P}|$ и деревья $T, T' \in \mathbf{P}(\xi)$ несовместимы в $\mathbf{P}(\xi)$, то T, T' остаются несовместимыми и в $\mathbf{P}(\xi) \cup \mathbf{Q}(\xi)$;

(E) если множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ предплотно в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$, то оно остается предплотным в $\mathbf{MT}(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})$;

(F) если $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}$ является $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-именем точки, $\zeta \in |\mathbf{P}|$, множество

$$D(\sigma) = \{\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})\colon \mathbf{T} \text{ прямо вынуждает } \mathbf{c} \notin [\sigma \cdot \mathbf{T}(\zeta)]\}$$

плотно в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$, каков бы ни был кортеж $\sigma \in 2^{<\omega}$, и также $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})$, $U \in \mathbf{Q}(\zeta)$, то существует более сильное мультидерево $\mathbf{V} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{V}$, которое прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [U]$.

Смысл последнего условия (F) можно в целом пояснить так: если $\zeta < \omega_1$ и $\mathbf{c}$ есть $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-имя точки из 2^ω, то продолженный форсинг $\mathbf{MT}(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})$ вынуждает, что $\mathbf{c}$ не принадлежит к множествам вида $[U]$, где U – дерево в $\mathbf{Q}(\zeta)$ – если $\mathbf{c}$ не есть имя $\dot{\boldsymbol{x}}_\zeta$ одной из точек вида $\sigma \cdot x_\zeta[G]$, где $\sigma \in 2^{<\omega}$.

Теорема 8.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная транзитивная модель теории* $\mathbf{ZFC}'$, *а* $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}$ *– мультифорсинг. Тогда найдется малый мультифорсинг* $\mathbf{Q}$, *являющийся $\mathfrak{M}$-продолжением мультифорсинга* $\mathbf{P}$ *в смысле определения* 8.1.

Доказательство этой теоремы содержится в трех следующих параграфах. Само построение искомого мультифорсинга $\mathbf{Q}$ дается в § 9, доказательство требуемых свойств производится в §§ 10, 11.

§ 9. Построение продолжающего мультифорсинга

Следующее определение формализует конструкцию генерических мультидеревьев при помощи леммы 4.4 в следующем разделе.

Определение 9.1. Под *системой* мы будем понимать любую "матрицу" $\varphi = \langle\langle \nu^\varphi_{\xi m}, \tau^\varphi_{\xi m}\rangle\rangle_{\langle \xi,m\rangle \in |\varphi|}$, где $|\varphi| \subseteq \omega_1 \times \omega$ конечно, и если $\langle \xi, m\rangle \in |\varphi|$, то:

1) $\nu^\varphi_{\xi m} \in \omega$;
2) $\tau^\varphi_{\xi m} = \langle T^\varphi_{\xi m}(0), T^\varphi_{\xi m}(1), \dots, T^\varphi_{\xi m}(\nu^\varphi_{\xi m})\rangle$, где каждое $T^\varphi_{\xi m}(n)$ – дерево Сильвера, и $T^\varphi_{\xi m}(n+1) \subseteq_{n+1} T^\varphi_{\xi m}(n)$ при $n < \nu^\varphi_{\xi m}$.

В этом случае, если $n \leqslant \nu^\varphi_{\xi m}$ и $s \in 2^n$, то положим $T^\varphi_{\xi m}(s) = T^\varphi_{\xi m}(n)(\to s)$.

Если $\mathbf{P}$ – мультифорсинг, то через $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$ обозначим множество всех таких систем φ, что $|\varphi| \subseteq |\mathbf{P}| \times \omega$ и $T^\varphi_{\xi m}(n) \in \mathbf{Colg}_n(\mathbf{P}(\xi))$ для всех $\langle \xi, m\rangle \in |\varphi|$ и $n \leqslant \nu^\varphi_{\xi m}$. Тогда каждое дерево $T^\varphi_{\xi m}(s)$, $s \in 2^n$, принадлежит $\mathbf{P}(\xi)$.

Система φ *продолжает* систему ψ, символически $\psi \preccurlyeq \varphi$, если $|\psi| \subseteq |\varphi|$, и для любой пары $\langle \xi, m\rangle \in |\psi|$, во-первых, $\nu^\varphi_{\xi m} \geqslant \nu^\psi_{\xi m}$, и, во-вторых, $\tau^\varphi_{\xi m}$ продолжает $\tau^\psi_{\xi m}$ в том смысле, что $T^\varphi_{\xi m}(n) = T^\psi_{\xi m}(n)$ для всех $n \leqslant \nu^\psi_{\xi m}$.

Лемма 9.2. *Предположим, что* $\mathbf{P}$ *– мультифорсинг, и* $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$. *Тогда*:

i) *если* $\langle \xi, m\rangle \in |\varphi|$ *и* $n = \nu^\varphi_{\xi m}$, *то продолжение* φ' *системы* φ *через* $\nu^{\varphi'}_{\xi m} = n+1$ *и* $T^{\varphi'}_{\xi m}(n+1) = T^\varphi_{\xi m}(n)$ *принадлежит* $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$ *и* $\varphi \preccurlyeq \varphi'$;
ii) *если* $\langle \xi, m\rangle \notin |\varphi|$, *то продолжение* φ' *системы* φ *через* $|\varphi'| = |\varphi| \cup \{\langle \xi, m\rangle\}$, $\nu^{\varphi'}_{\xi m} = 0$ *и* $T^{\varphi'}_{\xi m}(0) = T$, *где* $T \in \mathbf{P}(\xi)$ *произвольно, принадлежит* $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$ *и* $\varphi \preccurlyeq \varphi'$.

Доказательство. i) Используем то, что $T \subseteq_n T$ для всех n, T. Доказательство пункта ii) элементарно и опускается. Лемма доказана.

Теперь согласно посылке теоремы 8.2 мы фиксируем счетную транзитивную модель $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}'$ и мультифорсинг $\mathbf{P} \in \mathfrak{M}$.

Определение 9.3. i) Фиксируем $\preccurlyeq$-возрастающую последовательность $\boldsymbol{\Phi} = \langle \varphi(j)\rangle_{j<\omega}$ систем $\varphi(j) \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, *генерическую над* $\mathfrak{M}$ в том смысле, что она пересекает каждое множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, плотное в $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$. (Плотность здесь означает, что ко всякой системе $\psi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$ имеется система $\varphi \in D$ для которой $\psi \preccurlyeq \varphi$.) Целью этого определения является построение другого мультифорсинга $\mathbf{Q}$ на основе $\mathbf{\Phi}$, см. пункт iv) ниже.

ii) В частности, $\mathbf{\Phi}$ пересекает каждое множество вида

$$D_{\xi mn} = \{\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P}) \colon \nu^{\varphi}_{\xi m} \geqslant n\},$$

где $\xi \in |\mathbf{P}|$ и $m, n < \omega$; поскольку все эти множества плотны согласно лемме 9.2 и принадлежат $\mathfrak{M}$. Поэтому, если $\xi \in |\mathbf{P}|$ и $m < \omega$, то существует такая бесконечная последовательность

$$\cdots \subseteq_5 T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(4) \subseteq_4 T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(3) \subseteq_3 T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(2) \subseteq_2 T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(1) \subseteq_1 T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(0)$$

деревьев $T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(n) \in \mathbf{Colg}_n(\mathbf{P}(\xi))$, что для любого j, если $\langle \xi, m\rangle \in |\varphi(j)|$ и $n \leqslant \nu^{\varphi(j)}_{\xi m}$, то $T^{\varphi(j)}_{\xi m}(n) = T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(n)$. Если $n < \omega$ и $s \in 2^n$, то положим $T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(s) = T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(n)(\to s)$; тогда $T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(s) \in \mathbf{P}(\xi)$, поскольку $T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(n) \in \mathbf{Colg}_n(\mathbf{P}(\xi))$.

iii) В этом случае согласно лемме 4.4 каждое множество

$$U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m} = \bigcap_n T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(n) = \bigcap_n \bigcup_{s \in 2^n} T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(s)$$

является деревом из $\mathbf{ST}$ (не обязательно из $\mathbf{P}(\xi)$), и то же верно для поддеревьев $U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s)$ по лемме 5.5, i), и мы согласно лемме 4.4 имеем

$$U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s) = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m} \cap T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(s) = \bigcap_{n \geqslant \mathrm{lh}(s)} T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(n)(\to s),$$

причем понятно, что $U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m} = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to \Lambda)$.

Сверх того, если кортежи $s, t \in 2^{<\omega}$ удовлетворяют $s \subseteq t$, то $T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(s) \subseteq T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(t)$ и $U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s) \subseteq U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to t)$, но если s, t являются $\subseteq$-несравнимыми, то

$$[U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s)] \cap [U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to t)] = [T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(s)] \cap [T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(t)] = \varnothing.$$

iv) Если $\xi \in |\mathbf{P}|$, то множество $Q_\xi = \{\sigma \cdot U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s) \colon m < \omega \wedge \sigma, s \in 2^{<\omega}\}$ является ДС-форсингом по лемме 5.4. Поэтому можно определить мультифорсинг $\mathbf{Q}$ соотношениями $|\mathbf{Q}| = |\mathbf{P}|$ и $\mathbf{Q}(\xi) = \mathbf{Q}(\xi) = Q_\xi$ для всех $\xi \in |\mathbf{P}|$.

Мы должны проверить, что мультифорсинг $\mathbf{Q}$ удовлетворяет всем требованиям определения 8.1; при этом требование 8.1, (A) прямо выполнено непосредственно по построению.

Проверка требования 8.1, (B)**.** Пусть $\xi \in |\mathbf{P}|$ и $T \in \mathbf{P}(\xi)$. Для вывода плотности множества $\mathbf{Q}(\xi)$ в $\mathbf{Q}(\xi) \cup \mathbf{P}(\xi)$ заметим, что множество $D(T)$ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P}) \cap \mathfrak{M}$, что $T^{\varphi}_{\xi m}(0) = T$ для какого-то m, принадлежит $\mathfrak{M}$ и плотно в $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$ по лемме 9.2, ii). Следовательно, $\varphi(J) \in D(T)$ для некоторого J согласно выбору $\mathbf{\Phi}$. Тогда $T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(0) = T$ для некоторого $m < \omega$. Но $U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to \Lambda) = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m} \subseteq T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(0)$ и $U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m} \in \mathbf{Q}(\xi)$.

Для вывода соотношения $\mathbf{Q}(\xi) \cap \mathbf{P}(\xi) = \varnothing$ предположим, что

$$U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s) \in \mathbf{Q}(\xi).$$

(Если $U = \sigma \cdot U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s)$, $\sigma \in 2^{<\omega}$, то заменим T на $\sigma \cdot T$.) Множество $D(T, \xi, m)$ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, что $\langle \xi, m\rangle \in |\varphi|$ и $T \smallsetminus T^{\varphi}_{\xi m}(n)(\to s) \neq \varnothing$, где $n = \nu^{\varphi}_{\xi m}$, принадлежит $\mathfrak{M}$ и плотно в $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$. Однако любая система $\varphi(j) \in D(T, \xi, m)$ обеспечивает $T \smallsetminus U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s) \neq \varnothing$. Проверка требования 8.1, (B) выполнена.

§ 10. Сохранение плотности

Этот параграф содержит доказательство свойств (C), (D), (E) определения 8.1 для мультифорсинга $\mathbf{Q}$ в контексте определения 9.3.

Проверка требования 8.1, (C)**.** Пусть $\xi \in |\mathbf{P}|$, и множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{P}(\xi)$ предплотно в $\mathbf{P}(\xi)$. Для проверки требования 8.1, (C), b), предположим, что $U \in \mathbf{Q}(\xi)$; требуется проверить $U \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D$. По определению $U = \sigma \cdot U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s)$, где $m < \omega$ и $s, \sigma \in 2^{<\omega}$. При этом можно предполагать, что $\sigma = \Lambda$, т. е., на самом деле, просто $U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s)$. (Общий случай сводится к случаю $U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s)$ подстановкой $\sigma \cdot D$ вместо D.) Сверх этого, можно предполагать, что и $s = \Lambda$, т. е. $U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}$, так как $U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(\to s) \subseteq U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}$. Итак, пусть $U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}$.

Множество $\Delta \in \mathfrak{M}$ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, что $\langle \xi, m\rangle \in |\varphi|$, и для каждого кортежа $t \in 2^n$, где $n = \nu^{\varphi}_{\xi M}$, имеется дерево $S_t \in D$ с $T^{\varphi}_{\xi m}(t) \subseteq S_t$, плотно в $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$ по лемме 5.5, vi) из-за предплотности самого множества D. Поэтому имеется такой индекс j, что $\varphi(j) \in \Delta$. Пусть это обеспечивается деревьями $S_t \in D$, $t \in 2^n$, где $n = \nu^{\varphi(j)}_{\xi m}$, так что $T^{\varphi(j)}_{\xi m}(t) \subseteq S_t$, $\forall\, t$, откуда мы имеем $T^{\varphi(j)}_{\xi m}(n) \subseteq^{\mathrm{fin}} D$. Тогда

$$U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m} \subseteq U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi m}(n) = T^{\varphi(j)}_{\xi m}(n) \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D.$$

Для проверки требования 8.1, (C), b) (т. е. того, что D предплотно в $\mathbf{P}(\xi) \cup \mathbf{Q}(\xi)$), достаточно показать, что каждое $U \in \mathbf{Q}(\xi)$ совместимо в $\mathbf{P}(\xi) \cup \mathbf{Q}(\xi)$ с каким-нибудь $T \in D$. По доказанному $U \subseteq \bigcup D'$, где $D' \subseteq D$ конечно. Найдется такое дерево $T \in D'$, что $[T] \cap [U]$ имеет непустую открытую внутренность в $[U]$, а потому существует открытое $X \subseteq 2^{\omega}$, для которого $\varnothing \neq X \cap [U] \subseteq [T] \cap [U]$. Но согласно лемме 3.4, iii) выполнено $[U\restriction_s] \subseteq X \cap [U]$ для подходящего кортежа $s \in U$. Итак, дерево $U' = U\restriction_s$ удовлетворяет $[U'] \subseteq [U] \cap [T]$, откуда $U' \subseteq U \cap T$. Наконец, $U' \in \mathbf{Q}(\xi)$, поскольку $\mathbf{Q}(\xi)$ есть ДС-форсинг.

Проверка требования 8.1, (D)**.** Допустим, что $\xi \in |\mathbf{P}|$ и деревья $T, T' \in \mathbf{P}(\xi)$ несовместимы в $\mathbf{P}(\xi)$. Тогда, если $S \in \mathbf{P}(\xi)$, то $S \not\subseteq T$ или $S \not\subseteq T'$, так что имеется поддерево $S' \in \mathbf{P}(\xi)$, $S' \subseteq S$, для которого $[S'] \cap [T] \cap [T'] = \varnothing$. Отсюда следует, что множество D всех деревьев $S \in \mathbf{P}(\xi)$, для которых $[S] \cap [T] \cap [T'] = \varnothing$, плотно в $\mathbf{P}(\xi)$. Остается применить 8.1, (C).

Проверка требования 8.1, (E). Пусть множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, предплотно в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$. Докажем, что оно предплотно в $\mathbf{MT}(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})$.

Зафиксируем мультидерево $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})$; требуется доказать, что $\mathbf{S}$ совместимо в $\mathbf{MT}(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})$ с каким-нибудь мультидеревом $\mathbf{D} \in D$. Согласно уже проверенному требованию 8.1, (B) можно предполагать, что $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$. Тогда каждая компонента $\mathbf{S}(\xi)$ мультидерева $\mathbf{S}$ ($\xi \in |\mathbf{S}|$) тождественна одному из деревьев $\sigma_\xi \cdot U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi,m_\xi}(\to s_\xi)$, где $m_\xi < \omega$ и σ_ξ, $s_\xi \in 2^{<\omega}$. Для упрощения, мы можем предположить, что $\sigma_\xi = \Lambda$ для всех $\xi \in |\mathbf{S}|$, т. е. $\mathbf{S}(\xi) = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi,m_\xi}(\to s_\xi)$. (Если это не так, то определим $\overline{\mathbf{U}} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$ для любого $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$ так, что $|\overline{\mathbf{U}}| = |\mathbf{U}|$, $\overline{\mathbf{U}}(\xi) = \mathbf{U}(\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{U}| \smallsetminus |\mathbf{S}|$ и $\overline{\mathbf{U}}(\xi) = \sigma_\xi \cdot \mathbf{U}(\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{U}| \cap |\mathbf{S}|$, и заменим множество D множеством $\overline{D} = \{\overline{\mathbf{U}} \colon \mathbf{U} \in D\}$.)

Итак, предполагаем, что $\mathbf{S}(\xi) = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi,m_\xi}(\to s_\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{S}|$.

Рассмотрим множество $\Delta \in \mathfrak{M}$ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, что имеются мультидеревья $\mathbf{D} \in D$ и $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, числа k_ξ и кортежи $t_\xi \in 2^{<\omega}$, $\xi \in |\mathbf{U}|$, для которых $\mathbf{D} \leqslant \mathbf{U}$ и выполнены следующие требования:

1) $|\mathbf{S}| \subseteq |\mathbf{U}|$, и если $\xi \in |\mathbf{S}|$, то $k_\xi = m_\xi$;
2) если $\xi \in |\mathbf{U}|$, то $\langle \xi, k_\xi \rangle \in |\varphi|$, $\mathrm{lh}(t_\xi) \leqslant \nu^\varphi_{\xi,k_\xi}$, $s_\xi \subset t_\xi$, $\mathbf{U}(\xi) = T^\varphi_{\xi,k_\xi}(t_\xi)$.

Лемма 10.1. *Множество Δ плотно в $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$.*

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$. Требуется найти систему $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, удовлетворяющую $\psi \preccurlyeq \varphi$. Согласно лемме 9.2, i) можно предполагать, что если $\xi \in |\mathbf{S}|$, то $\langle \xi, m_\xi \rangle \in |\psi|$, иначе просто добавим $\langle \xi, m_\xi \rangle$ к $|\psi|$ и положим $\nu^\psi_{\xi,m_\xi} = 0$ и $T^\psi_{\xi,m_\xi}(0) = S$, где $S \in \mathbf{P}(\xi)$ – любое дерево.

Определим систему $\chi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, продолжая ψ таким образом, что $|\chi| = |\psi|$, и если $\xi \in |\mathbf{S}|$ (тогда $\langle \xi, m_\xi \rangle \in |\psi|$, см. выше), то $\nu^\chi_{\xi,m_\xi} = \nu^\psi_{\xi,m_\xi} + 1$, $T^\chi_{\xi,m_\xi}(\nu^\chi_{\xi,m_\xi}) = T^\psi_{\xi,m_\xi}(\nu^\psi_{\xi,m_\xi})$ и $t_\xi = s_\xi{}^\frown 0$. Тогда $\psi \preccurlyeq \chi$, $s_\xi \subset t_\xi$, $\mathrm{lh}(t_\xi) = \nu^\chi_{\xi,m_\xi}$. Если же $\langle \xi, m \rangle \in |\psi|$ не имеет вида $\langle \xi, m_\xi \rangle$, $\xi \in |\mathbf{S}|$, то ничего не меняем: $\nu^\chi_{\xi m} = \nu^\psi_{\xi m}$ и $T^\chi_{\xi m}(n) = T^\psi_{\xi m}(n)$ для $n \leqslant \nu^\psi_{\xi m}$.

Определим мультидерево $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ условиями $|\mathbf{T}| = |\mathbf{S}|$ и $\mathbf{T}(\xi) = T^\chi_{\xi,m_\xi}(t_\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{S}|$. В силу предплотности D найдутся мультидеревья $\mathbf{D} \in D$ и $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, для которых $\mathbf{D} \leqslant \mathbf{U}$ и $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{U}$. Тогда $|\mathbf{S}| = |\mathbf{T}| \subseteq |\mathbf{U}|$.

Теперь определим систему $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$ так, что $|\chi| \subseteq |\varphi|$, и если $\langle \xi, m \rangle \in |\chi|$ и $n < \nu^\chi_{\xi m}$, то $\nu^\varphi_{\xi m} = \nu^\chi_{\xi m}$ и $T^\varphi_{\xi m}(n) = T^\chi_{\xi m}(n)$. Определение же значений $T^\varphi_{\xi m}(\nu^\chi_{\xi m})$, и также определение для области $|\varphi| \smallsetminus |\chi|$ происходит так.

I) Если пара $\langle \xi, m \rangle \in |\chi|$ не имеет вида $\langle \xi, m_\xi \rangle$, где $\xi \in |\mathbf{S}| = |\mathbf{T}|$, то просто $T^\varphi_{\xi m}(\nu^\chi_{\xi m}) = T^\chi_{\xi m}(\nu^\chi_{\xi m})$.
II) Пусть $\xi \in |\mathbf{T}| = |\mathbf{S}|$, так что $\langle \xi, m_\xi \rangle \in |\chi|$. Положим $k_\xi = m_\xi$. Имеем $\mathbf{U}(\xi) = S \subseteq T = \mathbf{T}(\xi) = T^\chi_{\xi,k_\xi}(t_\xi)$, ибо $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{U}$. Напомним, что $T^\chi_{\xi,k_\xi}(t_\xi) = T^\chi_{\xi,k_\xi}(n)(\to t_\xi)$ (см. определение 9.1), где $n = \nu^\chi_{\xi,k_\xi}$ и дерево $U = T^\chi_{\xi,k_\xi}(n)$ принадлежит $\mathbf{Colg}_n(\mathbf{P}(\xi))$, а дерево $S = \mathbf{U}(\xi)$ принадлежит $\mathbf{P}(\xi)$ и удовлетворяет $S \subseteq U(\to t_\xi)$. Поэтому согласно лемме 5.5, v) существует дерево $V \in \mathbf{Colg}_n(\mathbf{P}(\xi))$, для которого $V \subseteq_n U$ и $V(\to t_\xi) = S$. Положим $T^\varphi_{\xi,k_\xi}(n) = V$, так что $T^\varphi_{\xi,k_\xi}(t_\xi) = S = \mathbf{U}(\xi)$.

III) Наконец пусть $\xi \in |\mathbf{U}| \smallsetminus |\mathbf{S}|$. Выберем $k_\xi < \omega$ так, чтобы $\langle \xi, k_\xi \rangle \notin |\varphi|$, добавим $\langle \xi, k_\xi \rangle$ к $|\varphi|$, и положим $\nu^\varphi_{\xi,k_\xi} = 0$, $t_\xi = \Lambda$ и $T^\varphi_{\xi,k_\xi}(0) = \mathbf{U}(\xi)$. Понятно, что и в этом случае $T^\varphi_{\xi,k_\xi}(t_\xi) = \mathbf{U}(\xi)$, так как $T = T(\to \Lambda)$.

Заметим, что система φ принадлежит $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$ (ибо $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$) и удовлетворяет $\psi \preccurlyeq \varphi$ (изменения при переходе к φ коснулись лишь элементов χ, отсутствующих в ψ). Требования 1), 2) выполнены по построению. Мы заключаем, что $\varphi \in \Delta$. Лемма доказана.

Из леммы следует, что существует индекс j, для которого $\varphi(j) \in \Delta$. Пусть числа k_ξ, кортежи t_ξ, и мультидеревья $\mathbf{D} \in D$ и $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ удовлетворяют $\mathbf{D} \leqslant \mathbf{U}$ а также требованиям 1), 2) для $\varphi(j)$. Определим мультидерево $\mathbf{V} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$ через $|\mathbf{V}| = |\mathbf{U}|$, и $\mathbf{V}(\xi) = T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi,k_\xi}(\to t_\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{U}|$. Тогда $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{V}$ (так как $s_{\xi k} \subset t_{\xi k}$). Кроме того $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{V}$. Действительно, если $\xi \in |\mathbf{U}|$, то $\mathbf{V}(\xi) = T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi,k_\xi}(\to t_\xi) \subseteq T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi,k_\xi}(t_\xi) = T^{\varphi(j)}_{\xi,k_\xi}(t_\xi) = \mathbf{U}(\xi)$. Таким образом, $\mathbf{V}$ обеспечивает совместимость $\mathbf{S}$ с $\mathbf{D} \in D$ в $\mathbf{MT}(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})$.

§ 11. Избегание деревьев из надстроенного форсинга

В этом параграфе мы завершаем доказательство теоремы 8.2, проверяя следующее.

Проверка требования 8.1, (F)**.** Пусть $\zeta \in |\mathbf{P}|$, $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P} \cup^{\mathbf{cw}} \mathbf{Q})$, $U \in \mathbf{Q}(\zeta)$, и $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$-имя точки $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}$ таково, что множество

$$D(\sigma) = \{\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})\colon \mathbf{T} \text{ прямо вынуждает } \mathbf{c} \notin [\sigma \cdot \mathbf{T}(\zeta)]\}$$

плотно в $\mathbf{MT}(\mathbf{P})$ для любого кортежа $\sigma \in 2^{<\omega}$. Требуется найти более сильное мультидерево $\mathbf{V} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$, $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{V}$, которое прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [U]$.

По построению имеем $U \subseteq \rho \cdot U^{\mathbf{\Phi}}_{\zeta M}$, где $\tau \in 2^{<\omega}$ и $M < \omega$, поэтому можно предполагать, что $U = \rho \cdot U^{\mathbf{\Phi}}_{\zeta M}$. Кроме того, можно считать, что $\rho = \Lambda$, т. е. просто $U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\zeta M}$. (В противном случае заменим $\mathbf{c}$ на имя $\rho \cdot \mathbf{c}$, определенное так, что $|\rho \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{c}|$, и если $n < \omega$ и $i = 0, 1$, то $D^{\rho\cdot\mathbf{c}}_{ni} = D^{\mathbf{c}}_{n,1-i}$ при условии, что $n < \mathrm{lh}(\rho)$ и $\rho(n) = 1$, а иначе просто $D^{\rho\cdot\mathbf{c}}_{ni} = D^{\mathbf{c}}_{ni}$. Любое мультидерево $\mathbf{V}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [\rho \cdot U^{\mathbf{\Phi}}_{\zeta M}]$, если и только если оно прямо вынуждает $(\rho \cdot \mathbf{c}) \notin [U^{\mathbf{\Phi}}_{\zeta M}]$.) Итак, считаем, что $U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\zeta M}$. Индексы ζ и M с этого момента фиксированы. Мы будем предполагать, что $\zeta \in |\mathbf{S}|$, иначе просто добавим ζ к $|\mathbf{S}|$ через $\mathbf{S}(\zeta) = T$, где $T \in \mathbf{P}(\zeta)$ произвольно.

Сверх этого, можно предполагать, как и в разделе проверки 8.1, (E), что $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$, причем для каждого $\xi \in |\mathbf{S}|$ найдутся число $m_\xi < \omega$ и кортеж $s_\xi \in 2^{<\omega}$, удовлетворяющие $\mathbf{S}(\xi) = U^{\mathbf{\Phi}}_{\xi,m_\xi}(s_\xi)$, и $s_\xi \neq s_\eta$ при $\xi \neq \eta$.

Рассмотрим множество $\Delta \in \mathfrak{M}$ всех таких систем $\varphi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, что имеется мультидерево $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, а также числа k_ξ и кортежи $t_\xi \in 2^{<\omega}$ для каждого индекса $\xi \in |\mathbf{U}|$, для которых выполнено следующее:

1) $|\mathbf{S}| \subseteq |\mathbf{U}|$, и если $\xi \in |\mathbf{S}|$, то $k_\xi = m_\xi$;
2) если $\xi \in |\mathbf{U}|$, то $\langle \xi, k_\xi \rangle \in |\varphi|$, $s_\xi \subset t_\xi$, $\mathrm{lh}(t_\xi) \leqslant \nu^\varphi_{\xi,k_\xi}$, $\mathbf{U}(\xi) = T^\varphi_{\xi,k_\xi}(t_\xi)$;
3) $\langle \zeta, M \rangle \in |\varphi|$, и мультидерево $\mathbf{U}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T^\varphi_{\zeta M}(\ell)]$, где $\ell = \nu^\varphi_{\zeta M}$.

Лемма 11.1. *Множество* Δ *плотно в* $\mathbf{Sys}(\mathbf{P})$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$. Требуется определить систему $\varphi \in \Delta$, удовлетворяющую $\psi \preccurlyeq \varphi$. Как и при проверке требования 8.1, (E), можно предполагать, что если $\xi \in |\mathbf{S}|$, то $\langle \xi, m_\xi \rangle \in |\psi|$, и отдельно $\langle \zeta, M \rangle \in |\varphi|$.

Определим систему $\chi \in \mathbf{Sys}(\mathbf{P})$, продолжая ψ аналогично доказательству леммы 10.1, т. е. $|\chi| = |\psi|$, и если $\xi \in |\mathbf{S}|$, то $\nu^\chi_{\xi,m_\xi} = \nu^\psi_{\xi,m_\xi} + 1$, $T^\chi_{\xi,m_\xi}(\nu^\chi_{\xi,m_\xi}) = T^\psi_{\xi,m_\xi}(\nu^\psi_{\xi,m_\xi})$, и $t_\xi = s_\xi{}^\frown 0$. Тогда $\psi \preccurlyeq \chi$, $s_\xi \subset t_\xi$, $\operatorname{lh}(t_\xi) = \nu^\chi_{\xi k_\xi}$. Если же $\langle \xi, m \rangle \in |\psi|$ не имеет вида $\langle \xi, m_\xi \rangle$, то положим $\nu^\chi_{\xi m} = \nu^\psi_{\xi m}$ и $T^\chi_{\xi m}(n) = T^\psi_{\xi m}(n)$ для всех n. Определим мультидерево $\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ через соотношения $|\mathbf{T}| = |\mathbf{S}|$, и $\mathbf{T}(\xi) = T^\chi_{\xi,m_\xi}(t_\xi)$ для всех $\xi \in |\mathbf{S}|$.

Случай 1: $M \neq m_\zeta$**.** Пусть $\ell = \nu^\chi_{\zeta M}$, как в 3). Положим $T = T^\chi_{\zeta M}(\ell)$; по определению $T \in \mathbf{Colg}_\ell(\mathbf{P}(\zeta))$. Согласно лемме 7.3, ii) существуют мультидерево $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ и дерево $T' \in \mathbf{Colg}_\ell(\mathbf{P}(\zeta))$, для которых $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{U}$, $T' \subseteq_\ell T$ и $\mathbf{U}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T']$. Следуя доказательству леммы 10.1, мы определяем систему φ, а также числа k_ξ и кортежи t_ξ, с тем, чтобы $\psi \preccurlyeq \varphi$ и чтобы выполнялись условия 1) и 2), а для обеспечения 3) дополнительным пунктом построения φ из χ является $T^\varphi_{\zeta M}(\ell) = T'$.

Случай 2: $M = m_\zeta$**.** Построение для случая 1 здесь не годится, ибо последний пункт $T^\varphi_{\zeta M}(\ell) = T'$ может вступить в противоречие с определением $T^\varphi_{\zeta,m_\zeta}(\ell)$ согласно пункту II) в доказательстве леммы 10.1. Правильное рассуждение состоит в использовании условия о плотности множеств $D(\sigma)$. Эти множества, коль скоро они плотны, являются более того открыто плотными, а потому существуют мультидерево $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, удовлетворяющее $\mathbf{T} \leqslant \mathbf{U}$ и $\mathbf{U} \in D(\sigma)$, для любого кортежа $\sigma \in 2^H$, где $H = \operatorname{spl}_\ell(T^\varphi_{\zeta M}(\ell))$. Таким образом, если $\sigma \in 2^H$, то $\mathbf{U}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [\sigma \cdot \mathbf{U}(\zeta)]$.

Далее, снова следуя доказательству леммы 10.1, мы определяем систему φ, $\psi \preccurlyeq \varphi$, числа k_ξ и кортежи t_ξ так, чтобы выполнялись условия 1) и 2). Наконец, выведем, что и 3) имеет место. Согласно выбору $\mathbf{c}$ достаточно установить, что $T^\varphi_{\zeta M}(\ell) \subseteq \bigcup_{\sigma \in 2^H} (\sigma \cdot \mathbf{U}(\zeta))$. Для доказательства заметим, что согласно 2) и гипотезе случая 2 выполнены равенства

$$\mathbf{U}(\zeta) = T^\varphi_{\zeta M}(t_\zeta) = T^\varphi_{\zeta M}(\ell)(\to t_\zeta) = T^\varphi_{\zeta M}(\ell) {\restriction}_u$$

для какого-то кортежа $u \in 2^H$ по лемме 4.2, i). Теперь искомое соотношение $T^\varphi_{\zeta M}(\ell) \subseteq \bigcup_{\sigma \in 2^H} (\sigma \cdot \mathbf{U}(\zeta))$ следует из леммы 3.4, v). Лемма доказана.

Вернемся к проверке требования 8.1, (F). Согласно лемме найдется номер j, для которого система $\varphi(j)$ принадлежит к Δ. Таким образом, существует мультидерево $\mathbf{U} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, а также числа k_ξ и кортежи t_ξ, удовлетворяющие 1), 2) и 3) для $\varphi = \varphi(j)$. Определим мультидерево $\mathbf{V} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q})$ соотношениями $|\mathbf{V}| = |\mathbf{U}|$, и если $\xi \in |\mathbf{U}|$, то $\mathbf{V}(\xi) = T^{\mathbf{\Phi}}_{\xi,k_\xi}(\to t_\xi) = T^{\varphi(j)}_{\xi,k_\xi}(t_\xi)$. Тогда $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{V}$ и $\mathbf{U} \leqslant \mathbf{V}$ (см. конец проверки 8.1, (E)). Наконец, согласно 3) мультидерево $\mathbf{U}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T]$, где $T = T^{\varphi(j)}_{\zeta M}(\ell)$, и, следовательно, $\mathbf{V}$ также прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T]$. Однако $U = U^{\mathbf{\Phi}}_{\zeta M} \subseteq T^{\varphi(j)}_{\zeta M}(\ell)$. Таким образом, требование 8.1, (F) проверено.

Теорема 8.2 полностью доказана.

§ 12. Главный форсинг

В этом разделе мы рассуждаем *в конструктивном универсуме* $\mathbf{L}$. Через $\leqslant_{\mathbf{L}}$ обозначается каноническое полное упорядочение класса $\mathbf{L}$.

Определение 12.1. Это определение действует внутри конструктивного универсума $\mathbf{L}$. Мы определяем, индукцией по $\alpha < \omega_1$, мультифорсинги $\mathbf{P}_\alpha$ и $\mathbf{Q}_\alpha$, удовлетворяющие $|\mathbf{Q}_\alpha| = |\mathbf{P}_\alpha| = \alpha = \{\xi \colon \xi < \alpha\}$, *малые* в том смысле, что все множества-компоненты (ДС-форсинги) $\mathbf{P}_\alpha(\xi)$, $\mathbf{Q}_\alpha(\xi)$, где $\xi < \alpha < \omega_1$, являются счетными.

База индукции. Коль скоро требуется $|\mathbf{Q}_0| = |\mathbf{P}_0| = 0 = \varnothing$, то $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{Q}_0$ – просто пустые множества. Как первый невырожденный шаг, мы определяем мультифорсинг $\mathbf{P}_1$ с $|\mathbf{P}_1| = 1 = \{0\}$ условием $\mathbf{P}_1(0) = P_{\mathrm{coh}}$ (см. пример 5.3).

Шаг $\mathbf{P}_\alpha \to \mathbf{Q}_\alpha$. Допустим, что $0 < \alpha < \omega_1$, и малые мультифорсинги $\mathbf{P}_\gamma$, $\mathbf{Q}_\gamma$ уже определены для $\gamma \leqslant \alpha$ и $\gamma < \alpha$ соответственно. Пусть $\mathfrak{M}_\alpha$ есть наименьшая (транзитивная) модель $\mathfrak{M}$ теории $\mathbf{ZFC}'$ вида $\mathbf{L}_\mu$, $\mu < \omega_1$, содержащая последовательности $\langle \mathbf{P}_\gamma \rangle_{\gamma \leqslant \alpha}$ и $\langle \mathbf{Q}_\gamma \rangle_{\gamma < \alpha}$, и такая, что $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$ и все множества $\mathbf{P}_\gamma(\xi)$ $(\xi < \gamma \leqslant \alpha)$ и $\mathbf{Q}_\gamma(\xi)$ $(\xi < \gamma < \alpha)$ счетны в $\mathfrak{M}$. Модель $\mathfrak{M}_\alpha$ счетна и $\mathbf{P}_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, а потому согласно теореме 8.2 найдется малый мультифорсинг $\mathbf{Q}$, являющийся $\mathfrak{M}_\alpha$-продолжением мультифорсинга $\mathbf{P}_\alpha$. Через $\mathbf{Q}_\alpha$ обозначаем $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьший из таких мультифорсингов $\mathbf{Q}$.

Шаг $\mathbf{P}_\alpha$, $\mathbf{Q}_\alpha \to \mathbf{P}_{\alpha+1}$. Допустим, что $0 < \alpha < \omega_1$, и малые мультифорсинги $\mathbf{P}_\alpha$ и $\mathbf{Q}_\alpha$ уже определены и $|\mathbf{P}_\alpha| = |\mathbf{Q}_\alpha| = \alpha$. Определяем вспомогательный мультифорсинг $\boldsymbol{\kappa}_\alpha$ так, что $|\boldsymbol{\kappa}_\alpha| = \{\alpha\}$ и $\boldsymbol{\kappa}_\alpha(\alpha) = P_{\mathrm{coh}}$ (см. пример 4.1). Теперь пусть $\mathbf{P}_{\alpha+1} = \mathbf{P}_\alpha \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\alpha \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\kappa}_\alpha$ (покомпонентное объединение, см. § 6), так что мы имеем $|\mathbf{P}_{\alpha+1}| = \alpha + 1$, $\mathbf{P}_{\alpha+1}(\xi) = \mathbf{P}_\alpha(\xi) \cup \mathbf{Q}_\alpha(\xi)$ для всех $\xi < \alpha$, кроме того, $\mathbf{P}_{\alpha+1}(\alpha) = P_{\mathrm{coh}}$.

Предельный шаг. Пусть $\lambda < \omega_1$ – предельный ординал, и малые мультифорсинги $\mathbf{P}_\alpha$ с $|\mathbf{P}_\alpha| = \alpha$ определены для $\alpha < \lambda$. Определим мультифорсинг $\mathbf{P}_\lambda = \bigcup^{\mathbf{cw}}_{\alpha<\lambda} \mathbf{P}_\alpha$, так что выполнено $|\mathbf{P}_\lambda| = \lambda$, и если $\xi < \lambda$, то $\mathbf{P}_\lambda(\xi) = \bigcup_{\xi<\alpha<\lambda} \mathbf{P}_\alpha(\xi)$.

Завершение построения. После того как все мультифорсинги $\mathbf{P}_\alpha$ и $\mathbf{Q}_\alpha$ $(\alpha < \omega_1)$ с $|\mathbf{Q}_\alpha| = |\mathbf{P}_\alpha| = \alpha$ определены, мы определяем мультифорсинг $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\omega_1} = \bigcup^{\mathbf{cw}}_{\alpha<\omega_1} \mathbf{P}_\alpha$, так что $|\mathbf{P}| = \omega_1$, и $\mathbf{P}(\xi) = \bigcup_{\xi<\alpha<\omega_1} \mathbf{P}_\alpha(\xi)$ для всех индексов $\xi < \omega_1$.

Полагаем $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, и если $\alpha < \omega_1$, то $\mathbb{P}^\alpha = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_\alpha)$. Построение завершено.

Множество $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\mathbf{P})$ будет нашим форсингом для доказательства теоремы 1.1. Здесь отметим, что по построению множества $\mathbf{P}$ и $\mathbb{P}$ принадлежат классу $\mathbf{L}$. Форсинг $\mathbb{P}$ можно идентифицировать с произведением $\prod_{\xi<\omega_1} \mathbf{P}(\xi)$ с конечной базой в $\mathbf{L}$.

Замечание 12.2. По построению, если $0 < \alpha < \omega_1$, то мультифорсинг $\mathbf{Q}_\alpha$ есть $\mathfrak{M}_\alpha$-продолжение мультифорсинга $\mathbf{P}_\alpha$ в смысле определения 8.1.

Лемма 12.3. *В* $\mathbf{L}$ *истинно следующее.* $\mathbf{P} = \bigcup^{\mathbf{cw}}_{\alpha<\omega_1}(\boldsymbol{\kappa}_\alpha \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\alpha)$, *и если* $\lambda < \omega_1$ *– предельный ординал, то* $\mathbf{P}_\lambda = \bigcup^{\mathbf{cw}}_{\alpha<\lambda}(\boldsymbol{\kappa}_\alpha \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\alpha)$. *Соответственно,* $\mathbf{P}(\xi) = P_{\mathrm{coh}} \cup \bigcup_{\xi<\alpha<\omega_1} \mathbf{Q}_\alpha(\xi)$ *и если* $\xi < \lambda < \omega_1$, *то* $\mathbf{P}_\lambda(\xi) = P_{\mathrm{coh}} \cup \bigcup_{\xi<\alpha<\lambda} \mathbf{Q}_\alpha(\xi)$.

Доказательство осуществляется простой трансфинитной индукцией по λ. Лемма доказана.

Следующий результат (рутинное доказательство опускаем) дает класс определимости последовательностей, введенных определением 12.1. Напомним, что НС – множество всех *наследственно счетных* множеств. О классах определимости Σ^X_n, Π^X_n, Δ^X_n для любого множества X см. [30, гл. 5, § 4], а в особенности Σ^{HC}_n, Π^{HC}_n, Δ^{HC}_n для $X = \mathrm{HC}$ в [10, §§ 8, 9].

Предложение 12.4. *Все три последовательности* $\langle \mathbf{P}_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$, $\langle \mathbf{Q}_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$, $\langle \mathfrak{M}_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ *принадлежат классу определимости* Δ^{HC}_1 *в* $\mathbf{L}$.

Определение 12.5. Положим $P^\alpha_\xi = \mathbf{P}_\alpha(\xi)$ и $Q^\alpha_\xi = \mathbf{Q}_\alpha(\xi)$ для $\xi < \alpha < \omega_1$, и $P_\xi = \mathbf{P}(\xi)$, чтобы уменьшить сложность обозначений. Таким образом:

i) $\mathbf{P}_\alpha = \langle P^\alpha_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$, $\mathbf{Q}_\alpha = \langle Q^\alpha_\xi \rangle_{\xi<\alpha}$, $\mathbf{P} = \langle P_\xi \rangle_{\xi<\omega_1}$;

ii) $P^{\alpha+1}_\alpha = P_{\mathrm{coh}}$, и если $\xi < \alpha$, то $P^{\alpha+1}_\xi = P^\alpha_\xi \cup Q^\alpha_\xi$;

iii) $P^\lambda_\xi = \bigcup_{\xi<\alpha<\lambda} P^\alpha_\xi$ для предельных λ, и $P_\xi = \bigcup_{\xi<\alpha<\omega_1} P^\alpha_\xi$;

iv) $P^\lambda_\xi = P_{\mathrm{coh}} \cup \bigcup_{\xi<\alpha<\lambda} Q^\alpha_\xi$ для всех λ, и $P_\xi = P_{\mathrm{coh}} \cup \bigcup_{\xi<\alpha<\omega_1} Q^\alpha_\xi$;

v) $\mathbb{P}$ идентифицируется с произведением $\prod_{\xi<\omega_1} P_\xi$ с конечной базой.

§ 13. Сохранение плотности и другие свойства форсинга

Здесь мы докажем несколько следствий из результатов параграфов 10 и 11, а также другие теоремы о форсинге $\mathbb{P}$, включая свойство счетности антицепей. Мы рассуждаем в условиях и терминах определения 12.1.

Лемма 13.1. *В* $\mathbf{L}$ *истинно следующее*:

i) *если* $\alpha < \omega_1$, *и множество* $D \in \mathfrak{M}_\alpha$, $D \subseteq \mathbb{P}^\alpha$ *предплотно в* $\mathbb{P}^\alpha$, *то оно предплотно и в* $\mathbb{P}$;

ii) *каждое множество* $\mathbf{MT}(\mathbf{Q}_\alpha)$ *предплотно в* $\mathbb{P}$;

iii) *если* $\xi < \alpha < \omega_1$, *то множество* Q^α_ξ *предплотно в* P_ξ.

Доказательство. i) Индукцией по γ, $\alpha \leqslant \gamma < \omega_1$, проверяем, что если множество D предплотно в $\mathbb{P}^\gamma = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_\gamma)$, то оно остается предплотным в $\mathbf{MT}(\mathbf{P}_\gamma \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\gamma)$ согласно замечанию 12.2 и требованию 8.1, (E) определения $\mathfrak{M}$-продолжения. Значит, оно предплотно и в $\mathbb{P}^{\gamma+1} = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_{\gamma+1})$, поскольку по построению $\mathbf{P}_{\gamma+1} = \mathbf{P}_\gamma \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\gamma \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\kappa}_\gamma$, где мультифорсинги $\mathbf{P}_\gamma \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\gamma$ и $\boldsymbol{\kappa}_\gamma$ имеют непересекающиеся области $|\mathbf{P}_\gamma \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\gamma| = \gamma$ и $|\boldsymbol{\kappa}_\gamma| = \{\gamma\}$. Предельные шаги, включая переход к $\mathbb{P}$ на шаге ω_1, элементарны.

ii) Множество $\mathbf{MT}(\mathbf{Q}_\alpha)$ плотно в $\mathbf{MT}(\mathbf{P}_\alpha \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\alpha)$ согласно замечанию 12.2 и требованию 8.1, (B), следовательно, предплотно в $\mathbb{P}^{\alpha+1}$ (см. доказательство i) выше), и $\mathbf{MT}(\mathbf{Q}_\alpha) \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}$. Теперь ссылаемся на i).

iii) Пусть $T \in P_\xi$. Определим мультидерево $\mathbf{T} \in \mathbb{P}$ условиями $|\mathbf{T}| = \{\xi\}$ и $\mathbf{T}(\xi) = T$. Согласно ii) оно совместимо в $\mathbb{P}$ с некоторым мультидеревом $\mathbf{S} \in \mathbf{MT}(\mathbf{Q}_\alpha)$. Тогда $T = \mathbf{T}(\xi)$ совместимо в P_ξ с деревом $T' = \mathbf{S}(\xi) \in Q^\alpha_\xi$. Лемма доказана.

Следствие 13.2 в $\mathbf{L}$. *Если $\xi < \alpha < \omega_1$ и деревья $T, T' \in P_\xi^\alpha$ несовместимы в P_ξ^α, то T, T' несовместимы в P_ξ. Поэтому, если мультидеревья $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ из $\mathbb{P}^\alpha = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_\alpha)$ несовместимы в $\mathbb{P}^\alpha$, то $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}'$ несовместимы и в $\mathbb{P}$.*

Доказательство. Пусть $T, T' \in P_\xi^\alpha$ несовместимы в P_ξ^α. Используя замечание 12.2 и требование 8.1, (D) на непредельных шагах, доказываем индукцией по γ, что, если $\alpha < \gamma \leqslant \omega_1$, то деревья T, T' несовместимы и в P_ξ^γ. Следствие доказано.

Для вывода счетности антицепей, нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 13.3. *В $\mathbf{L}$ истинно следующее. Если $X \subseteq \mathrm{HC} = \mathbf{L}_{\omega_1}$, то множество $\mathscr{O}_X$ всех таких ординалов $\alpha < \omega_1$, что структура $\langle \mathbf{L}_\alpha; X \cap \mathbf{L}_\alpha \rangle$ является элементарной подмоделью структуры $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; X \rangle$ и $X \cap \mathbf{L}_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, неограничено в ω_1.*

Вообще, если $X_n \subseteq \mathrm{HC}$ для всех n, то множество $\mathscr{O}$ всех таких ординалов $\alpha < \omega_1$, что $\big\langle \mathbf{L}_\alpha; \langle X_n \cap \mathbf{L}_\alpha \rangle_{n<\omega} \big\rangle$ – элементарная подмодель структуры $\big\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; \langle X_n \rangle_{n<\omega} \big\rangle$ и $\langle X_n \cap \mathbf{L}_\alpha \rangle_{n<\omega} \in \mathfrak{M}_\alpha$, неограничено в ω_1.

Доказательство. Пусть $\alpha_0 < \omega_1$. Существует счетная элементарная подмодель M модели $\langle \mathbf{L}_{\omega_2}; \in \rangle$, содержащая α_0, ω_1, X и такая, что множество $M \cap \mathbf{L}_{\omega_1}$ транзитивно. Рассмотрим свертку Мостовского $\phi \colon M \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{L}_\lambda$, и пусть $\alpha = \phi(\omega_1)$. Тогда $\alpha_0 < \alpha < \lambda < \omega_1$ и $\phi(X) = X \cap \mathbf{L}_\alpha$ по выбору M. Мы заключаем, что $\langle \mathbf{L}_\alpha; X \cap \mathbf{L}_\alpha \rangle$ – элементарная подмодель $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; X \rangle$. При этом α несчетно в $\mathbf{L}_\lambda$ и, следовательно, $\mathbf{L}_\lambda \subseteq \mathfrak{M}_\alpha$. Мы заключаем, что $X \cap \mathbf{L}_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, так как по построению $X \cap \mathbf{L}_\alpha \in \mathbf{L}_\lambda$.

Более общее утверждение доказывается аналогично. Лемма доказана.

Следствие 13.4. *В $\mathbf{L}$ истинно следующее. Форсинг $\mathbb{P}$ удовлетворяет условию счетности антицепей, поэтому $\mathbb{P}$-генерические расширения сохраняют кардиналы.*

Доказательство. Рассмотрим любую максимальную антицепь $A \subseteq \mathbb{P} = \mathbf{MT}(\mathbf{P})$. По лемме 13.3 имеется такой ординал α, что структура $\langle \mathbf{L}_\alpha; \mathbb{P}', A' \rangle$ есть элементарная подмодель структуры $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; \mathbb{P}, A \rangle$, где $\mathbb{P}' = \mathbb{P} \cap \mathbf{L}_\alpha$ и $A' = A \cap \mathbb{P}^\alpha$, и также $\mathbb{P}'$, $A' \in \mathfrak{M}_\alpha$. Из свойства элементарной подмодели следует, что $\mathbb{P}' = \mathbb{P}^\alpha = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_\alpha)$ и $A' = A \cap \mathbb{P}^\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$, причем A' – максимальная антицепь, т. е. предплотное множество в $\mathbb{P}^\alpha$. Но тогда A' остается предплотным множеством, а значит, максимальной антицепью, и во всем множестве $\mathbb{P}$ по лемме 13.1. Отсюда $A = A'$, т. е. A – счетное множество. Следствие доказано.

§ 14. Генерическое расширение

В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства $\mathbb{P}$-генерических расширений $\mathbf{L}[G]$ класса $\mathbf{L}$ посредством присоединения $\mathbb{P}$-генерических множеств $G \subseteq \mathbb{P}$ к $\mathbf{L}$. Мы будем использовать построенный в $\mathbf{L}$ форсинг $\mathbb{P}$ и прочие обозначения определения 12.1 с тем только изменением, что, поскольку рассуждения уже не будут, вообще говоря, релятивизованы к $\mathbf{L}$, а первый несчетный ординал в $\mathbf{L}$ будет обозначаться $\omega_1^{\mathbf{L}}$ вместо ω_1.

Следствие 14.1. *Если* $\alpha < \omega_1^{\mathbf{L}}$ *и множество* $G \subseteq \mathbb{P}$ – $\mathbb{P}$*-генерическое над* $\mathbf{L}$, *то множество* $G' = G \cap \mathbb{P}^\alpha$ *является* $\mathbb{P}^\alpha$*-генерическим над* $\mathfrak{M}_\alpha$.

Доказательство. Мультидеревья из G' попарно совместимы в множестве $\mathbb{P}^\alpha = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_\alpha)$ согласно следствию 13.2. Более того, если множество $D \in \mathfrak{M}_\alpha$, $D \subseteq \mathbb{P}^\alpha$ плотно в $\mathbb{P}^\alpha$, то оно предплотно и в $\mathbb{P}$ по лемме 13.1, так что $G \cap D \neq \varnothing$, и поэтому $G' \cap D \neq \varnothing$. Следствие доказано.

Если $\Delta \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$, то пусть $\mathbb{P}{\restriction}\Delta = \{\mathbf{T} \in \mathbb{P} \colon |\mathbf{T}| \subseteq \Delta\}$.

Лемма 14.2. *Допустим, что* $\Delta \in \mathbf{L}$, $\Delta \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$ *и* $\Delta' = \omega_1^{\mathbf{L}} \smallsetminus \Delta$. *Тогда* $\mathbb{P}$ *тождественно произведению* $(\mathbb{P}{\restriction}\Delta) \times (\mathbb{P}{\restriction}\Delta')$. *Если множество* $G \subseteq \mathbb{P}$ – *генерическое над* $\mathbf{L}$, *то множество* $G{\restriction}\Delta = \{\mathbf{T} \in G \colon |\mathbf{T}| \subseteq \Delta\}$ *является* $(\mathbb{P}{\restriction}\Delta)$*-генерическим над* $\mathbf{L}$.

Пусть $\Delta \in \mathbf{L}$, $\Delta \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$. Аналогично определению 7.1 мы определяем $(\mathbb{P}{\restriction}\Delta)$-*имя точки* как любое индексированное семейство $\mathbf{c} = \langle D^{\mathbf{c}}_{ni} \rangle_{n<\omega,\ i<2}$ множеств $D^{\mathbf{c}}_{ni} \subseteq \mathbb{P}{\restriction}\Delta$, для которого каждое объединение $D^{\mathbf{c}}_n = D^{\mathbf{c}}_{n0} \cup D^{\mathbf{c}}_{n1}$ предплотно в $\mathbb{P}{\restriction}\Delta$, и если $\mathbf{T} \in D^{\mathbf{c}}_{n0}$ и $\mathbf{S} \in D^{\mathbf{c}}_{n1}$, то мультидеревья $\mathbf{T}$, $\mathbf{S}$ несовместны в $\mathbb{P}{\restriction}\Delta$, или, что эквивалентно, в $\mathbb{P}$. Имя *счетно*, если все множества $D^{\mathbf{c}}_{ni}$ не более чем счетны.

Если множество $G \subseteq \mathbb{P}{\restriction}\Delta$ является генерическим, то точка $\mathbf{c}[G] \in 2^\omega$ определяется соотношениями $\mathbf{c}[G](n) = i$, когда $G \cap D^{\mathbf{c}}_{ni} \neq \varnothing$.

Лемма 14.3. *Допустим, что* $\Delta \in \mathbf{L}$, $\Delta \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$. *Если множество* $G' \subseteq \mathbb{P}{\restriction}\Delta$ *является генерическим над* $\mathbf{L}$, *и* $x \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[G']$, *то найдется такое* $(\mathbb{P}{\restriction}\Delta)$*-имя точки* $\mathbf{c} \in \mathbf{L}$, *что* $x = \mathbf{c}[G']$ *и* $\mathbf{c}$ *счетно в* $\mathbf{L}$.

Доказательство. Без требования счетности существование искомого имени является одним из базовых свойств форсинга, см., например, лемму 2.5 в [30, гл. 4]. Чтобы преобразовать произвольное имя в счетное, достаточно заметить, что форсинг $\mathbb{P}{\restriction}\Delta$ наследует условие счетности антицепей в $\mathbf{L}$ от форсинга $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\mathbf{P})$, обладающего этим свойством согласно следствию 13.4. Лемма доказана.

Определение 14.4 (генерические точки). Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$. Заметим, что $\omega_1^{\mathbf{L}[G]} = \omega_1^{\mathbf{L}}$ согласно следствию 13.4.

Если $\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$, то $G_\xi = \{\mathbf{T}(\xi) \colon \mathbf{T} \in G\}$ есть множество, P_ξ-генерическое над $\mathbf{L}$, а пересечение $X_\xi = \bigcap_{T \in G_\xi} [T]$ содержит единственный элемент $x_\xi = x_\xi[G] \in 2^\omega$, который является P_ξ-генерической точкой над $\mathbf{L}$.

Следующая лемма (часть теоремы о произведении форсингов) также является отражением структуры форсинга $\mathbb{P} = \prod_{\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}} P_\xi$ как произведения. Это утверждение сформулировано в обозначениях определения 14.4.

Лемма 14.5. *Если* $\zeta < \omega_1^{\mathbf{L}}$, *то справедливо, что*:

i) $x_\zeta[G] \notin \mathbf{L}[G{\restriction}\Delta_\zeta]$, *где* $\Delta_\zeta = \omega_1^{\mathbf{L}} \smallsetminus \{\zeta\}$, *и*

ii) *точка* $x_\zeta[G]$ *не является* $(\{G{\restriction}\Delta_\zeta\} \cup \mathbf{Ord})$*-определимой в* $\mathbf{L}[G]$.

Доказательство. Утверждение i) (часть теоремы о произведении форсингов) является отражением структуры форсинга $\mathbb{P} = \prod_{\xi<\omega_1^{\mathbf{L}}} P_\xi$ как произведения. Для доказательства ii) предположим противное, т. е. пусть $\vartheta(x)$ – формула, содержащая ординалы и множество $G\restriction\Delta_\zeta$ в роли параметров, и некоторое мультидерево $\mathbf{T} \in G$ $\mathbb{P}$-вынуждает, что $x_\zeta[G]$ есть единственная точка $x \in 2^\omega$, удовлетворяющая $\vartheta(x)$. Пусть $T = \mathbf{T}(\zeta)$ и $s = \operatorname{stem}(T)$, так что T содержит оба кортежа $s^\frown 0$ и $s^\frown 1$. Понятно, что либо $s^\frown 0 \subset x_\xi[G]$, либо $s^\frown 1 \subset x_\xi[G]$; пусть, скажем, $s^\frown 0 \subset x_\xi[G]$.

Пусть $n = \operatorname{lh}(s)$ и $\sigma = 0^{n\frown}1$, так что все три кортежа $s^\frown 0$, $s^\frown 1$, σ принадлежат 2^{n+1}, $s^\frown 1 = \sigma \cdot s^\frown 0$ и $\sigma \cdot T = T$ по лемме 3.4, iv). Мы можем продолжить действие σ на мультидеревья, полагая $\sigma \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}'$, где $|\mathbf{S}'| = |\mathbf{S}|$, $\mathbf{S}'(\zeta) = \sigma \cdot \mathbf{S}(\zeta)$, и $\mathbf{S}'(\xi) = \mathbf{S}(\xi)$ для $\xi \in |\mathbf{S}'| = |\mathbf{S}|$, $\xi \neq \zeta$. Но форсинги P_ξ и $\mathbb{P}$ инвариантны относительно действия σ, так что множество $G' = \sigma \cdot G$ все еще является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$, и $\mathbf{T} = \sigma \cdot \mathbf{T} \in G'$. Мы заключаем, что в модели $\mathbf{L}[G'] = \mathbf{L}[G]$ истинно, что $x' = x_\xi[G'] = \sigma \cdot x_\xi[G]$ – все еще единственная точка, удовлетворяющая $\vartheta(x')$. Однако $x' \neq x$. Лемма доказана.

§ 15. Определимость генерических точек

Мы продолжаем рассуждать в терминах определений 12.1 и 14.4, а главной целью этого параграфа является выяснение природы P_ξ-генерических точек $x \in 2^\omega$ в $\mathbb{P}$-генерических расширениях класса $\mathbf{L}$.

Лемма 15.1. *В любой транзитивной модели* $\mathbf{ZF}$, *расширяющей* $\mathbf{L}$, *истинно следующее*: *если* $\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$, *то точка* $x \in 2^\omega$ *является* P_ξ*-генерической над* $\mathbf{L}$, *если и только если* x *принадлежит к* $Z_\xi = \bigcap_{\xi<\alpha<\omega_1^{\mathbf{L}}} \bigcup_{T\in Q_\xi^\alpha} [T]$.

Доказательство. По лемме 13.1, iii) все множества вида Q_ξ^α предплотны в P_ξ и, следовательно, любая P_ξ-генерическая точка принадлежит множеству Z_ξ. С другой стороны, любая максимальная антицепь $A \in \mathbf{L}$, $A \subseteq P_\xi$ счетна в $\mathbf{L}$ согласно следствию 13.4, так что $A \subseteq P_\xi^\alpha$ и $A \in \mathfrak{M}_\alpha$ для некоторого индекса α, $\xi < \alpha < \omega_1^{\mathbf{L}}$. Но тогда каждое дерево $T \in Q_\xi^\alpha$ удовлетворяет $T \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup A$ согласно замечанию 12.2 и условию 8.1, (C), b). Теперь мы заключаем, что $\bigcup_{T\in Q_\xi^\alpha}[T] \subseteq \bigcup_{S\in A}[S]$. Лемма доказана.

Согласно следующей лемме в $\mathbb{P}$-генерических расширениях нет P_ξ-генерических точек, кроме самой точки $x_\xi[G]$ и тех точек, которые с ней связаны в терминах одного хорошо известного отношения эквивалентности.

Определение 15.2. Отношение эквивалентности E_0 определяется на 2^ω так, что $x\mathsf{E}_0 y$, когда $\exists s \in 2^{<\omega}(y = s \cdot x)$. При этом $x\mathsf{E}_0 y$ равносильно тому, что множество $\{n\colon x(n) \neq y(n)\}$ конечно. Понятно, что E_0-класс

$$[x]_{\mathsf{E}_0} = \{y \in 2^\omega : x\mathsf{E}_0 y\} = \{y \in 2^\omega : \exists s \in 2^{<\omega}(y = s \cdot x)\}$$

любой точки $x \in 2^\omega$ – счетное множество.

Лемма 15.3. *Пусть множество* $G \subseteq \mathbb{P}$ *является* $\mathbb{P}$*-генерическим над* $\mathbf{L}$, $\zeta < \omega_1^{\mathbf{L}}$ *и* $x \in \mathbf{L}[G] \cap 2^\omega$. *Тогда* x *является* P_ζ*-генерической точкой над* $\mathbf{L}$, *если и только если выполнено соотношение* $x\mathsf{E}_0 x_\zeta[G]$.

Доказательство. В более простую сторону, $x_\zeta[G]$, конечно, является P_ζ-генерической точкой, а поскольку P_ζ есть ДС-форсинг, т. е. по определению он замкнут относительно действия $s \cdot T$ любого кортежа $s \in 2^{<\omega}$, каждая точка вида $s \cdot x_\zeta[G]$ также будет P_ζ-генерической.

Теперь доказываем в более сложную сторону. Пусть $x \in \mathbf{L}[G] \cap 2^\omega$, и $\neg(x \mathsf{E}_0 x_\zeta[G])$. По лемме 14.3 существует такое счетное в $\mathbf{L}$ $\mathbb{P}$-имя точки $\mathbf{c} \in \mathbf{L}$, что $\mathbb{P}$ в целом (т. е. каждое "условие" $\mathbf{T} \in \mathbb{P}$) вынуждает $\mathbf{c} \neq \sigma \cdot x_\zeta[\underline{G}]$, каков бы ни был кортеж $\sigma \in 2^{<\omega}$. Раз имя $\mathbf{c}$ счетно, то имеется такой ординал α, $\zeta < \alpha < \omega_1^{\mathbf{L}}$, что $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}_\alpha$, и каждое множество $D^{\mathbf{c}}_{ni}$ удовлетворяет $D^{\mathbf{c}}_{ni} \subseteq \mathbb{P}^\alpha = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_\alpha)$ для всех n, i.

Мы утверждаем, что выполнена посылка условия 8.1, (F), т. е. множество

$$D(\sigma) = \{\mathbf{T} \in \mathbf{MT}(\mathbf{P}) \colon \mathbf{T} \text{ прямо вынуждает } \mathbf{c} \notin [\sigma \cdot \mathbf{T}(\zeta)]\}$$

плотно в $\mathbb{P}$, каково бы ни было $\sigma \in 2^{<\omega}$. В самом деле, пусть $\sigma \in 2^{<\omega}$ и $\mathbf{S}$ – произвольное мультидерево из $\mathbb{P}$. По предположению выше, $\mathbf{S}$ вынуждает $\mathbf{c} \neq \sigma \cdot x_\zeta[\underline{G}]$. Это означает, что найдется более сильное "условие" $\mathbf{T} \in \mathbb{P}$, $\mathbf{S} \leqslant \mathbf{T}$, а также пара кортежей $u \neq v$ из $2^{<\omega}$ одной и той же длины $\mathrm{lh}(u) = \mathrm{lh}(v) = n$, для которых $\mathbf{T}$ вынуждает, а следовательно, и прямо вынуждает, $u \subset \mathbf{c}$ и $v \subset \sigma \cdot x_\zeta[\underline{G}]$. Из вынуждения $v \subset \sigma \cdot x_\zeta[\underline{G}]$ легко следует, что дерево $T = \mathbf{T}(\zeta)$ удовлетворяет $v \subset \sigma \cdot \mathrm{stem}(T)$, и тогда, поскольку кортежи $u \neq v$ имеют одну и ту же длину, $\mathbf{T}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [\sigma \cdot \mathbf{T}(\zeta)]$, т. е. $\mathbf{T} \in D(\sigma)$, завершая доказательство плотности.

По доказанному и вследствие леммы 13.3 можно предполагать, что тот же ординал α удовлетворяет следующему условию: если $\sigma \in 2^{<\omega}$, то множество $D'(\sigma) = D(\sigma) \cap \mathbb{P}^\alpha$ плотно в $\mathbb{P}^\alpha$.

Но тогда из замечания 12.2 следует, что если $U \in Q^\alpha_\zeta$, то множество M_U всех мультидеревьев $\mathbf{V} \in \mathbb{P}^\alpha = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_\alpha)$, которые прямо вынуждают $\mathbf{c} \notin [U]$, плотно в $\mathbf{MT}(\mathbf{P}_\alpha \cup^{\mathrm{cw}} \mathbf{Q}_\alpha)$, следовательно, предплотно в $\mathbb{P}^{\alpha+1} = \mathbf{MT}(\mathbf{P}_{\alpha+1})$. А поскольку $M_U \in \mathfrak{M}_{\alpha+1}$, мы далее заключаем, что M_U предплотно и в $\mathbb{P}$ по лемме 13.1. Следовательно, если $U \in Q^\alpha_\zeta$, то $M_U \cap G \neq \varnothing$, откуда $x \notin [U]$. Другими словами, $x \notin \bigcup_{U \in Q^\alpha_\zeta} [U]$, так что $\mathbf{c}$ не является P_ζ-генерической точкой по лемме 15.1, что и требовалось. Лемма доказана.

§ 16. Неуниформизуемое множество

Этот короткий параграф содержит ключевой результат для доказательства теоремы 1.1 – нашей первой главной теоремы. Он состоит в следующем.

Лемма 16.1. *Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$. Тогда множество $K = K[G] = \{\langle \xi, x \rangle \colon \xi < \omega_1^{\mathbf{L}} \wedge x \mathsf{E}_0 x_\xi[G]\}$ принадлежит $\mathbf{L}[G]$ и имеет имеет такие свойства в $\mathbf{L}[G]$:*

i) $K = \{\langle \xi, x \rangle \colon \xi < \omega_1 \wedge$ *точка $x \in 2^\omega$ является P_ξ-генерической над $\mathbf{L}$*$\}$;

ii) *K принадлежит классу определимости Π^{HC}_1;*

iii) *если $\xi < \omega_1$, то сечение $K_\xi = \{x \colon \langle \xi, x \rangle \in K\}$ является E_0-классом;*

iv) *множество K не может быть* ROD-*униформизовано.*

Доказательство. Свойство i) выполнено по лемме 15.3, а iii) очевидно из определения: $K_\xi = [x_\xi[G]]_{\mathsf{E}_0}$. Для доказательства ii) заметим, что следствие 13.4 влечет равенство $\omega_1 = \omega_1^{\mathbf{L}}$ в $\mathbf{L}[G]$, а потому согласно лемме 15.1 формула $\langle \xi, x\rangle \in K$ равносильна утверждению

$$\xi < \omega_1 \wedge \forall\, \alpha \,\bigl(\xi < \alpha < \omega_1 \Rightarrow \exists T \in Q_\xi^\alpha \ (x \in [T])\bigr).$$

Однако формула во внешних скобках здесь выражает $\varDelta_1^{\mathrm{HC}}$-отношение согласно предложению 12.4.

Перейдем к доказательству свойства iv). Пусть, напротив, в $\mathbf{L}[G]$ истинно, что $R \subseteq K$ – униформизующее ROD-множество. Пусть $r \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[G]$ – это тот параметр, для которого множество R является $\{r\} \cup \mathbf{Ord}$-определимым в $\mathbf{L}[G]$.

Согласно следствию 13.4 найдется ординал $\zeta < \omega_1^{\mathbf{L}}$, для которого $r \in \mathbf{L}[G{\restriction}\zeta]$, и, тем более, $r \in \mathbf{L}[G{\restriction}\Delta_\zeta]$, где $\Delta_\zeta = \omega_1^{\mathbf{L}} \smallsetminus \{\zeta\}$. Поэтому та единственная точка $x \in 2^\omega$, для которой $\langle \zeta, x\rangle \in R$, является $(\{G{\restriction}\Delta_\zeta\} \cup \mathbf{Ord})$-определимой в $\mathbf{L}[G]$. Однако $R \subseteq K$, так что $x \mathsf{E}_0 x_\zeta[G]$. Значит, и сама точка $x_\zeta[G]$ $(\{G{\restriction}\Delta_\zeta\} \cup \mathbf{Ord})$-определима в $\mathbf{L}[G]$. Но это противоречит лемме 14.5, ii). Лемма доказана.

§ 17. Неуниформизуемое множество в евклидовой плоскости с сечениями в виде классов Витали

Теперь, чтобы закончить доказательство теоремы 1.1, мы перенесем множество $K[G]$ в евклидову плоскость с заменой E_0-классов на классы Витали. Это, в общем, элементарное преобразование. Оно содержится в доказательстве следующего результата и не связано с форсингом и моделями.

Следствие 17.1. *Если какое-то множество $K \subseteq \omega_1 \times 2^\omega$ удовлетворяет условиям* ii), iii) *и* iv) *леммы* 16.1, *и выполнено равенство $\omega_1^{\mathbf{L}} = \omega_1$, то найдется такое множество $W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, что*:

i) *W имеет класс определимости $\varPi_2^1$*;

ii) *если $z \in \mathbb{R}$, то сечение $W_z = \{x \colon \langle z, x\rangle \in W\}$ есть класс Витали*;

iii) *множество W не может быть ROD-униформизовано.*

Доказательство. Построение искомого множества проходит в три шага.

Шаг 1: переход от пространства $\omega_1 \times 2^\omega$ к пространству $2^\omega \times 2^\omega$. Зафиксировав рекурсивное перечисление рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{q_n \colon n < \omega\}$, мы сопоставляем каждой точке $z \in 2^\omega$ множество $Q_z = \{q_n \colon z(n) = 1\} \subseteq \mathbb{Q}$, его наибольший вполне упорядоченный (возможно, пустой) начальный сегмент $Q'_z \subseteq Q_z$ и порядковый тип $|z| < \omega_1$ этого множества Q'_z; понятно, что тогда $\{|z| \colon z \in 2^\omega\} = \omega_1$. Утверждается, что множество

$$A = \{\langle z, x\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega \colon \langle |z|, x\rangle \in K\}$$

удовлетворяет таким условиям:

1) A имеет класс определимости $\varPi_2^1$;

2) если $z \in 2^\omega$, то сечение $A_z = \{x \colon \langle z, x\rangle \in A\}$ есть E_0-класс;

3) множество A не может быть ROD-униформизовано.

В самом деле, множество A принадлежит $\varPi_1^{\mathrm{HC}}$ вместе с K, поскольку отображение $z \mapsto |z|$ является $\varDelta_1^{\mathrm{HC}}$-функцией. Следовательно, по теореме о переводе (теорема 9.1 в [10]) множество A является $\varPi_2^1$-множеством.

Далее, каждое сечение A_z совпадает с соответствующим сечением K_ξ множества K, где $\xi = |z|$, а потому является E_0-классом.

Для вывода неуниформизуемости предположим противное, т. е. что A униформизуется ROD-множеством $S \subseteq A$. Коль скоро предполагается $\omega_1^{\mathbf{L}} = \omega_1$, ко всякому ординалу $\xi < \omega_1$ существует точка $z \in 2^\omega \cap \mathbf{L}$, для которой $|z| = \xi$. Через $z(\xi)$ обозначим $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьшую из таких точек. Тогда

$$R = \{\langle \xi, x\rangle \in K \colon \langle z(\xi), x\rangle \in S\}$$

является ROD-подмножеством множества K, которое униформизует K, что противоречит выбору K. Итак, A в самом деле удовлетворяет условиям 1), 2) и 3).

Шаг 2: переход к пространству $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Рассмотрим множество $\mathbb{X}$ всех точек $x \in 2^\omega$, для которых оба множества $\{k \colon x(k) = 0\}$, $\{k \colon x(k) = 1\}$ бесконечны, и множество $\mathbb{Y}$ всех чисел r интервала $0 \leqslant r \leqslant 1$, не являющихся двоично-рациональными. Оба являются $\mathbf{G}_\delta$-множествами в соответствующих пространствах 2^ω и $\mathbb{R}$, точнее, множествами эффективного класса $\varPi_2^0$. Отображение $H(x) = \sum_{x(n)=1} 2^{-n}$ является биекцией $\mathbb{X}$ на $\mathbb{Y}$ и функцией класса $\varDelta_1^1$ (на самом деле, рекурсивным гомеоморфизмом), и если $x, y \in \mathbb{X}$ и $x\mathsf{E}_0 y$, то $|x - y|$ – рациональное число. Мы заключаем, что множество

$$B = \{\langle H(x), H(y)\rangle \colon \langle x, y\rangle \in A\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

удовлетворяет таким условиям:

1$'$) B имеет класс определимости $\varPi_2^1$;

2$'$) если $r = H(x) \in \mathbb{Y}$, то сечение $B_r = \{r' \colon \langle r, r'\rangle \in B\}$ является частью (собственной или несобственной) некоторого класса Витали;

3$'$) множество B не допускает ROD-униформизации, поскольку она влекла бы ROD-униформизацию и для множества A через отображение H.

Шаг 3: переход к полным классам Витали. Мы дополним каждое сечение B_r множества B до полного класса Витали. Для этого определим множество $W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ через его сечения W_r так, что

$$W_r = \begin{cases} \{r' + q \colon r' \in B_r \wedge q \text{ рационально}\}, & \text{если } r \in \mathbb{Y}, \\ \mathbb{Q} \text{ (все рациональные числа)}, & \text{если } r \notin \mathbb{Y}, \end{cases}$$

и это множество W завершает доказательство следствия 17.1.

В самом деле, во-первых, по определению имеем $W = P' \cup \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} P_q$, где

$$P' = \{\langle r, r'\rangle \colon r' \in \mathbb{Q} \wedge r \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{X}\}$$

– множество класса $\varDelta_3^0$ (так как $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{X}$ – множества из $\varSigma_2^0$), а $P_q = \{\langle r, r' + q'\rangle \colon \langle r, r'\rangle \in B\}$, где, напомним, B есть $\varPi_2^1$-множество по 1$'$). Отсюда следует, что и $W \in \varPi_2^1$, т. е. требование i) следствия 17.1.

Для проверки требования ii) следствия допустим, что $r \in \mathbb{R}$. Если $r \in \mathbb{Y}$, то B_r – часть некоторого класса Витали согласно 2$'$), а потому и W_r – класс Витали. Если же $r \notin \mathbb{Y}$, то просто $W_r = \mathbb{Q}$.

Наконец, для вывода требования iii) предположим противное, т. е. пусть множество W униформизуется ROD-множеством $S' \subseteq W$. Если $r \in \mathbb{R}$, то сечение S'_r содержит ровно одну точку, которую мы обозначим через $f(r)$; таким образом, $f(r) \in W_r$ и f принадлежит к ROD вместе с S'. Если при этом $r \in \mathbb{Y}$, то по определению найдется такое число $q \in \mathbb{Q}$, что $f(r) - q \in B_r$. Опять ссылаясь на рекурсивное перечисление $\mathbb{Q} = \{q_n : n < \omega\}$, через $n(r)$ обозначим наименьший индекс n, для которого $g(r) = f(r) - q_{n(r)} \in B_r$. Понятно, что $g\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ – все еще функция класса ROD, а ее график, т. е. множество $S = \{\langle r, g(r)\rangle : r \in \mathbb{Y}\}$ есть ROD-множество, которое униформизует B. Но это противоречит условию $3'$). Следствие доказано.

Соединяя лемму 16.1 и следствие 17.1, завершаем доказательство теоремы 1.1.

§ 18. Парадоксальная последовательность классов Витали

Этот заключительный параграф посвящен доказательству теоремы 1.2 – нашей второй главной теоремы. Моделью послужит определенная часть $\mathbb{P}$-генерического расширения $\mathbf{L}[G]$.

Определение 18.1. Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$. Положим $X[G] = \bigcup_{\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}} [x_\xi[G]]_{\mathsf{E}_0}$.

Таким образом, $X[G]$ есть объединение всех сечений

$$K[G]_\xi = \{x : \langle \xi, x\rangle \in K[G]\} = [x_\xi[G]]_{\mathsf{E}_0} \quad (\xi < \omega_1^{\mathbf{L}})$$

множества $K[G]$ из леммы 16.1, равное согласно лемме 16.1, i) множеству всех точек $x \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[G]$, являющихся P_ξ-генерическими для какого-то $\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$. Понятно, что $X[G] \in \mathbf{L}[G]$.

Моделью для доказательства теоремы 1.2 будет класс вида $\mathbf{L}(X[G])$, но по техническим причинам нам будет удобнее ввести его через понятия определимости, а не относительной конструктивности.

Определение 18.2. $\mathrm{HOD}(X[G])$ есть класс всех множеств $z \in \mathbf{L}[G]$, наследственно $(\mathbf{Ord} \cup X[G])$-определимых[11] в $\mathbf{L}[G]$.

Другими словами, множество $z \in \mathbf{L}[G]$ принадлежит $\mathbf{L}(X[G])$, если оно само, каждый его элемент, все элементы элементов и так далее, определимо в $\mathbf{L}[G]$ формулой, содержащей в роли параметров ординалы и точки $x \in X[G]$ (в конечном числе, разумеется). При этом из параметров $x \in X[G]$ достаточно брать лишь точки вида $x_\xi[G]$, $\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$, так как любая точка $x \in [x_\xi[G]]_{\mathsf{E}_0}$, очевидно, определима через $x_\xi[G]$.

Лемма 18.3. *Пусть множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$. Тогда* $\mathrm{HOD}(X[G])$ *– модель для теоремы* 1.2.

[11] HOD от английского *hereditarily ordinal definable.* Аргумент $X[G]$ показывает, откуда можно брать дополнительные параметры (дополнительно к ординалам) в определяющих формулах.

Доказательство. Класс $\mathrm{HOD}(X[G])$ по определению транзитивен и содержит все ординалы и все точки из $X[G]$. Отсюда следует, что множества $K[G]$ и $X[G] = \operatorname{ran} K[G]$ также принадлежат $\mathrm{HOD}(X[G])$, ибо они определимы в $\mathbf{L}[G]$ по лемме 16.1, i). Сам класс $\mathrm{HOD}(X[G])$, как и вообще любой класс вида $\mathrm{HOD}(X)$, где $X \subseteq 2^\omega$ является определимым множеством, есть модель $\mathbf{ZF}$ на основании общих теорем об ординальной определимости, см., например, теорему 24 в [28].

Далее, множество $K[G] \in \mathrm{HOD}(X[G])$ имеет класс определимости Π_1^{HC} в $\mathrm{HOD}(X[G])$ по тем же соображениям, которыми доказана лемма 16.1, ii).

После этих общих замечаний, мы докажем, что множество

$$P = \{\langle \xi, x\rangle \in K[G] \colon \xi < \omega\} \subseteq \omega \times 2^\omega$$

удовлетворяет требованиям теоремы 1.2, а именно, в $\mathrm{HOD}(X[G])$ истинно:

1) множество P имеет класс Π_1^{HC}, следовательно, класс Π_2^1;
2) все вертикальные сечения $P_n = \{x \colon \langle n, x\rangle \in P\}$ $(n < \omega)$ представляют собой E_0-классы эквивалентности, следовательно, счетны;[12]
3) объединение $\bigcup_n P_n$ не является счетным множеством, или, что эквивалентно, P нельзя униформизовать никаким множеством.

Утверждения 1) и 2) легко следуют из соответствующих свойств базового множества $K[G]$ по лемме 16.1, так что мы можем сконцентрироваться на 3). Прежде всего, обе формы 3) эквивалентны. В самом деле, если $U = \bigcup_n P_n$ счетно, т. е. имеется биекция $f : \omega \xrightarrow{\text{на}} U$, то униформизующее множество $Q \subseteq P$ может быть определено как множество всех пар вида $\langle n, f(k_n)\rangle$, где $n < \omega$, а k_n равно наименьшему числу k, для которого $f(k) \in P_n$. Обратно, если $Q \subseteq P$ – униформизующее множество, т. е. $Q = \{\langle n, g(n)\rangle \colon n < \omega\}$, где $g \colon \omega \to \omega$, то множество $U = \bigcup_n P_n$ удовлетворяет $U = \{s \cdot g(n) \colon s \in 2^{<\omega} \wedge n < \omega\}$, а потому счетно.

Теперь установим неуниформизуемость. Пусть, напротив, множество P униформизуется некоторым множеством $R \in \mathrm{HOD}(X[G])$, $R \subseteq P$. По определению это множество R является $(\{x_{\xi_1}[G], \dots, x_{\xi_k}[G]\} \cup \mathbf{Ord})$-определимым в $\mathbf{L}[G]$ для некоторого конечного множества $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$, т. е., очевидно, $(\{G{\restriction}\Xi\} \cup \mathbf{Ord})$-определимым множеством. Возьмем произвольное число $n < \omega$, $n \notin \Xi$. Тогда та единственная точка $x \in 2^\omega$, для которой $\langle n, x\rangle \in R$, $(\{G{\restriction}\Xi\} \cup \mathbf{Ord})$-определима в $\mathbf{L}[G]$. Однако $R \subseteq K$, так что мы имеем отношение $x \mathsf{E}_0 x_n[G]$. Значит, и сама точка $x_n[G]$ $(\{G{\restriction}\Xi\} \cup \mathbf{Ord})$-определима в $\mathbf{L}[G]$. Но это противоречит лемме 14.5, ii), поскольку $n \notin \Xi$. Лемма доказана.

Теорема 1.2 доказана.

Благодарность. Авторы благодарят анонимного рецензента за ценные замечания.

Список литературы

1. N. Lusin, “Sur le problème de M. J. Hadamard d’uniformisation des ensembles”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **190** (1930), 349–351.

[12] Перенос множества P в $\omega \times \mathbb{R}$ и переход к классам Витали, как формально требуется теоремой 1.2, совершенно аналогичен тому, как это сделано в разделе 17 в отношении примера для теоремы 1.1, и поэтому опускается.

2. Н. Н. Лузин, *Собрание сочинений*, т. II: *Дескриптивная теория множеств*, Изд-во АН СССР, М., 1958, 744 с.
3. В. А. Успенский, "Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания", *УМН*, **40**:3(243) (1985), 85–116; англ. пер.: V. A. Uspenskii, "Luzin's contribution to the descriptive theory of sets and functions: concepts, problems, predictions", *Russian Math. Surveys*, **40**:3 (1985), 97–134.
4. J. Hadamard, R. Baire, H. Lebesgue, E. Borel, "Cinq lettres sur la théorie des ensembles", *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1905), 261–273.
5. N. Lusin, "Sur le problème de M. Jacques Hadamard d'uniformisation des ensembles", *Mathematica* (*Cluj*), **4** (1930), 54–66.
6. Y. Moschovakis, *Descriptive set theory*, Stud. Logic Found. Math., **100**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1980, xii+637 pp.
7. В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств", *УМН*, **58**:5(353) (2003), 3–88; англ. пер.: V. G. Kanovei, V. A. Lyubetskii, "On some classical problems of descriptive set theory", *Russian Math. Surveys*, **5** (2003), 839–927.
8. В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств*: *борелевские и проективные множества*, МЦНМО, М., 2010, 320 с., https://www.mccme.ru/free-books/kanovej/set_theory.pdf.
9. В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств*: *абсолютно неразрешимые классические проблемы*, МЦНМО, М., 2013, 377 с., http://biblio.mccme.ru/node/2878.
10. В. Г. Кановей, "Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории", Добавление в кн.:, *Справочная книга по математической логике*, т. II, Наука, М., 1982, 273–364.
11. V. Kanovei, *Borel equivalence relations. Structure and classification*, Univ. Lecture Ser., **44**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, x+240 pp.
12. M. Kondô, "L'uniformisation des complémentaires analytiques", *Proc. Imp. Acad.*, **13**:8 (1937), 287–291.
13. Н. Н. Лузин, П. С. Новиков, "Эффективный выбор точки в произвольном аналитическом дополнении, заданном посредством решета": Н. Н. Лузин, *Собрание сочинений*, т. II: *Дескриптивная теория множеств*, Изд-во АН СССР, М., 1958, 617–618; пер. с фр.: N. Lusin, P. Novikoff, "Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire donné par un crible", *Fundamenta Math.*, **25** (1935), 559–560.
14. П. Дж. Коэн, *Теория множеств и континуум-гипотеза*, Мир, М., 1969, 347 с.; пер. с англ.: P. J. Cohen, *Set theory and the continuum-hypothesis*, W. A. Benjamin, Inc., New York–Amsterdam, 1968, vi+154 pp.
15. К. Ф. Гёдель, "Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств", *УМН*, **3**:1(23) (1946), 96–149; пер. с англ.: K. Gödel, *The consistency of the continuum hypothesis*, Ann. of Math. Stud., **3**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1940, 66 pp.
16. K. Hauser, R.-D. Schindler, "Projective uniformization revisited", *Ann. Pure Appl. Logic*, **103**:1-3 (2000), 109–153.
17. A. Lévy, "Definability in axiomatic set theory. II", *Mathematical logic and foundations of set theory* (Jerusalem, 1968), North-Holland, Amsterdam, 1970, 129–145.
18. R. M. Solovay, "A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable", *Ann. of Math.* (2), **92** (1970), 1–56.
19. В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "Определимое счетное множество, не содержащее определимых элементов", *Матем. заметки*, **102**:3 (2017), 369–382; англ. пер.:

V. G. Kanovei, V. A. Lyubetsky, “A countable definable set containing no definable elements”, *Math. Notes*, **102**:3 (2017), 338–349; *A countable definable set of reals containing no definable elements*, arXiv: 1408.3901.

20. R. Jensen, “Definable sets of minimal degree”, *Mathematical logic and foundations of set theory* (Jerusalem, 1968), North-Holland, Amsterdam–London, 1970, 122–128.
21. T. Jech, *Set theory*, 3rd millennium ed., rev. and exp., Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2003, xiv+769 pp.
22. V. Kanovei, V. Lyubetsky, “Counterexamples to countable-section Π^1_2 uniformization and Π^1_3 separation”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **167**:3 (2016), 262–283.
23. V. Kanovei, V. Lyubetsky, “A definable E_0-class containing no definable elements”, *Arch. Math. Logic*, **54**:5-6 (2015), 711–723.
24. M. Golshani, V. Kanovei, V. Lyubetsky, “A Groszek–Laver pair of undistinguishable E_0-classes”, *MLQ Math. Log. Q.*, **63**:1-2 (2017), 19-31.
25. W. Sierpiński, “L’axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l’analyse”, *Bull. Acad. Sci. Cracovie*, **1918** (1918), 97–152.
26. Н. Н. Лузин, “Об аналитических множествах”: Н. Н. Лузин, *Собрание сочинений*, т. II: *Дескриптивная теория множеств*, Изд-во АН СССР, М., 1958, 380–459; пер. с фр.: N. Lusin, “Sur les ensembles analytiques”, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 1–95.
27. В. Г. Кановей, “О мощности множества классов эквивалентности Витали”, *Матем. заметки*, **49**:4 (1991), 55–62; англ. пер.: V. G. Kanovei, “Cardinality of the set of Vitali equivalence classes”, *Math. Notes*, **49**:4 (1991), 370–374.
28. Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Мир, М., 1973, 148 с.; пер. с англ.: T. J. Jech, *Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing*, Lecture Notes in Math., **217**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1971, iv+137 pp.
29. L. A. Harrington, A. S. Kechris, A. Louveau, “A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations”, *J. Amer. Math. Soc.*, **3**:4 (1990), 903–928.
30. *Справочная книга по математической логике*, т. II: *Теория множеств*, ред. К. Дж. Баруайз, Наука, М., 1982, 375 с.; пер. с англ.: “Set theory”, *Handbook of mathematical logic*, Part B, Stud. Logic Found. Math., **90**, ed. J. Barwise, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York–Oxford, 1977, 317–522.

Владимир Григорьевич Кановей
(Vladimir G. Kanovei)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва;
Российский университет транспорта (МИИТ),
г. Москва
E-mail: kanovei@rambler.ru

Поступило в редакцию
10.02.2016

Василий Александрович Любецкий
(Vassily A. Lyubetsky)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва;
Механико-математический факультет,
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
E-mail: lyubetsk@iitp.ru