УДК 510.223+510.227

В. Г. Кановей

Об упорядоченных структурах Хаусдорфа

Предлагается классификация проблем существования таких структур, как пределы, щели, башни, лестницы, в хаусдорфовых частично упорядоченных множествах бесконечных последовательностей, включая последовательности с вещественными членами и разные отношения частичного порядка.

Библиография: 27 наименований.

Ключевые слова: упорядоченные структуры Хаусдорфа, щели Хаусдорфа, башни, пределы.

Введение

Предположим, что $\langle P;\leqslant\rangle$ – какое-либо частично упорядоченное множество, область P которого состоит из вещественных функций, заданных на полупрямой $[0,+\infty)$, или из бесконечных последовательностей вещественных чисел, а сам порядок $\leqslant$ соответствует следующему: $f\leqslant g$ означает, что функция (или последовательность) g растет быстрее, чем f. Ф. Хаусдорф назвал использование любой такой частично упорядоченной структуры $\langle P;\leqslant\rangle$ *методом классификации* функций либо последовательностей (*Graduierungsmethod*) по скорости возрастания. Примеры таких структур (мы их называем *хаусдорфовыми*) приведены в § 1.

История исследований таких упорядоченных структур восходит к работам П. Дюбуа Раймона (см. [1] и др.), которым следовали Дж. Адамар [2], Е. Борель [3], Г. Харди [4] и др. Ф. Хаусдорф предложил в [5], [6] иной подход к исследованию этих структур, основанный на поиске определенных *линейно* и даже *вполне* упорядоченных подструктур для данного *частичного* порядка. Эти подструктуры являются (обычно трансфинитными) возрастающими или убывающими последовательностями либо сводятся к таким последовательностям. К их числу относятся, в частности, *лестницы*, *башни*, *пределы*, *щели*, широко изучаемые в современной теории множеств и теоретико-множественной топологии (см., например, [7]–[10]). Эти подструктуры определяются далее в § 2.

Оказывается, что, кроме нескольких простых теорем несуществования, основанных на применении диагональной конструкции, а также довольно сложной теоремы существования (ω_1,ω_1^*)-щели, вопросы существования указанных

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 06-01-00608, 07-01-00445).

подструктур в хаусдорфовых структурах приводят к неразрешимым проблемам. Например, на основе аксиом современной аксиоматической теории множеств **ZFC** невозможно ни доказать, ни опровергнуть утверждение о существовании (ω_1, ω^*)-щели, ω_1-предела и т. д. Более подробно об этом сказано в § 6.

Однако не все такие проблемы являются независимыми друг от друга. Так, еще Ф. Ротбергером [11], [12] установлено, что для порядка эвентуального доминирования $\leqslant^*$ (см. § 1) утверждение о существовании ω_1-башни в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ равносильно утверждению о существовании (ω_1, ω^*)-щели в $2^{\mathbb{N}}$ и каждое из этих утверждений влечет существование ω_1-предела в $2^{\mathbb{N}}$. (При этом каждая из этих трех гипотез существования неразрешима в **ZFC**.) Впоследствии были получены некоторые другие результаты о взаимной сводимости и эквивалентности этих проблем (см., например, [10], [13]), которые, однако, не исчерпали все многообразие задач даже для самого простого случая, связанного с кардиналом ω_1. Действительно, для ω_1 нетривиальным является почти любое сочетание одной из трех областей $2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, одного из четырех хаусдорфовых порядков, рассмотренных в § 1, и одного из четырех упомянутых типов подструктур (т. е. лестницы и пр.).

Целью настоящей работы является классификация этих проблем. Помимо хорошо изученных комбинаций областей $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и порядков $\preccurlyeq$, $\leqslant^*$, мы рассматриваем более трудные задачи, связанные с областью $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ последовательностей произвольных вещественных чисел и с мало исследованными порядками $\trianglelefteq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$. Согласно нашему основному результату – теореме 5 из § 5 (доказательство см. в § 7) – для случая кардинала ω_1 все рассматриваемые задачи, кроме тех немногих, которые связаны со щелями и пределами для порядка $\trianglelefteq$, классифицируются по трем уже известным типам (лестницы, башни, т. е. щели и пределы). Для кардиналов $\kappa > \omega_1$ теорема 5 дает несколько менее определенные результаты.

Мы также рассмотрим в § 3 некоторые задачи, касающиеся связи рассматриваемых упорядоченных структур с их *континуальными* аналогами, т. е. такими структурами, которые состоят из непрерывных вещественных функций, заданных на $[0, +\infty)$, а не из бесконечных последовательностей.

§ 1. Хаусдорфовы упорядоченные структуры

Под нестрогим (частичным) порядком мы будем понимать любое транзитивное (т. е. $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$ влечет $x \leqslant z$) и рефлексивное ($x \leqslant x$ для всех x) бинарное отношение $\leqslant$ на некотором множестве X, называемом *областью* $\leqslant$. При этом не предполагается, что $x \leqslant y \wedge y \leqslant x$ влечет $x = y$. Также не предполагается линейность, т. е. не обязательно, чтобы любые два элемента $x, y \in X$ были сравнимы отношением $\leqslant$. (Такие отношения иногда называются *предпорядками*, или *квазипорядками*.) Имея такой порядок $\leqslant$, мы можем определить отношение эквивалентности $x \equiv y$, когда $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$, а также строгий порядок $x < y$, когда $x \leqslant y$, но $y \nleqslant x$ на той же области. Обратно, если заданы отношение эквивалентности $\equiv$ и $(\equiv)$-инвариантный строгий порядок $<$, то можно определить нестрогий порядок $x \leqslant y$, если $x < y$ или $x \equiv y$.

Областью следующих частично упорядоченных множеств является множество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных последовательностей $a = \{a(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ вещественных чисел $a(n)$. Ниже мы будем понимать элементы $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ как *функции* (из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{R}$), резервируя слово "последовательность" для трансфинитных последовательностей элементов из $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Рассматриваются также и подмножества $2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ множества $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; они состоят из бесконечных последовательностей, членами которых являются натуральные числа (для области $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) и числа 0, 1 (для *диадической* области $2^{\mathbb{N}}$).

Определение порядка на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ через скорость роста, приведенное в [5]:

$$a \preccurlyeq b, \quad \text{если} \quad \exists \lim_{n \to \infty} \bigl(a(n) - b(n)\bigr) < +\infty,$$

отличается от определения порядка по скорости роста, данного ранее П. Дюбуа Раймоном для вещественных функций:

$$f \preccurlyeq g, \quad \text{когда} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty,$$

однако логарифм последней дроби становится, очевидно, разностью логарифмов, а это индуцирует изоморфизм между вариантом последнего определения для $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ с положительными членами и первым определением. С другой стороны, определение через разность несколько более удобно технически, а потому более принято в современных исследованиях.

Простые примеры показывают, что предел в определении $\preccurlyeq$ может и не существовать, так что в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеются ($\preccurlyeq$)-несравнимые элементы. Чтобы избавиться от возникающих при этом проблем, Ф. Хаусдорф предложил в [5] заменить предел верхним пределом (который всегда существует). Это приводит к модифицированному порядку по скорости роста:

$$a \trianglelefteq b, \quad \text{если} \quad \limsup_{n \to \infty} \bigl(a(n) - b(n)\bigr) < +\infty.$$

Однако несравнимые элементы все же существуют, например константа 1 и функция $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, заданная равенствами $a(n) = n$ для четных n и $a(n) = n^{-1}$ для нечетных. В сущности, невозможно разумно задать порядок на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, который бы сравнивал любую пару элементов $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и был минимально совместим с $\preccurlyeq$ (см. далее).

Следующий порядок на $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ назван в [5] *финальным* (final Rangordnung):

$$\begin{aligned} a \leqslant_{\mathrm{fro}} b, \quad \text{если} \quad \exists\, n_0 \colon \quad &\text{либо } a(n) < b(n) \quad \forall\, n \geqslant n_0, \\ &\text{либо } a(n) = b(n) \quad \forall\, n \geqslant n_0. \end{aligned}$$

Легко видеть, что для $a \preccurlyeq b$ необходимо и достаточно, чтобы $c + a \leqslant_{\mathrm{fro}} b$ было выполнено для каждой константы c. (Здесь $c + a$ обозначает функцию $a'(n) = a(n) + c$.)

Порядок $\leqslant^*$, называемый *эвентуальным доминированием*, введен в [14]:

$$a \leqslant^* b, \quad \text{если} \quad \exists\, n_0 \colon \quad \forall\, n \geqslant n_0 \quad (a(n) \leqslant b(n)).$$

Определение 1. *Хаусдорфовой упорядоченной структурой*, для краткости ХУС, называется каждое частично упорядоченное множество вида $\langle D; \leqslant \rangle$, область D которого является одним из множеств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $2^{\mathbb{N}}$, а само отношение порядка $\leqslant$ взято из списка $\preccurlyeq$, $\trianglelefteq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$, $\leqslant^*$, за исключением не представляющих интереса тривиальных структур $\langle 2^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$, $\langle 2^{\mathbb{N}}; \trianglelefteq \rangle$ и $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$. Таким образом, всего имеется девять (нетривиальных) ХУС, из которых одна *диадическая* $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$, четыре ХУС могут быть названы структурами $\mathbb{N}$-*типа* (т. е. с множеством $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в качестве области), а оставшиеся четыре – структурами $\mathbb{R}$-*типа* (с множеством $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ в качестве области).

Для каждого из этих четырех порядков $\preccurlyeq$, $\trianglelefteq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$, $\leqslant^*$ мы естественным образом определяем (см. выше) соответственно отношение эквивалентности

$$\sim, \quad \bowtie, \quad \equiv_{\mathrm{fro}}, \quad \equiv^*,$$

а также соответственно строгий порядок

$$\prec, \quad \lhd, \quad <_{\mathrm{fro}}, \quad <^* .$$

Например, $x \sim y$, когда $x \preccurlyeq y$ и $y \preccurlyeq x$, а $x \prec y$, когда $x \preccurlyeq y$, но $y \not\preccurlyeq x$.

Заметим, что отношения порядка $\leqslant_{\mathrm{fro}}$ и $\leqslant^*$, отличные друг от друга, индуцируют одно и то же отношение эквивалентности $\equiv_{\mathrm{fro}} = \equiv^*$, т. е.

$$a \equiv_{\mathrm{fro}} b \Leftrightarrow a \equiv^* b \Leftrightarrow a(n) = b(n) \quad \text{для всех, кроме конечного числа, } n,$$

но разные строгие отношения удовлетворяют соотношению $<_{\mathrm{fro}} \subsetneq <^*$.

§ 2. Щели, пределы, башни, лестницы

Здесь мы определим несколько важных типов линейно упорядоченных подструктур для ХУС. Зафиксируем частично упорядоченное множество $P = \langle P; \leqslant \rangle$, и пусть через $<$ обозначен соответствующий строгий порядок. Пусть κ, λ – пара кардиналов (мощностей), каждый из которых предполагается либо бесконечным и регулярным, либо конечным и равным 0 или 1. (Остальные конечные значения тривиально сводятся к этим двум в обсуждаемых вопросах.)

Введем следующие определения:

1) (κ, λ^*)-*предщелью* называется всякая пара из $(<)$-возрастающей последовательности $X = \{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ и $(<)$-убывающей последовательности $Y = \{y_\beta\}_{\beta<\lambda}$ элементов $x_\alpha, y_\beta \in P$ таких, что $X < Y$ (т. е. $x_\alpha < y_\beta$ для всех $\alpha < \kappa$, $\beta < \lambda$);

2) о любом элементе $z \in P$, удовлетворяющем $X < z < Y$, говорят, что он *заполняет* предщель $\langle X, Y \rangle$, а если таких элементов z не существует, то данная (κ, λ^*)-предщель называется (κ, λ^*)-*щелью*[1];

3) κ-*пределом* называется $(\kappa, 1^*)$-щель[2], т. е. пара из $(<)$-возрастающей последовательности $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ и выделенного элемента $x \in P$, для которых $x_\alpha < x$

[1] А также часто и (κ, λ)-*щелью*, где второй кардинал λ обозначает порядковый тип убывающей последовательности.

[2] В большинстве рассматриваемых здесь случаев частично упорядоченные множества будут достаточно симметричны для того, чтобы существование $(\kappa, 1^*)$-щелей было эквивалентно существованию $(1, \kappa^*)$-щелей, и последний тип щелей будет называться *убывающим* пределом.

при любом α, и при этом нет другого элемента y такого, что $x_\alpha < y < x$ для любого α; в этом случае удобно записывать $x = \lim_{\alpha\to\kappa} x_\alpha$;

4) *κ-башней* называется любая $(\kappa, 0^*)$-щель, т. е. $(<)$-возрастающая κ-последовательность, неограниченная сверху[3];

5) *κ-лестницей* называется всякая $(<)$-возрастающая последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ в P такая, что для каждого $x \in P$ мы имеем $x < x_\alpha$ для какого-то α.

Башни и лестницы относятся к более широким типам неограниченных и доминирующих множеств соответственно.

Неограниченными множествами называются те множества $X \subseteq P$, для которых не существуют элементы $x \in P$, удовлетворяющие $X \leqslant x$ (т. е. $x' \leqslant x$ для всех $x' \in X$).

Доминирующими множествами называются те множества $X \subseteq P$, для которых выполнено следующее: для каждого $x' \in P$ существует $x \in X$ такое, что $x' \leqslant x$.

Согласно введенной терминологии башней в структуре $P = \langle P; \leqslant\rangle$ будет любое вполне $(<)$-упорядоченное неограниченное множество, а лестницей – любое вполне $(<)$-упорядоченное доминирующее множество. Все доминирующие множества неограничены при условии, что не существует наибольших элементов.

§ 3. Континуальные структуры

Каждая из частично упорядоченных структур, определенных в § 1 на области $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ всех бесконечных последовательностей вещественных чисел, имеет очевидную *континуальную* модификацию, определенную на множестве C всех непрерывных функций[4] $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Можно рассматривать и более широкие семейства функций, например кусочно непрерывные, но ограниченные на каждом ограниченном интервале в $[0, +\infty)$.

Следующая теорема содержит несколько утверждений, связывающих дискретные и непрерывные структуры с отношениями $\preccurlyeq$, $\trianglelefteq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$, $\leqslant^*$ в вопросах о существовании щелей и лестниц.

Теорема 2. *Предположим, что $\leqslant$ – одно из отношений порядка $\preccurlyeq$, $\trianglelefteq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$ или $\leqslant^*$, а κ – бесконечный регулярный кардинал. Тогда*:

(i) *из существования κ-лестницы в $\langle\mathbb{R}^\mathbb{N}; \leqslant\rangle$ следует существование κ-лестницы в $\langle C; \leqslant\rangle$*;

(ii) *обратно, из существования κ-лестницы в $\langle C; \leqslant\rangle$ следует существование κ-лестницы в $\langle\mathbb{R}^\mathbb{N}; \leqslant\rangle$.*

Если дополнительно либо λ – бесконечный регулярный кардинал, либо $\lambda = 0$, либо $\lambda = 1$, и при этом $\leqslant$ – одно из отношений $\preccurlyeq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$, то мы имеем:

(iii) *из существования (κ, λ^*)-щели в структуре $\langle\mathbb{R}^\mathbb{N}; \leqslant\rangle$ следует существование (κ, λ^*)-щели в $\langle C; \leqslant\rangle$.*

---

[3] Также рассматриваются убывающие κ-последовательности, неограниченные снизу, – *убывающие* башни.

[4] Таким образом, слово "континуальная" отражает здесь характер области определения функции, а не самой функции. На самом деле рассмотрение континуальных модификаций, скажем, для порядков $\preccurlyeq$ и $\trianglelefteq$ исторически предшествовало рассмотрению *дискретных* форм (т. е. тех, которые заданы на $\mathbb{R}^\mathbb{N}$). Последние стали систематически изучаться Ф. Хаусдорфом в работе [5].

Напомним, что $(\kappa, 0^*)$-щели – это κ-башни, а $(\kappa, 1^*)$-щели – это κ-пределы.

Доказательство. Для любой функции $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ через $f \restriction \mathbb{N}$ обозначим последовательность $\{f(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ значений f на натуральных числах. До конца доказательства $\leqslant$ может быть любым отношением порядка из списка $\{\preccurlyeq, \trianglelefteq, \leqslant_{\mathrm{fro}}, \leqslant^*\}$.

(i) Рассмотрим какую-нибудь лестницу $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$ в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$. Для каждого индекса ξ определим функцию $f_\xi \in C$ так, что $a_\xi = f_\xi \restriction \mathbb{N}$ и f_ξ линейна на каждом из интервалов $[n, n+1]$. Понятно, что последовательность функций $\{f_\xi\}_{\xi<\kappa}$ $(<)$-возрастает вместе с исходной последовательностью $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$, где $<$ – строгий порядок, определяемый из данного нестроевого порядка $\leqslant$. Чтобы проверить, что $\{f_\xi\}$ – лестница, рассмотрим произвольную функцию $f \in C$. Благодаря непрерывности значение $a(n) = n \max_{0\leqslant x\leqslant n+1} f(x)$ конечно для каждого n, а потому мы имеем $a = \{a(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Поскольку $a \leqslant a_\xi$ для какого-то ξ, имеем $f \leqslant f_\xi$.

(ii) Теперь рассмотрим произвольную лестницу $\{f_\xi\}_{\xi<\kappa}$ в $\langle C; \leqslant\rangle$. Определим ограничение $a_\xi = f_\xi \restriction \mathbb{N}$ для каждого ξ. Пусть $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Найдется непрерывная функция $f \in C$ такая, что $a = f \restriction \mathbb{N}$. Тогда $f \preccurlyeq f_\xi$ для какого-либо $\xi < \kappa$, а потому $a \preccurlyeq a_\xi$, что и требовалось доказать. Далее, последовательность $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$, очевидно, $(\leqslant)$-возрастает, но не обязательно $(<)$-возрастает в случае, когда $\leqslant$ – отношение $\trianglelefteq$ или $\leqslant^*$, поскольку в этом случае $f < g$ не обязательно влечет $f \restriction \mathbb{N} < g \restriction \mathbb{N}$. Поэтому, удалив определенные члены, мы можем превратить последовательность $\{a_\xi\}$ в $(<)$-возрастающую, т. е. в лестницу, причем длиной не более κ. Однако эта лестница не может иметь длину строго меньше κ, поскольку в этом случае мы имели бы лестницу строго меньшей длины и в $\langle C; \leqslant \rangle$ по (i), что невозможно, поскольку лестниц разной (бесконечной регулярной) длины быть не может.

(iii) Рассмотрим произвольную (κ, λ^*)-щель $\langle \{a_\xi\}_{\xi<\kappa}, \{b_\eta\}_{\eta<\lambda}\rangle$ в структуре $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$. Найдутся функции $f_\xi, g_\eta \in C$, линейные на каждом отрезке $[n, n+1]$ и удовлетворяющие $a_\xi = f_\xi \restriction \mathbb{N}$ и $b_\eta = g_\eta \restriction \mathbb{N}$. Тогда мы имеем $f_\xi < f_{\xi'} < g_{\eta'} < g_\eta$ для всех $\xi < \xi' < \kappa$ и $\eta < \eta' < \lambda$. Проверим, что пара $\langle \{f_\xi\}_{\xi<\kappa}, \{g_\eta\}_{\eta<\lambda}\rangle$ является щелью. Предположим противное, т. е. найдется функция $h \in C$ такая, что $f_\xi < h < g_\eta$ для всех ξ, η. Тогда $c = h \restriction \mathbb{N}$ удовлетворяет $a_\xi \leqslant c \leqslant b_\eta$ для всех ξ, η. Рассмотрим несколько случаев.

Если κ и λ – предельные ординаты, то $a_\xi < a_{\xi+1} \leqslant c \leqslant b_{\eta+1} < b_\eta$, а потому выполнены строгие неравенства $a_\xi < c < b_\eta$. Противоречие.

Если $\leqslant$ – одно из отношений $\preccurlyeq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$, то $f < g$, очевидно, влечет $f \restriction \mathbb{N} < g \restriction \mathbb{N}$, откуда также вытекает, что выполнены строгие неравенства $a_\xi < c < b_\eta$. Противоречие.

Наконец, если $\lambda = 0$, т. е. $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$ является башней, а мы хотим доказать то же и для последовательности $\{f_\xi\}$, то мы имеем $a_\xi \leqslant c$ (см. выше). Противоречие.

Теорема доказана.

Мы не знаем, верно ли обращение утверждения (iii) теоремы 2. Чтобы продемонстрировать возникающие здесь трудности, рассмотрим произвольную (κ, λ^*)-щель $\langle \{f_\xi\}_{\xi<\kappa}, \{g_\eta\}_{\eta<\lambda}\rangle$ в $\langle C; \preccurlyeq\rangle$. Положим $a_\xi = f_\xi \restriction \mathbb{N}$ и $b_\eta = g_\eta \restriction \mathbb{N}$. Тогда $a_\xi \prec a_{\xi'} \prec b_{\eta'} \prec b_\eta$ для всех $\xi < \xi' < \kappa$ и $\eta < \eta' < \lambda$. Если теперь $c \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

удовлетворяет $a_\xi \preccurlyeq c \preccurlyeq b_\eta$ для всех ξ, η, то остается неясным, как определить функцию $h \in C$, удовлетворяющую равенству $c = h \restriction \mathbb{N}$ и заполняющую щель $\langle \{f_\xi\}, \{g_\eta\} \rangle$.

Также остается неясным, имеет ли место (iii) для $\lambda = 1$ (случай пределов) и порядка $\leqslant$, совпадающего с $\trianglelefteq$ или $\leqslant^*$. В самом деле, пусть κ-предел $\langle \{a_\xi\}_{\xi<\kappa}, b_0 \rangle$ в структуре, скажем, $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \trianglelefteq \rangle$ имеет следующее свойство: если ξ четно, то $a_\xi(n) = b_0(n)$ для четных n, но $a_\xi(n) < b_0(n)$ для нечетных n, и в этом случае $b_0(n) - a_\xi(n) \to +\infty$, а для нечетных ξ наоборот (четность и нечетность меняются местами). Тогда пара $\langle \{f_\xi\}_{\xi<\omega_1}, g_0 \rangle$, определенная, как в доказательстве утверждения (iii) теоремы 2, не обязательно будет κ-пределом в $\langle C; \trianglelefteq \rangle$.

§ 4. Теорема Хаусдорфа о щели

Нетрудно проверить (и Ф. Хаусдорф сделал это в [5]), что (ω, ω^*)-щели и ω-пределы не существуют в рассматриваемых структурах. Доказательство восходит к диагональной конструкции П. Дюбуа Раймона [1]. Например, допустим, что

$$a_0 <^* a_1 <^* a_2 <^* \cdots <^* b_2 <^* b_1 <^* b_0, \qquad a_i, b_j \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}.$$

Существует последовательность натуральных чисел $n_0 < n_1 < \cdots$ такая, что $a_i(n) < b_j(n)$ для всех k и $i, j \leqslant k$ при условии, что $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Положим $c(n) = \max_{i \leqslant k} a_i(n)$ для всех n, удовлетворяющих неравенствам $n_k \leqslant n < n_{k+1}$. Тогда выполнено $a_n <^* c <^* b_n$ для всех n.

Следующая теорема более сложная. Мы дадим набросок ее доказательства для удобства читателя, так как на русском языке найти это доказательство трудно.

Теорема 3 (теорема Хаусдорфа о щели). *(ω_1, ω_1^*)-щель существует в каждой из упорядоченных структур Хаусдорфа.*

Результат конкретно для $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$ появился в [6], а в варианте для диадической структуры $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ – в [14], что и является стандартной ссылкой в современной литературе. Доказательства в [6] и [14] следуют одной и той же схеме, которая, с определенными модификациями, может быть применена и для всех остальных ХУС. Однако такое обобщение также может быть установлено и как формальное следствие тех редукции, которые мы выведем в § 7.

Доказательство теоремы 3 (набросок – для структуры $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$). Если $a, b \in 2^{\mathbb{N}}$ и $a \leqslant^* b$, то через $(a; b)$ будем обозначать наименьшее число n_0, для которого $n \geqslant n_0 \Rightarrow a(n) \leqslant b(n)$. Будем строить $(<^*)$-возрастающую последовательность $A = \{a_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ и $(<^*)$-убывающую последовательность $B = \{b_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ элементов $a_\xi, b_\xi \in 2^{\mathbb{N}}$, которые удовлетворяют неравенству $a_\eta <^* b_\xi$ для всех ξ, η (т. е. $\langle A, B \rangle$ образует предщель) и следующему ключевому требованию:

$(*)$ *для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\xi < \omega_1$ множество $\{\eta < \xi \colon (a_\eta; b_\xi) = n\}$ конечно.*

Условие $(*)$ можно понимать в том смысле, что, хотя b_ξ и расположено строго $(<^*)$-выше всех a_η, имеет место определенная $(<^*)$-близость b_ξ к множеству $\{a_\eta \colon \eta < \xi\}$. Если такое построение выполнено, то пара $\langle A, B \rangle$ оказывается искомой (ω_1, ω_1^*)-щелью. В самом деле, пусть, напротив, $c \in 2^{\mathbb{N}}$ и $a_\xi <^* c <^* b_\xi$ для всех ξ. Согласно нечетности ω_1 найдутся ординал ξ и число n такие, что $(a_\eta; c) = n$ для бесконечно многих $\eta < \xi$. Однако это, очевидно, противоречит условию $(*)$, поскольку $c <^* b_\xi$.

Теперь рассмотрим индуктивную конструкцию членов последовательностей, удовлетворяющих условию $(*)$. Непредельные шаги достаточно очевидны: если члены $a_\xi <^* b_\xi$ уже определены, то в качестве $a_{\xi+1}$ и $b_{\xi+1}$ берем любую пару $a, b \in 2^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющую $a_\xi <^* a <^* b <^* b_\xi$. Предельные шаги требуют бо́льших усилий. Допустим, что $\lambda < \omega_1$ – предельный ординал и a_ξ, b_ξ уже определены для всех $\xi < \lambda$ так, что условие $(*)$ выполнено. То же самое рассуждение, которое мы привели выше для доказательства несуществования (ω, ω^*)-щелей, позволяет определить $c \in 2^{\mathbb{N}}$ такое, чтобы $a_\xi <^* c <^* b_\xi$ для всех $\xi < \lambda$. Однако согласно индуктивному предположению $(*)$ множество $\{\eta < \xi\colon (a_\eta; c) = n\}$ конечно, каковы бы ни были число n и ординал $\xi < \lambda$. В этом случае другая версия того же самого рассуждения позволяет определить $b \in 2^{\mathbb{N}}$ такое, что $b <^* c$, при этом по-прежнему $a_\xi <^* b$ для всех $\xi < \lambda$, и, кроме того, для каждого n множество $\{\eta < \lambda\colon (a_\eta; b) = n\}$ конечно. Положим $b_\lambda = b$, а в качестве a_λ возьмем любое $a \in 2^{\mathbb{N}}$, для которого $a_\xi <^* a <^* b$ при всех ξ.

§ 5. Главная проблема и основная теорема

Настоящая статья посвящена, главным образом, следующей общей проблеме, связанной с теми частичными порядками, которые названы ХУС в § 1.

Проблема 4 (главная проблема). Каковы структура, свойства и спектр кардиналов щелей, башен, пределов, лестниц для данного частично упорядоченного множества $P = \langle P; \leqslant \rangle$? Например, если κ, λ – регулярные кардиналы, имеет ли множество P (κ, λ^*)-щели или κ-лестницы?

Эта проблема включает ряд более специальных вопросов о существовании щелей (в том числе, пределов и башен), а также лестниц с определенными мощностными характеристиками. Например, для самого простого (но и наиболее интересного) случая $\kappa = \omega_1$ вопросы существования ω_1-пределов, ω_1-башен и (ω_1, ω^*)-щелей для различных ХУС рассматривались в самых первых работах Хаусдорфа, например в [6]. Ф. Хаусдорф рассматривал эти проблемы как связанные с континуум-гипотезой **CH** (т. е. с равенством $\mathfrak{c} = \aleph_1$), решение которой тогда еще не было известно. Помимо теоремы 3, главные результаты Хаусдорфа в отношении этих специальных вопросов в его ранних работах [5], [6] сводятся к следующему:

(I) проблемы существования ω_1-пределов, ω_1-башен и (ω_1, ω^*)-щелей в структуре $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$ эквивалентны друг другу: из существования одного из упомянутых объектов следует существование двух других;

(II) континуум-гипотеза **CH** влечет существование ω_1-пределов, ω_1-башен и (ω_1, ω^*)-щелей, а также ω_1-лестниц в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$.

Дальнейшее изучение взаимосвязей между этими проблемами было предпринято Ф. Ротбергером в работах [11], [12], где доказано, что для частично упорядоченного множества $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ существование (ω_1, ω^*)-щели равносильно существованию ω_1-башни и влечет существование ω_1-предела. Для сравнения с результатом Хаусдорфа (I) полезно учитывать, что пределы имеют несколько различную природу в структуре $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$ и в диадической структуре $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$.

Примерно в то же время еще одна область применения тех же идей и конструкций была обнаружена Н. Н. Лузиным [15], [16]. Рассмотрим множество $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{x\colon x\subseteq\mathbb{N}\}$ всех подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$, упорядоченное отношением *почти включения*: $x\subseteq^* y$, если разность $x\setminus y$ конечна. Структура $\langle\mathscr{P}(\mathbb{N});\subseteq^*\rangle$, очевидно, изоморфна структуре $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$. Н. Н. Лузин построил пару строго $(\subset^*)$-возрастающих последовательностей $\{x_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ и $\{y_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ множеств $x_\xi, y_\xi\subseteq\mathbb{N}$, *ортогональных* (т. е. все пересечения $x_\xi\cap y_\xi$ конечны), но *неотделимых* (т. е. нет такого множества z, что $x_\xi\subseteq^* z$, но $y_\xi\cap z$ конечно для каждого ξ), что равносильно существованию (ω_1,ω_1^*)-щели в $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$. Им же были сформулированы проблемы существования ω_1-пределов и (ω_1,ω^*)-щелей в $\langle\mathscr{P}(\mathbb{N});\subseteq^*\rangle$ (в терминах существования пары отогональных, но неотделимых последовательностей, одна из которых имеет длину ω_1, а другая – длину ω), названные впоследствии его именем (более подробно об этом см. [17]).

Другие результаты, полученные в этой области и связанные, в основном, с порядками $\leqslant^*$ и $\preccurlyeq$ и областями $2^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, а также их приложения в теории множеств и топологии представлены в [8]–[10], [18]. Некоторые метаматематические результаты о независимости приведены ниже в § 6.

Из следующей теоремы (нашего основного результата) вытекает, что для фиксированного кардинала $\kappa\geqslant\omega_1$ вопросы существования κ-лестниц, κ-башен, κ-пределов и (κ,ω^*)-щелей в хаусдорфовых структурах (см. определение 1) сводятся к гораздо более короткому списку проблем, за исключением вопросов существования щелей и пределов в $(\trianglelefteq)$-структурах

$$\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle,\qquad\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle,\tag{1}$$

природа которых остается до конца не выясненной. Для всех же остальных хаусдорфовых структур из определения 1, т. е. для

$$\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle,\quad\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle,\quad\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle,\quad\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle,\quad\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle,\quad\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle,\quad\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle,\tag{2}$$

все эти вопросы в наиболее интересном случае $\kappa=\omega_1$ сводятся к трем действительно различным проблемам (см. ниже замечание 7).

Диаграммы, представленные на рис. 1 и рис. 2, демонстрирует содержание приведенной ниже основной теоремы. На этих диаграммах отношение $X\Rightarrow Y$ (в том числе с вертикальной стрелкой) означает, что из существования (κ,λ^*)-щели (или κ-предела) в структуре X следует существование такой

$$\begin{tikzcd}
\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle \arrow[r, Leftrightarrow] & \langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle \arrow[d, Leftrightarrow] \\
 & \langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle & \langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle \arrow[l, Rightarrow] & \langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle \arrow[l, Rightarrow] & \langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle
\end{tikzcd}$$

Рис. 1. Взаимоотношения ХУС в гипотезе существования (κ,λ^*)-щели

$$\begin{tikzcd}
 & \langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle \arrow[r, Leftrightarrow] & \langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle \\
\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle & \updownarrow\ \ \uparrow \arrow[l, Rightarrow] & \\
 & \boxed{\text{башни}} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, shift right] & \langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle \\
 & \langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle \arrow[u, Rightarrow, shift right] \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle \\
 & \langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle \arrow[r, Leftrightarrow] & \langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle
\end{tikzcd}$$

Рис. 2. Взаимоотношения ХУС в гипотезе существования κ-предела

же щели (предела) в структуре Y, знак $\Leftrightarrow$ понимается аналогично. На рис. 2 отношение $X \to Y$ означает, что из существования κ-предела в X следует существование κ'-предела в Y для какого-то регулярного кардинала $\kappa' \leqslant \kappa$, знак $\Leftarrow\!\updownarrow$ понимается в смысле утверждения 4), (vi) теоремы 5, а блок $\boxed{\text{башни}}$ обозначает утверждение о существовании κ-башен в не диадических структурах из списка (2).

Теорема 5 (основная теорема). *Пусть $\kappa \geqslant \omega_1$ – регулярный кардинал.*

1) *Все* ХУС *из определения* 1, *кроме диадической структуры* $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$, *эквивалентны друг другу по отношению к существованию κ-лестниц*[5].

2) *Выполнены следующие утверждения*:

(i) *все* ХУС *списка* (2), *кроме диадической структуры* $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$, *эквивалентны друг другу по отношению к существованию κ-башен*;

(ii) *существование κ-башен в* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle$ *следует из существования κ-башен в* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$ *и влечет существование κ'-башен в* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$ *для некоторого регулярного несчетного кардинала* $\kappa' \leqslant \kappa$.

3) *Имеют место утверждения*:

(i) *предположим, что $\lambda \geqslant \omega$ – еще один регулярный кардинал*; *на рис.* 1 *представлены взаимоотношения хаусдорфовых структур между собой в гипотезе существования* (κ, λ^*)*-щели*;

(ii) *если $\lambda = \omega$, то все вхождения импликации $\Rightarrow$ на рис.* 1, *кроме, возможно, импликации* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle \Rightarrow \langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle$, *могут быть заменены на* $\Leftrightarrow$, *так что все семь* ХУС *из* (2) *эквивалентны в вопросе существования* (κ, ω^*)*-щели*;

(iii) *существование* (κ, ω^*)*-щели в любой* ХУС *из* (2) *равносильно существованию κ-башни в любой из шести не диадических* ХУС *из* (2).

[5] Вопросы существования лестниц и башен в диадической структуре $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ неинтересны, поскольку в ней нет ни лестниц, ни башен, длина которых – предельный ординал, и $2^{\mathbb{N}}$ имеет $(\leqslant^*)$-наибольшие элементы. Например, ими являются такие $a \in 2^{\mathbb{N}}$, что $a(n) = 1$ для почти всех (кроме конечного числа) n. Назовем любое такое a *почти константой* 1. Даже если удалить из $2^{\mathbb{N}}$ почти константы 1, то никаких лестниц уже вообще не будет, а κ-башни хотя, возможно, и появятся, но будут в сущности идентичны κ-пределам в исходной структуре $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$. Таким образом, безо всякого умаления общности структура $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ может быть удалена из рассмотрения вопросов, относящихся к башням и лестницам.

4) *На рис.* 2 *представлены взаимоотношения хаусдорфовых структур между собой в гипотезе существования κ-предела, более точно, содержание диаграммы на рис.* 2 *сводится к следующему*:

(i) *в структуре* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$ *нет κ-пределов*;

(ii) *структура* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ *имеет κ-пределы, если и только если их имеет структура* $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$;

(iii) *структура* $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$ *имеет κ-пределы, если и только если структура* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$ *имеет κ-башни*;

(iv) *κ-пределы существуют в* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$, *если и только если они существуют в* $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$ *и каждое из этих двух утверждений о существовании влечет существование κ-башен в* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$;

(v) *если структура* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$ *имеет κ-башни, то структура* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$ *имеет κ'-пределы для какого-нибудь кардинала $\kappa'\leqslant\kappa$*;

(vi) *структура* $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ *имеет κ-пределы, если и только если либо структура* $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ *имеет κ-пределы, либо структура* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$ *имеет κ-башни*;

(vii) *κ-пределы существуют в* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle$, *если и только если они существуют в* $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle$ *и каждое из этих двух утверждений о существовании следует из существования κ-пределов в* $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$.

5) *Выполнены следующие утверждения*:

(i) *существование κ-башни в любой не диадической* ХУС *из* (2) *вытекает из существования κ-лестницы, равносильно существованию (κ,ω^*)-щели и влечет существование κ'-предела в* $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ *для некоторого кардинала $\kappa'\leqslant\kappa$*;

(ii) *если κ-башни существуют (в не диадических* ХУС*), но κ-пределов в* $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ *нет, то существуют κ-лестницы.*

Замечание 6. В частном случае $\lambda=\omega$ теорема 5 сводит все проблемы существования κ-лестниц, κ-башен, κ-пределов и (κ,ω^*)-щелей в хаусдорфовых структурах из определения 1 к следующим группам из попарно эквивалентных (внутри каждой группы) проблем.

A. Существование κ-предела в какой-то (или, что равносильно, в любой) из двух структур $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ и $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$.

B. Существование κ-башни в любой не диадической ХУС, существование (κ,ω^*)-щели в любой ХУС из (2), существование κ-предела в $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$.

B$'$. Существование κ-предела в какой-то из структур $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$ и $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$.

C. Существование κ-лестницы в любой не диадической ХУС.

Здесь же можно рассмотреть следующую проблему.

A$'$. Существование κ-предела в $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$, что равносильно $\mathrm{A}\vee\mathrm{B}$.

Исключениями являются следующие проблемы.

A$^{\triangleleft}$. Существование κ-предела в структурах $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle$ и $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle$.

B$^{\triangleleft}$. Существование (κ,ω^*)-щели в структурах $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle$ и $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\trianglelefteq\rangle$ и существование κ-предела в $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$, которое невозможно.

Отметим, что для любой из трех ХУС $\mathbb{N}$-типа из (2) существование (κ,λ^*)-щели влечет существование (λ,κ^*)-щели, поскольку это верно для структуры $\langle 2^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$ благодаря ее очевидной симметрии. (Для ХУС $\mathbb{R}$-типа наличие подходящей симметрии также достаточно очевидно.)

Замечание 7. В наиболее интересном случае $\kappa = \omega_1$ рассмотренные взаимоотношения еще более упрощаются, поскольку тогда с необходимостью выполнено $\kappa' = \kappa$ в утверждении 5), (i) теоремы 5 (в самом деле, ω-пределов нет). Поэтому проблема B′ присоединяется к B, следовательно, B влечет A. Отсюда следует, что проблема A′, т. е. ω_1-пределы в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$, также присоединяется к A. Наконец, C влечет B. Таким образом, мы имеем

$$\begin{array}{ccccc} A^{\lhd} & & B^{\lhd} & & \\ \Uparrow & & \Uparrow & & \\ A & \Leftarrow & B & \Leftarrow & C \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \\ A' & & B' & & \end{array} \quad \text{– случай } \kappa = \omega_1 \text{ и } \lambda = \omega. \tag{3}$$

Отметим, что проблемы из группы (I) принадлежат к типу B.

Если не рассматривать задачи $A^{\lhd}$ и $B^{\lhd}$, то диаграмма на рис. 2 становится полной в том смысле, что ничего больше о взаимной сводимости исследуемых вопросов доказать нельзя (см. § 6).

Природа задач $A^{\lhd}$ и $B^{\lhd}$ (κ-пределы и (κ, ω^*)-щели в $\trianglelefteq$-структурах) остается до конца не исследованной, и это одна из интересных проблем в данной области. Например, хотелось бы доказать эквивалентности

$$A^{\lhd} \Leftrightarrow A, \qquad B^{\lhd} \Leftrightarrow B.$$

Главная трудность заключается в том, что соотношение $x \trianglelefteq y$ (где $x, y \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) по определению совместимо с тем, что на самом деле $x(n) > y(n)$ для подавляющего большинства значений n. Поэтому не видно ни одного разумного способа превращения $(\trianglelefteq)$-щелей и $(\trianglelefteq)$-пределов в подобные структуры для других хаусдорфовых порядков.

Проблема 8. Допускают ли импликации на рис. 1 усиление до эквивалентности в общем случае (т. е. когда не обязательно $\kappa = \omega_1$ и $\lambda = \omega$)? Например, было бы интересно доказать, что существование (κ, λ^*)-щели в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ влечет существование такой же щели в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$. Каковы взаимоотношения между проблемами A′, B′, B в случае $\kappa > \omega_1$?

Доказательство теоремы 5 приводится в § 7.

§ 6. Некоторые метаматематические вопросы

Возвращаясь к диаграмме (3), рассмотрим следующий вопрос: является ли представленная ею классификация проблем существования ω_1-лестниц, ω_1-башен, ω_1-пределов и (ω_1, ω^*)-щелей в хаусдорфовых структурах окончательной, т. е., например, нельзя ли усилить некоторые импликации до эквивалентностей? В отношении импликаций A⇒$A^{\lhd}$ и B⇒$B^{\lhd}$ этот вопрос все еще открыт. Для оставшейся части диаграммы (3) окончательный характер классификации был установлен серией исследований, которые мы здесь вкратце представим для удобства читателей.

Еще Ф. Хаусдорфом [5], [6] было установлено, что канторова континуум-гипотеза **CH**, т. е. $2^{\aleph_0} = \omega_1$, влечет C, а тогда и A, B, для $\kappa = \omega_1$. Однако статус и взаимоотношения этих проблем без предположения **CH** стали окончательно понятны только в 1970–1980 годы, когда при помощи метода вынуждения (форсинга) было установлено, что не имеется никаких иных связей между этими проблемами, которые могли бы быть доказаны в **ZFC**$+\neg$**CH**, кроме двойной импликации C$\Rightarrow$B$\Rightarrow$A и эквивалентностей B$\Leftrightarrow$B$'$ и A$\Leftrightarrow$A$'$, которые отмечены в замечании 7. Эти результаты собраны в следующей теореме.

Теорема 9. *Каждое из следующих предложений совместимо с теорией* **ZFC** $+\neg$**CH**:

(i) *проблемы* C, B, A *истинны для* $\kappa=\omega_1$;

(ii) *проблема* C *ложна, но проблемы* B, A *истинны для* $\kappa=\omega_1$;

(iii) *проблемы* C, B *ложны, но* A *истинно для* $\kappa=\omega_1$;

(iv) *проблемы* C, B, A *ложны для* $\kappa=\omega_1$.

Таким образом, при $\kappa=\omega_1$ проблемы A, B, C *неразрешимы* в теории **ZFC** $+\neg$**CH** и импликации C$\Rightarrow$B$\Rightarrow$A необратимы в этой теории.

Для обсуждения вопросов существования трансфинитных объектов современная теория множеств ассоциирует с каждым интересным типом таких объектов *мощностной инвариант*, т. е. кардинал κ (обычно в интервале $\omega_1\leqslant\kappa\leqslant\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$), равный наименьшей мощности объектов этого типа.

Среди достаточно обширного списка мощностных инвариантов (см. [7]) для нас представляют интерес следующие четыре кардинала:

1) $\mathfrak{t}$ – наименьший кардинал κ, для которого κ-пределы существуют в $2^{\mathbb{N}}$;

2) $\mathfrak{b}$ – наименьшая мощность $(\leqslant^*)$-неограниченного множества в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, или, что то же самое, наименьшая длина $(\leqslant^*)$-башни в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$;

3) $\mathfrak{b}_6$ – наименьший кардинал κ, для которого в $2^{\mathbb{N}}$ существуют (κ,ω^*)-щели;

4) $\mathfrak{d}$ – наименьший кардинал κ, для которого в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ существуют κ-лестницы.

Тогда $\omega_1\leqslant\mathfrak{t}\leqslant\mathfrak{b}=\mathfrak{b}_6\leqslant\mathfrak{d}\leqslant\mathfrak{c}$ согласно замечанию 7 (см. также [7, пп. 3.1, 3.3]). В этих обозначениях гипотезы A, B, C ($\kappa=\omega_1$) приобретают компактные формулировки в виде равенств $\mathfrak{t}=\omega_1$, $\mathfrak{b}=\omega_1$, $\mathfrak{d}=\omega_1$.

Теория мощностных инвариантов имеет один общий метод, позволяющий сделать все эти кардиналы в точности равными континууму $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$, независимо от соотношения последнего с кардиналом ω_1. Это *аксиома Мартина*, или **MA** (см. [9], [19], [20]). Известно, что аксиома **MA** совместна с **ZFC**$+\neg$**CH** (отрицание континуум-гипотезы), поэтому любое следствие **MA** также совместно с $\neg$**CH**. В частности, поскольку аксиома **MA** влечет[6] $\mathfrak{t}=\mathfrak{c}$, следовательно, она влечет несуществование ω_1-пределов, (ω_1,ω^*)-щелей и ω_1-лестниц. Это доказывает утверждение (iv) теоремы 9.

Совместность комбинаций $\omega_1=\mathfrak{t}=\mathfrak{b}<\mathfrak{d}=\mathfrak{c}$ и $\omega_1=\mathfrak{t}=\mathfrak{b}=\mathfrak{d}<\mathfrak{c}$ установлена в [22], [23], и это доказывает утверждения (i) и (ii) теоремы 9 (более современное доказательство см. в [24]).

Результат п. (iii) теоремы 9 был впервые получен в [25] (см. также теорему 5.3 в [7], содержащую совместность даже более сильной комбинации $\omega_1=\mathfrak{t}<\mathfrak{b}=\mathfrak{d}=\mathfrak{c}$).

Мы завершим этот параграф формулировкой одной старой, но до сих пор нерешенной проблемы в этой области, первоначально сформулированной Хаусдорфом [5], а недавно "переоткрытой" Р. Соловеем [26].

[6] См., например, следствие 8 в [20], впервые доказанное, вероятно, еще в [21].

Проблема 10. Существует ли (в данной хаусдорфовой структуре) максимальное линейно упорядоченное подмножество, не имеющее (ω_1, ω_1^*)-щелей? (Ср. с теоремой 3.)

Вряд ли можно сомневаться в том, что эта проблема имеет одно и то же решение для всех хаусдорфовых структур.

§ 7. Доказательство основной теоремы 5

В ходе доказательства основной теоремы κ является регулярным кардиналом, причем $\kappa \geqslant \omega_1$.

7.1. Башни и лестницы. Здесь доказываются утверждения 1) и 2) теоремы 5.

Для начала исключим $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-структуры.

Лемма 11. *Если $\leqslant$ – один из хаусдорфовых порядков $\preccurlyeq$, $\trianglelefteq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$, $\leqslant^*$, то структуры $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$ и $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$ эквивалентны относительно существования κ-лестниц. То же верно и для κ-башен.*

Доказательство. Прежде всего, любая лестница $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$ в структуре $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$ остается лестницей в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$. Например, для порядка $\leqslant^*$ предположим противное, т. е. $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не удовлетворяет $x \leqslant^* a_\xi$ ни при каком ξ. Определим $x' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ так, что $x'(n)$ – наименьшее натуральное число, превосходящее $x(n)$ для каждого n. Понятно, что $x \leqslant^* a$, а потому $a \leqslant^* a_\xi$ не имеет места ни при каком ξ. Противоречие.

Обратно, предположим, что $\{x_\xi\}_{\xi<\kappa}$ является лестницей в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$. Для каждого ξ, заменив отрицательные значения $x_\xi(n)$ нулями, а положительные значения – ближайшими сверху натуральными числами, получим $x'_\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Далее, по построению выполнено $x_\xi \leqslant x'_\xi$, а потому новая последовательность остается $(\leqslant)$-доминирующей. Наконец, последовательность $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$ остается $(\leqslant)$-возрастающей, возможно, нестрого, а потому в силу регулярности κ из нее выделяется строго возрастающая подпоследовательность.

С достаточно очевидными изменениями обе части этого рассуждения сохраняют силу и для башен.

Итак, остается рассмотреть башни и лестницы в $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})$-структурах

$$\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq\rangle, \quad \langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \trianglelefteq\rangle, \quad \langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle, \quad \langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant^*\rangle.$$

Заметим, что любая $(\preccurlyeq)$-башня $\{x_\xi\}_{\xi<\kappa}$ в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (любой длины) является и $(\leqslant_{\mathrm{fro}})$-башней. В самом деле, допустим, что $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $x_\xi \leqslant_{\mathrm{fro}} x$ для всех ξ. Тогда и $x_\xi \preccurlyeq x$ для всех ξ, поскольку из $x_\xi \leqslant_{\mathrm{fro}} x_{\xi+1} \preccurlyeq x$ следует $x_\xi \preccurlyeq x$. Противоречие. То же рассуждение показывает, что любая $(\leqslant_{\mathrm{fro}})$-башня является $(\leqslant^*)$-башней, а любая $(\preccurlyeq)$-башня является $(\trianglelefteq)$-башней. Утверждение для лестниц доказывается аналогично.

Обратно, легко видеть, что отображение, которое преобразует каждое $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $x'(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i)$, переводит любую $(\leqslant^*)$-башню (или лестницу) $\{x_\xi\}_{\xi<\kappa}$ из элементов множества $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ в $(\preccurlyeq)$-башню (соответственно, лестницу) $\{x'_\xi\}_{\xi<\kappa}$. В самом деле, для случая башен пусть, напротив, $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $x'_\xi \preccurlyeq x$ для всех ξ.

Однако по построению $x_\xi \preccurlyeq x'_\xi$ для всех ξ, откуда имеем $x_\xi \preccurlyeq x$, а потому и $x_\xi \leqslant^* x$ для любого ξ. Противоречие.

Осталось получить обратный результат для порядка $\trianglelefteq$. Предположим, что $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ является κ-лестницей в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \trianglelefteq\rangle$. Мы утверждаем, что тогда существует и κ-лестница в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \preccurlyeq\rangle$. В самом деле, по определению для каждого множества $X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ мощности $\operatorname{card} X < \kappa$ существует функция $y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, удовлетворяющая $x \preccurlyeq y$ для всех $x \in X$. (Поскольку $\{x_\alpha\}$ – лестница, имеется индекс $\alpha < \kappa$ такой, что $x \trianglelefteq x_\alpha$ для всех $x \in X$. Положим $y = x_\alpha$.) Это позволяет нам определить $(\prec)$-возрастающую κ-последовательность $\{y_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ функций $y_\alpha \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ так, чтобы $x_\alpha \preccurlyeq y_\alpha$ для каждого α. Теперь ясно, что $\{y_\alpha\}$ есть κ-лестница в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \preccurlyeq\rangle$.

Для башен обратное утверждение выполняется в ослабленной форме, как в 2), (ii): если κ-башня $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ существует в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \trianglelefteq\rangle$, то структура $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \preccurlyeq\rangle$ имеет κ'-башню для какого-то $\kappa' \leqslant \kappa$. В самом деле, $\{x_\alpha\}$ остается неограниченным семейством в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \preccurlyeq\rangle$, но не обязательно $(\prec)$-возрастающим. Возьмем произвольную максимальную $(\prec)$-возрастающую последовательность $\{y_\alpha\}_{\alpha<\kappa'}$ такую, что $x_\alpha \preccurlyeq y_\alpha$ для всех $\alpha < \kappa'$. Понятно, что $\kappa' \leqslant \kappa$ (иначе последовательность $\{x_\alpha\}$ не была бы башней), а максимальность означает, что последовательность $\{y_\alpha\}$ неограничена, т. е. является башней в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \preccurlyeq\rangle$.

7.2. Щели. Здесь доказывается утверждение 3), (i) теоремы 5. Доказательство включает несколько лемм разного уровня сложности. В них $\kappa \geqslant \omega_1$ – произвольный регулярный кардинал, как и в этой теореме. Для второго параметра λ в нескольких леммах, помимо любых значений $\lambda \geqslant \omega$, как в теореме 5, допускается значение $\lambda = 1$, чтобы включить в утверждение и случай пределов – это оговорено в преамбулах к леммам 12–16. Следующий результат получен Ф. Ротбергером [11], [12].

Лемма 12 ($\lambda \geqslant \omega$ или $\lambda = 1$). *Структуры $\langle 2^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$ и $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$ эквивалентны в вопросе существования (κ, λ^*)-щелей.*

Доказательство. С одной стороны, любая щель в $\langle 2^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$ остается щелью в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$. В самом деле, если допустить, что $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ заполняет данную щель в $\langle 2^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$, то, заменив каждое значение $x(n) \neq 0$ значением 1, мы получим элемент $x \in 2^\mathbb{N}$, заполняющий ту же щель. Противоречие.

Обратно, всякая щель в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$ преобразуется в щель в структуре $\langle 2^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$ с теми же длинами обеих последовательностей. Действительно, заменим любой элемент $a \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$, встречающийся в данной щели, сначала множеством $X_a = \{\langle i, n\rangle \colon i < a(n)\} \subseteq \mathbb{N}^2$, затем образом $Y_a = \{f(i,n) \colon \langle i, n\rangle \in X_a\}$ этого множества при любой фиксированной биекции $f \colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$ и, наконец, характеристической функцией этого Y_a. Используя это построение, получим искомую щель в структуре $\langle 2^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$.

Лемма 13 ($\lambda \geqslant \omega$ или $\lambda = 1$). *Если $\leqslant$ – любое из отношений $\leqslant^*$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$, $\preccurlyeq$, $\trianglelefteq$, то каждая (κ, λ^*)-щель в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant\rangle$ остается щелью в $\langle \mathbb{R}^\mathbb{N}; \leqslant\rangle$.*

Доказательство. В самом деле, рассмотрим, например, κ-предел, т. е. $(\kappa, 1^*)$-щель $\langle \{a_\xi\}_{\xi<\kappa}, a\rangle$, в структуре $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant^*\rangle$. Пусть, напротив, некоторый элемент $x \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ заполняет эту щель, т. е. удовлетворяет строгим неравенствам

$a_\xi <^* x <^* a$ для всех ξ. Не ограничивая общности, можно предполагать, что $0 \leqslant x(n) < a(n)$ для любого n. Для каждого n через $x'(n)$ обозначим наибольшее целое число, удовлетворяющее $x'(n) \leqslant x(n)$. Тогда $x' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $x' <^* a$ (так как $x'(n) \leqslant x(n)$ для любого n) и, очевидно, $a_\xi <^* x'$ для каждого ξ, поскольку все члены a_ξ принадлежат $\mathbb{N}$.

Для двух порядков имеет место следующий факт.

Лемма 14 ($\lambda \geqslant \omega$ или $\lambda = 1$). *Если $\leqslant$ – любое из отношений $\preccurlyeq$, $\trianglelefteq$, то структуры $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$ и $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant\rangle$ эквивалентны в вопросе существования (κ, λ^*)-щелей.*

Доказательство. Для перехода от $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq\rangle$ к $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq\rangle$ округляем члены имеющейся щели в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ до ближайших сверху натуральных чисел. Порядки $\preccurlyeq$ и $\trianglelefteq$, очевидно, сохраняются при таком изменении. (Для порядков $\leqslant^*$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$ это рассуждение перестает быть верным.)

Следующая лемма выводит более "слабые" щели из более "сильных".

Лемма 15 ($\lambda \geqslant \omega$). *Если D – одно из множеств $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то*:

(i) *любая (κ, λ^*)-щель в структуре $\langle D; \preccurlyeq\rangle$ остается щелью в $\langle D; \trianglelefteq\rangle$*;

(ii) *любая (κ, λ^*)-щель в $\langle D; \leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$ остается щелью в $\langle D; \leqslant^*\rangle$*;

(iii) *любая (κ, λ^*)-щель в структуре $\langle D; \preccurlyeq\rangle$ остается щелью в $\langle D; \leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$*.

Доказательство. (i) Пусть, напротив, пара $\langle \{a_\xi\}_{\xi<\kappa}, \{b_\eta\}_{\eta<\lambda}\rangle$ является $(\preccurlyeq)$-щелью в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, но $x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет $a_\xi \lhd x \lhd b_\eta$ для всех $\xi < \kappa$ и $\eta < \lambda$. Поскольку κ и λ – предельные ординаты, мы также имеем $a_{\xi+1} \lhd x \lhd b_{\eta+1}$. Однако $f \lhd g \prec h$ влечет $f \prec h$, откуда мы имеем $a_\xi \lhd x \lhd b_\eta$. Противоречие[7].

Утверждения (ii) и (iii) доказываются аналогично.

Следующее утверждение замыкает цикл структур $\mathbb{N}$-типа с порядками $\preccurlyeq$, $\leqslant_{\mathrm{fro}}$, $\leqslant^*$ по отношению к вопросам существования щелей (кроме пределов и башен).

Лемма 16 ($\lambda \geqslant \omega$). *Если структура $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^*\rangle$ имеет (κ, λ^*)-щель, то такая щель существует и в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq\rangle$.*

Доказательство. Рассмотрим щель $\langle \{a_\xi\}_{\xi<\kappa}, \{b_\eta\}_{\eta<\lambda}\rangle$ в структуре $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^*\rangle$. Для каждого $a \in 2^{\mathbb{N}}$ определим $\widetilde{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ через $\widetilde{a}(n) = \sum_{i=0}^{n} 2^i a(i)$. Тогда последовательность $\{\widetilde{a}_\xi\}_{\xi<\kappa}$ $(\prec)$-возрастает, а последовательность $\{\widetilde{b}_\eta\}_{\eta<\lambda}$, соответственно, $(\prec)$-убывает и $\widetilde{a}_\xi \prec \widetilde{b}_\eta$ для всех ξ, η. Чтобы доказать, что они образуют $(\preccurlyeq)$-щель, предположим противное: $\widetilde{c} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и $\widetilde{a}_\xi \preccurlyeq \widetilde{c} \preccurlyeq \widetilde{b}_\eta$ для всех ξ, η. Определим $c \in 2^{\mathbb{N}}$ так, чтобы $c(n) = 1$, если и только если $\widetilde{c}(n) \geqslant 2^n$. Нетрудно проверить, что тогда $a_\xi \leqslant^* c \leqslant^* b_\eta$ для всех ξ, η. Противоречие.

---

[7] Доказать (i) нельзя в случае пределов. Действительно, если пара $\langle \{a_\xi\}_{\xi<\kappa}, b\rangle$ образует предел в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq\rangle$ и (в предположении противного) $a_\xi \lhd x \lhd b$, то мы все еще имеем $a_\xi \prec x$ для любого ξ, но вывод утверждения $x \prec b$ не удается получить.

7.3. Щели и башни. Здесь мы доказываем утверждения 3), (ii) (случай $\lambda = \omega$) и 3), (iii) теоремы 5. Согласно уже доказанному утверждению 3), (i) для вывода 3), (ii) достаточно проверить, что структуры $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ и $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ эквивалентны по отношению к вопросу существования (κ, ω^*)-щели. Мы доказываем это таким образом, что одновременно получается и утверждение 3), (iii). Именно, план состоит в получении κ-башни в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ из наиболее "слабой" щели, а затем получить наиболее "сильную" щель из упомянутой башни. Этот план реализуется в следующих двух леммах, первоначально доказанных Хаусдорфом в [6] для щелей и башен структуры $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$ (см. результаты (I) в § 5), а затем Ротбергером [12] для щелей и башен структуры $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$. Здесь этот вопрос рассматривается в более общем контексте.

Лемма 17. *Если структура* $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ *имеет* (κ, ω^*)*-щель, то* κ*-башни существуют в структуре* $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$*, а тогда* (*см. п.* 7.1) *и в любой другой не диадидеской* ХУС *из* (2)*, в частности в* $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$.

Доказательство. Пусть $\langle \{a_\xi\}_{\xi<\kappa}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ является (κ, ω^*)-щелью в структуре $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$. Можно предполагать, что $b_{n+1}(k) \leqslant b_n(k)$ для всех n, k. Если $a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет $a \leqslant^* b_n$ для любого n, то для каждого n через $\widetilde{a}(n)$ обозначим наименьшее натуральное число такое, что $a(k) \leqslant b_n(k)$ для всех $k \geqslant \widetilde{a}(n)$. Понятно, что последовательность $\{\widetilde{a}_\xi\}_{\xi<\kappa}$ является $(\leqslant^*)$-возрастающей. Поэтому достаточно проверить, что она неограничена в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$. (После чего остается взять любую строго $(<^*)$-возрастающую конфинальную подпоследовательность.) Пусть, напротив, $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет $\widetilde{a}_\xi \leqslant^* c$ для каждого $\xi < \kappa$.

Определим $k_{-1} = 0$, а затем, по индукции, $k_n = \max\{c(n)+1, k_{n-1}\}$. Положим $a(k) = b_n(k)$ для всех k, удовлетворяющих $k_n \leqslant k < k_{n+1}$. (Отдельно полагаем $a(k) = b_0(k)$ для $k < k_0$.) В наших предположениях неравенство $a(k) \leqslant b_n(k)$ выполнено для всех $k \geqslant k_n$, а потому $a \leqslant^* b_n$ для любого n. Теперь остается доказать, что $a_\xi \leqslant^* a$ для всех ξ: в самом деле, в этом случае a заполняет исходную щель. Противоречие.

Напомним, что $\widetilde{a}_\xi \leqslant^* c$. Поэтому существует индекс N такой, что $\widetilde{a}_\xi(n) \leqslant c(n) \leqslant k_n$ для всех $n \geqslant N$. Рассмотрим любой полуинтервал вида $I_n = (k_n, k_{n+1}]$, $n \geqslant N$. Тогда $a_\xi(k) \leqslant b_n(k) = a(k)$ для каждого $k \in I_n$, поскольку $\widetilde{a}_\xi(n) \leqslant k_n$. Таким образом, имеем $a_\xi(k) \leqslant a(k)$ для всех $k > k_N$. Следовательно, $a_\xi \leqslant^* a$, что и требовалось доказать.

Лемма 18. *Если* κ*-башня имеется в структуре* $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$*, то* (κ, ω^*)*-щель существует в* $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$.

Доказательство. Пусть $\{c_\xi\}_{\xi<\kappa}$ является $(\leqslant_{\mathrm{fro}})$-башней в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Можно предполагать, что каждое c_ξ как элемент $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ есть строго возрастающая последовательность. (Иначе полагаем $c'_\xi(n) = n + \sum_{k\leqslant n} c_\xi(k)$.) Так что $c_\xi(n) \geqslant n$. Определим $a_\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для каждого ξ следующим образом: $a_\xi(k) = n$ всякий раз, когда $c_\xi(n) \leqslant k < c_\xi(n+1)$. Тем самым, a_ξ как отображение $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ является в каком-то смысле обратным к c_ξ. Ясно, что $a_\eta \leqslant^* a_\xi$ для всех $\xi < \eta < \kappa$. Мы утверждаем, что сверх того $a_\eta <^* a_\xi$ строго для всех $\xi < \eta < \kappa$. В самом деле, если $c_\xi(n) < c_\eta(n)$ (а это выполнено для бесконечно многих n, так как $c_\xi \leqslant^* c_\eta$), то по определению $n - 1 = a_\eta(c_\eta(n) - 1) < a_\xi(c_\eta(n) - 1) = n$.

Итак, $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$ – строго $(<^*)$-убывающая последовательность в $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Заметим также, что каждое a_ξ является возрастающей функцией (как отображение $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$), возможно, нестрого возрастающей, а также неограниченной, т. е. $\mathbf{0} \prec a_\xi$, где $\mathbf{0} \in 2^{\mathbb{N}}$ обозначает константу 0, но $a_\xi(k) \leqslant k$ для всех k. Мы утверждаем, что

$(*)$ нет элементов $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ таких, что $\mathbf{0} \prec a$ и $a \leqslant^* a_\xi$ для всех ξ.

В самом деле, предположим противное, т. е. пусть $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ является контрпримером. Можно, не ограничивая общности, предполагать, что a – возрастающая функция (нестрого) и $a(n+1) \leqslant a(n)+1$ для любого n. Тогда существует единственная строго возрастающая функция $c \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такая, что $a(k) = n$ для всех k, удовлетворяющих $c(n) \leqslant k < c(n+1)$. Но тогда $a \leqslant^* a_\xi$ влечет $c_\xi \leqslant^* c$ для каждого ξ. Получили противоречие с выбором башни.

Отсюда следует, что при $b_n = \omega\times\{n\}$ (где n – константа) пара последовательностей $\langle\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{a_\xi\}_{\xi<\kappa}\rangle$ становится (ω,ω_1^*)-щелью в $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant^*\rangle$. Чтобы теперь получить (ω_1,ω^*)-щель, положим $a'_\xi(k) = k - a_\xi(n)$ (напомним, что $a_\xi(k) \leqslant k$) и $b'_n(k) = \max\{0, k-n\}$ для всех ξ, k, n.

Этим завершается доказательство утверждения 3) теоремы 5.

7.4. Пределы. Начинаем доказательство утверждения 4) теоремы 5. Чтобы вывести 4), (i), т. е. отсутствие κ-пределов в структуре $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$, заметим, что для любого $a \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ имеется точный $(\leqslant_{\mathrm{fro}})$-предшественник $a_- \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, заданный условием $a_-(n) = \max\{a(n)-1, 0\}$ для любого n.

Далее, утверждение 4), (ii) вытекает из леммы 12.

Оставшиеся части утверждения 4) требуют некоторых усилий.

4), (iii). Допустим, что $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$ является башней в $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$. Мы получаем предел $\langle 0,0,0,\dots\rangle = \lim_{\xi\to\kappa} c_\xi$ в $\langle\mathbb{R}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$, где $c_\xi(n) = \frac{1}{a_\xi(n)}$. (По этой формуле для каждого ξ может случиться конечное число делений на 0, результат которых можно положить равным, к примеру, 1.) Обращение доказывается аналогично.

4), (iv). Эквивалентность вытекает из леммы 14. Построение башни аналогично построению в заключительной части доказательства леммы 18. Рассмотрим κ-предел $a = \lim_{\xi\to\kappa} a_\xi$ в структуре $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$, где $a_\xi \prec a_\eta$ для всех $\xi < \eta < \kappa$. Положим $b_n(k) = \max\{0, a(k)-n\}$; тогда $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ является $(\leqslant_{\mathrm{fro}})$-убывающей последовательностью и пара $\langle\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}, \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\rangle$ образует (κ,ω^*)-щель в $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$. Чтобы получить κ-башню в $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\leqslant_{\mathrm{fro}}\rangle$, используем лемму 17.

4), (v). Назовем башню $\{c_\xi\}_{\xi<\kappa}$ (в любой из хаусдорфовых структур) *регулярной*, если она удовлетворяет следующему условию:

$(**)$ для каждого $\xi < \kappa$ найдутся ординал η, $\xi < \eta < \kappa$, и число n_0 такие, что $c_\eta(n) \geqslant c_\xi(n+1)$ для всех $n \geqslant n_0$, другими словами, требуется, чтобы для любого ξ существовал ординал $\eta > \xi$ такой, что $c_\xi^+ \leqslant^* c_\eta$, где $c_\xi^+(n) = c_\xi(n+1)$ для любого n.

Регулярность в этом смысле вряд ли следует из определения башни. Соответственно, нам представляется, что в доказательстве [10, теорема 14, 2 $\Rightarrow$ 3] существования κ-пределов в $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}};\preccurlyeq\rangle$ из существования κ-башен для того же самого κ имеется пробел в ключевом утверждении 5 [10, с. 454]. С другой стороны, мы не имеем примера нерегулярной башни. Заметим также, что регулярность выполняется в случае, когда $\{c_\xi\}$ является лестницей, так что κ-лестницы действительно порождают κ-пределы в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$.

Лемма 19. *Если структура $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$ имеет κ-башни, то найдется регулярный кардинал $\kappa' < \kappa$ такой, что структура $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$ имеет κ'-пределы.*

Доказательство. Согласно утверждению 2), (i) теоремы 5 найдется и κ-башня $\{c_\xi\}_{\xi<\kappa}$ в структуре $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$. Тогда существует регулярная башня $\{c'_\xi\}_{\xi<\kappa'}$ в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$ длины $\kappa' \leqslant \kappa$, удовлетворяющая неравенству $c_\xi \preccurlyeq c'_\xi$ для всех $\xi < \kappa'$. (И даже более сильному условию $c'_{\xi+1}(n) \geqslant c'_\xi(n+1)$ для всех ξ и n. Определяем $c'_\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ индукцией по ξ так, чтобы при переходе $\xi \mapsto \xi+1$ было $c_{\xi+1} \preccurlyeq c'_{\xi+1}$ и $c'_{\xi+1}(n) \geqslant c'_\xi(n+1)$ для всех n, а на предельных шагах $\lambda < \kappa$, если $\{c'_\xi\}_{\xi<\lambda}$ все еще не является башней в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$, берем произвольный элемент $c'_\lambda \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ такой, что $c_\lambda \preccurlyeq c'_\lambda$ и $c'_\xi \preccurlyeq c'_\lambda$ для каждого $\xi < \lambda$.)

Следуя доказательству леммы 18, определим $a_\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ для $\xi < \kappa'$ исходя из построенной нами регулярной башни $\{c'_\xi\}_{\xi<\kappa'}$ в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$. Тогда если $\xi < \eta < \kappa'$ и неравенство $c'_\eta(n) \geqslant c'_\xi(n+1)$ выполнено для всех $n \geqslant n_0$, то получаем $a_\eta <_{\mathrm{fro}} a_\xi$ в лемме 18, а не только $a_\eta <^* a_\xi$, так что $\{a_\xi\}$ имеет конфинальную строго ($<_{\mathrm{fro}}$)-убывающую подпоследовательность. Более того, предельные члены такой подпоследовательности образуют конфинальную и теперь уже ($\prec$)-убывающую последовательность. Следовательно, согласно ($*$) мы имеем κ'-предел в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$.

4), (vi). Любой κ-предел в $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ остается таковым в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ по лемме 13, а любая κ-башня в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$ может быть превращена в κ-предел в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ следующим образом. Во-первых, преобразуем данную башню в κ-башню $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$ в $\langle \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; \preccurlyeq \rangle$, состоящую только из возрастающих последовательностей $a_\xi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Потом, следуя доказательству утверждения 4), (iv), полагаем $c_\xi(n) = \frac{1}{a_\xi(n)}$. Мы утверждаем, что $\{c_\xi\}_{\xi<\kappa}$ является κ-пределом в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$ (а не только в $\langle \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \leqslant_{\mathrm{fro}} \rangle$, как в 4), (iv)) с предельным значением $\lim_{\xi\to\kappa} c_\xi = \mathbf{0}$. Для доказательства предположим противное, т. е. $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет $\mathbf{0} <^* x \leqslant^* c_\xi$ для всех ξ. Множество $D = \{k \colon x(k) \neq 0\}$ бесконечно, так как $\mathbf{0} <^* x$ строго; пусть $D = j_0 < j_1 < j_2 < \cdots$. Положим $a(k) = \frac{1}{x(k)}$ для $k \in D$. Понятно, что $x \restriction D \leqslant^* c_\xi \restriction D$, и поэтому $a_\xi \restriction D \leqslant^* a$ для каждого ξ. Теперь берем любую строго возрастающую последовательность $b \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющую $b(k) \geqslant a(j_{n+1})$ всякий раз, когда $j_n \leqslant k < j_{n+1}$. Имеем $a_\xi \leqslant^* b$, поскольку a_ξ также возрастает. Поэтому трансфинитная последовательность $\{a_\xi\}_{\xi<\kappa}$ ограничена. Получили противоречие с тем, что она является башней.

Теперь докажем обратное. Рассмотрим произвольный ($\leqslant^*$)-предел $\{c_\xi\}_{\xi<\kappa}$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Для простоты будем предполагать, что последовательность $\{c_\xi\}_{\xi<\kappa}$ является ($\leqslant^*$)-убывающей, ее предельное значение $\lim_{\xi\to\kappa} c_\xi$ есть $\mathbf{0}$ (константа 0), а все члены $c_\xi(n)$ неотрицательны. Положим $D_\xi = \{n \colon c_\xi(n) = 0\}$, и пусть h_ξ – характеристическая функция множества D_ξ. Последовательность функций h_ξ ($\leqslant^*$)-возрастает, поэтому если мы выведем, что $\lim_{\xi\to\omega_1} h_\xi = \mathbf{1}$ (константа 1) в $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^* \rangle$, то этим доказательство будет завершено.

Допустим, что это не так, т. е. найдется $h \in 2^{\mathbb{N}}$ такое, что $h_\xi \leqslant^* h <^* \mathbf{1}$ для всех ξ. Тогда множество $D = \{n \colon h(n) = 1\}$ кобесконечно в $\mathbb{N}$ и $D_\xi \subseteq^* D$ при любом ξ, поскольку $h_\xi \leqslant^* h$. Отсюда следует, что бесконечное множество

$Z = \mathbb{N} \setminus D$ имеет конечное пересечение с каждым из множеств D_ξ. Это дает нам возможность определить $a_\xi(k) = \frac{1}{c_\xi(a)}$ для всех $k \in Z$ и ξ. (Для каждого ξ конечное число делений на 0 здесь можно обойти, как и выше.) Эта последовательность функций $a_\xi \colon Z \to \mathbb{N}$ является $(\leqslant^*)$-возрастающей (по крайней мере, нестрого), поскольку последовательность $\{c_\xi\}$ $(\leqslant^*)$-убывает. Сверх того, последовательность $\{a_\xi\}$ $(\leqslant^*)$-неограничена в семействе $\mathbb{N}^Z$ всех функций $a \colon Z \to \mathbb{N}$, поскольку исходная последовательность $\{c_\xi\}$ является пределом (и остается таковым даже после ограничения всех членов на Z). Поэтому $\{a_\xi\}$ имеет строго $(<^*)$-возрастающую подпоследовательность. Итак, мы получили башню в $\langle Z; \leqslant^* \rangle$. Чтобы получить из нее башню в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, используем любую биекцию множества D на $\mathbb{N}$.

Отметим, что согласно 4), (vi) $(\leqslant^*)$-пределы в $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ состоят по меньшей мере из двух разных типов: те, которые гомологичны башням в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, и те, которые гомологичны $(\leqslant^*)$-пределам в $2^\mathbb{N}$ (или в $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, что эквивалентно).

4), (vii). Равносильность структур $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \trianglelefteq \rangle$ и $\langle \mathbb{R}^\mathbb{N}; \trianglelefteq \rangle$ в вопросе существования κ-пределов дается леммой 14. Далее, любой κ-предел в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \preccurlyeq \rangle$ без труда преобразуется к убывающему пределу $\{x_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ с предельным значением $\mathbf{0}$ (константа 0). Таким образом, $\mathbf{0} \prec x_\eta \prec x_\xi$ при $\xi < \eta < \kappa$, и не существует ни одного $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ такого, что $\mathbf{0} \prec x \prec x_\xi$ для всех ξ. Можно считать, что каждое x_ξ возрастает, т. е. $x_\xi(n) < x_\xi(n+1)$ для любого n, поскольку иначе мы могли бы заменить каждое x_ξ на x'_ξ, где $x'_\xi(n) = n + \sum_{k \leqslant n} x_\xi(k)$ для всех n. Мы утверждаем, что в этом случае последовательность $\{x_\xi\}_{\xi<\omega_1}$ является пределом и в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \trianglelefteq \rangle$.

Предположим противное: $x \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ и $\mathbf{0} \lhd x \lhd x_\xi$ для всех $\xi < \kappa$. Тогда $x \prec x_\xi$ для всех ξ (см. доказательство леммы 15). Положим $y(n) = \max\{x(k) \colon k \leqslant n\}$, так что $y \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ – возрастающая (возможно, нестрого) функция, а потому выполнено не только $\mathbf{0} \lhd y$, но и $\mathbf{0} \prec y$. Остается проверить, что все еще $y \prec x_\xi$ для всех ξ: это дает искомое противоречие. В сущности вполне достаточно проверить, что $y \leqslant^* x_\xi$ для всех ξ.

Докажем, что $y \leqslant^* x_\xi$. Поскольку $x \prec x_\xi$, найдется n_0 такое, что $x(n) < x_\xi(n)$ для всех $n \geqslant n_0$. Далее, так как x_ξ – возрастающая функция, найдется $n_1 \geqslant n_0$ такое, что $\max_{k<n_0} x(k) < x_\xi(n)$ для всех $n \geqslant n_1$. Таким образом, $x(k) < x_\xi(n)$ всякий раз, когда $n \geqslant n_1$ и $k \leqslant n$. Отсюда по построению следует, что $y(n) < x_\xi(n)$ для каждого $n \geqslant n_1$, что и требовалось доказать.

7.5. Щели и пределы. Доказательство последней части теоремы 5 основывается на следующей лемме (см. [12] для случая $\kappa = \omega_1$).

Лемма 20. *Если структура $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant^* \rangle$ имеет κ-башню, то $\langle 2^\mathbb{N}; \leqslant^* \rangle$ имеет κ'-предел для некоторого несчетного кардинала $\kappa' \leqslant \kappa$. В частности, поскольку ω-пределов не существует, из существования ω_1-башни в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant^* \rangle$ следует существование ω_1-предела в $\langle 2^\mathbb{N}; \leqslant^* \rangle$. Дополнительно, если κ-пределов нет в $\langle 2^\mathbb{N}; \leqslant^* \rangle$, то каждая κ-башня в структуре $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant^* \rangle$ является κ-лестницей.*

Доказательство. Для каждого бесконечного $x \subseteq \mathbb{N}$ через φ_x обозначим (единственную) возрастающую биекцию $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} x$. Пусть $\{f_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ является κ-башней в $\langle \mathbb{N}^\mathbb{N}; \leqslant^* \rangle$. Можно предполагать, что все f_α являются строго возрастающими функциями. (Если это не так, то заменим f_α на $g_\alpha(k) =$

$k + \sum_{n=0}^{k} f_\alpha(n)$.) Мы собираемся построить $(\subset^*)$-убывающую последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa'}$ бесконечных множеств $x_\alpha \subseteq \mathbb{N}$ такую, что $f_\alpha \leqslant^* \varphi_{x_\alpha}$ для всех $\alpha < \kappa'$; ординал $\kappa' \leqslant \kappa$ будет определен в ходе конструкции.

Допустим, что $\lambda \leqslant \kappa$ и все множества x_α, $\alpha < \lambda$, уже определены.

Случай 1. Существует бесконечное множество $x \subseteq \mathbb{N}$ такое, что $x \subseteq^* x_\alpha$ для всех $\alpha < \lambda$. В этом случае $f_\alpha \leqslant^* \varphi_{x_\alpha} \leqslant^* \varphi_x$ для каждого α, поэтому $\lambda < \kappa$. Ясно, что существует бесконечное множество $y \subset^* x$, удовлетворяющее $f_\alpha \leqslant^* \varphi_y$. Положим $x_\lambda = y$.

Случай 2. Такое множество x не существует. Тогда последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ легко может быть преобразована в λ-предел в структуре $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^*\rangle$, так что можно взять $\kappa' = \lambda$.

Докажем теперь дополнительное утверждение леммы. Рассмотрим произвольную функцию $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ и предположим противное, т. е. что $f \not\leqslant^* f_\alpha$ для некоторого $\alpha < \kappa$. Можно предполагать, что f строго возрастает вместе со всеми f_n. Тогда каждое множество $x_\alpha = \{n\colon f_\alpha(n) < f(n)\}$ бесконечно и мы имеем $x_\beta \subseteq^* x_\alpha$ всякий раз, когда $\alpha < \beta < \kappa$, поскольку $f_\alpha \leqslant^* f_\beta$. Мы утверждаем, что найдется бесконечное множество $x \subseteq \mathbb{N}$, удовлетворяющее $x \subseteq^* x_\alpha$ для всех α. В самом деле, если последовательность $\{x_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ содержит конфинальную строго убывающую подпоследовательность, то такое множество x существует, поскольку в противном случае подпоследовательность дала бы κ-предел в $\langle 2^{\mathbb{N}}; \leqslant^*\rangle$. Если же нет конфинальных строго убывающих подпоследовательностей, то для некоторого $\gamma < \kappa$ мы имеем $\forall\,\xi > \gamma(x_\xi \equiv^* x_\gamma)$, и тогда $x = x_\gamma$ – искомое множество.

Итак, пусть x – такое множество. Тогда $f_\alpha \restriction x \leqslant^* f \restriction x$ (в том смысле, что множество $\{n \in x\colon f(n) < f_\alpha(n)\}$ конечно) для каждого α. Предполагая, что

$$x = \{0 = i_0 < i_1 < \dots < i_n < \cdots\},$$

определим $g(k) = f(i_{n+1})$ всякий раз, когда $i_n \leqslant k < i_{n+1}$. Тогда, поскольку f и все f_α возрастающие, мы имеем $f_\alpha \leqslant^* g$ для каждого α. Получили противоречие с предположением, что последовательность всех f_α – башня.

Теорема 5 полностью доказана.

Список литературы

1. P. du Bois-Reymond, “Sur la grandeur relative des infinis des fonctions”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (2), **4**:1 (1870), 338–353.
2. J. Hadamard, “Sur les caractères de convergence des séries a termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes”, *Acta Math.*, **18**:1 (1894), 319–336.
3. É. Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.
4. G. H. Hardy, “A theorem concerning the infinite cardinal numbers”, *Q. J. Pure Appl. Math.*, **35** (1903), 87–94.
5. F. Hausdorff, “Untersuchungen über Ordnungstypen”, *Leipz. Ber.*, **59** (1907), 84–159.
6. F. Hausdorff, “Die Graduierung nach dem Endverlauf”, *Leipzig Abh.*, **31** (1909), 297–334.
7. E. K. van Douwen, “The integers and topology”, *Handbook of set-theoretic topology*, North-Holland, Amsterdam, 1984, 111–167.

8. R. Frankiewicz, P. Zbierski, *Hausdorff gaps and limits*, Stud. Logic Found. Math., **132**, North-Holland, Amsterdam, 1994.
9. В. И. Малыхин, "Топология и форсинг", *УМН*, **38**:1 (1983), 69–118; англ. пер.: V. I. Malykhin, "Topology and forcing", *Russian Math. Surveys*, **38**:1 (1983), 77–136.
10. M. Scheepers, "Gaps in ω^ω", *Set theory of the reals* (Bar-Ilan Univ., Ramat-Gan, Israel, 1991), Israel Math. Conf. Proc., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, 439–561.
11. F. Rothberger, "Sur les familles indénombrables de suites de nombres naturels et les problèmes concernant la propriété C", *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **37** (1941), 109–126.
12. F. Rothberger, "On some problems of Hausdorff and of Sierpiński", *Fund. Math.*, **35** (1948), 29–46.
13. M. Scheepers, "Cardinals of countable cofinality and eventual domination", *Order*, **11**:3 (1994), 221–235.
14. F. Hausdorff, "Summen von $\aleph_1$ Mengen", *Fund. Math.*, **26** (1936), 241–255.
15. N. Lusin, "Sur les parties de la suite naturelle des nombres entiers", *Докл. АН СССР*, **40**:5 (1943), 175–178.
16. Н. Н. Лузин, "О частях натурального ряда", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **11**:5 (1947), 403–410.
17. В. Г. Кановей, "Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н. Н. Лузина", *УМН*, **40**:3 (1985), 117–155; англ. пер.: V. G. Kanovei, "The development of the descriptive theory of sets under the influence of the work of Luzin", *Russian Math. Surveys*, **40**:3 (1985), 135–180.
18. P. L. Dordal, "Towers in $[\omega]^\omega$ and ω^ω", *Ann. Pure Appl. Logic*, **45**:3 (1989), 247–276.
19. K. Kunen, *Set theory. An introduction to independence proofs*, Stud. Logic Found. Math., **102**, North-Holland, Amsterdam, 1980.
20. M. E. Rudin, "Martin's axiom", *Handbook of mathematical logic*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1977, 491–501.
21. D. A. Martin, R. M. Solovay, "Internal Cohen extensions", *Ann. Math. Logic*, **2**:2 (1970), 143–178.
22. S. H. Hechler, "Independence results concerning a problem of N. Lusin", *Math. Systems Theory*, **4**:3 (1970), 316–321.
23. S. H. Hechler, "On the existence of certain cofinal subsets of ${}^\omega\omega$", *Axiomatic set theory*, Proc. Sympos. Pure Math. (Univ. California, Los Angeles, CA, 1967), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, 155–173.
24. M. R. Burke, "A proof of Hechler's theorem on embedding $\aleph_1$-directed sets cofinally into $(\omega^\omega, <^*)$", *Arch. Math. Logic*, **36**:6 (1997), 399–403.
25. R. C. Solomon, "Families of sets and functions", *Czechoslovak Math. J.*, **27**:4 (1977), 556–559.
26. R. Solovay, "Introductory note to Gödel *1970a, *1970b, *1970c", *Collected works. Vol. III. Unpublished essays and lectures*, Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1995, 405–420.
27. Н. Н. Лузин, *Собрание сочинений*, т. II. *Дескриптивная теория множеств*, Изд-во АН СССР, М., 1958.

В. Г. Кановей (V. G. Kanovei)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН
E-mail: kanovei@mccme.ru

Поступило в редакцию
04.10.2007