СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ **Том 85, № 6, 2021**

УДК 510.225

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Модели теории множеств, в которых теорема отделимости неверна

Произведение минимальных форсингов по Йенсену с конечной поддержкой использовано для построения модели теории множеств, в которой теорема отделимости нарушается для проективных классов $\mathbf{\Sigma}^1_n$ и $\mathbf{\Pi}^1_n$, для данного $n \geqslant 3$.

Библиография: 41 наименование.

Ключевые слова: отделимость, модели, форсинг Йенсена, итерация.

DOI: https://doi.org/10.4213/im8937

§ 1. Введение

Проблема отделимости была введена в дескриптивную теорию множеств Н. Н. Лузиным [1]. В частности, Лузин спрашивал, верно ли, что (в современных обозначениях для проективных классов):

(I) любая пара дизъюнктных $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множеств вещественных чисел отделяется $\mathbf{\Delta}^1_n$-множеством;

(II) остатки двух $\mathbf{\Sigma}^1_n$-множеств после удаления их общей части могут быть отделены дизъюнктными $\mathbf{\Pi}^1_n$-множествами; и

(III) найдутся дизъюнктные $\mathbf{\Pi}^1_n$-множества, неотделимые $\mathbf{\Delta}^1_n$-множеством.

Лузин подчеркнул важность и трудность этих проблем[1]. П. С. Новиков включил проблему отделимости в число трех главных проблем дескриптивной теории множеств в [2, с. 279], вместе с проблемой измеримости $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множеств и проблемой мощности $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств. (Об этих последних см., например, в [3].)

Проблема отделимости хорошо известна в дескриптивной теории множеств. В современной терминологии (см. Московакис [4], Кехрис [5]), (*первая*) *теорема отделимости* для класса Γ точечных множеств (множеств в польских пространствах) – это утверждение, что любые два дизъюнктных множества из Γ (в одном пространстве) отделимы множеством из $\Gamma \cap \Gamma^{\complement}$, где $\Gamma^{\complement}$ – класс дополнений к Γ-множествам. *Вторая теорема отделимости* для Γ утверждает, что если X, Y – множества из Γ (в одном пространстве), то множества

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 20-01-00670).

[1]"Одна из наиболее важных проблем теории проективных множеств, ожидающая еще своего решения, есть проблема их *отделимости*. Известно, что любые два аналитических множества без общих точек всегда отделимы B. Было бы очень важно доказать, что любые два множества (A_n) без общей точки всегда отделимы (B_n). Точно так же мы знаем, что если удалить их общую часть из двух аналитических множеств, то оставшиеся части отделимы при помощи двух аналитических дополнений. Естественно, возникает вопрос, сохранится ли этот принцип, если заменить аналитические множества через (A_n) а их дополнения через (CA_n). Эта проблема, несмотря на свою трудность, заслуживает того, чтобы привлечь внимание математиков. Кроме того, важно было бы узнать, существуют ли два множества (CA_n) которые неотделимы (B_n)." – Лузин [1, с. 291].

$X' = X \setminus Y$ и $Y' = Y \setminus X$ отделимы двумя дизъюнктными множествами из $\Gamma^{\complement}$. Таким образом, содержание проблем (I), (II), (III) таково:

– верна ли (первая) теорема отделимости для $\mathbf{\Sigma}^1_n$?

– верна ли вторая теорема отделимости для $\mathbf{\Sigma}^1_n$?

– нарушается ли (первая) теорема отделимости для $\mathbf{\Pi}^1_n$?

Обе теоремы отделимости верны для класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ согласно Лузину [6], [1], но неверны для $\mathbf{\Pi}^1_1$ согласно Новикову [7], и к моменту публикации (французского оригинала) книги [1] в 1930 г. эти результаты были известны. Несколько позже, Новиков [8] установил, что картина меняется на втором проективном уровне: обе теоремы отделимости верны для класса $\mathbf{\Pi}^1_2$, но не верны для $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

В то же время, Куратовский [9] доказал *теорему редукции* для класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$, состоящую в том, что если X, Y – множества из $\mathbf{\Sigma}^1_2$, то существуют дизъюнктные множества $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ в том же классе $\mathbf{\Sigma}^1_2$, с тем же объединением $X' \cup Y' = X \cup Y$. Куратовский также заметил, что рассуждения Лузина в доказательстве теоремы отделимости для $\mathbf{\Sigma}^1_1$ также дают теорему редукции для $\mathbf{\Pi}^1_1$. Вообще, если теорема редукции выполнена для проективного класса Γ, то обе теоремы отделимости выполнены для двойственного класса $\Gamma^{\complement}$.

Итак, классические исследования показали, что теорема редукции выполнена для проективных классов $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$, и не имеет места для $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_2$, а теоремы отделимости выполнены для $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_2$ и не имеют места для $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Sigma}^1_2$. Можно заметить обращение между первым и вторым уровнями иерархии.

Что касается более высоких уровней проективной иерархии, все попытки решить проблемы отделимости и редукции методами классической дескритивной теории не дали результата выше второго уровня. Прогресса удалось добиться лишь с помощью дополнительных теоретико-множественных аксиом. Так, по Новикову [2] (см. также Аддисон [10]), гёделева *аксиома конструктивности* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ влечет, что для любого $n \geqslant 3$, теорема редукции выполнена для $\mathbf{\Sigma}^1_n$ и не имеет места для $\mathbf{\Pi}^1_n$, а теоремы отделимости выполнены для $\mathbf{\Pi}^1_n$, но не для $\mathbf{\Sigma}^1_n$ – совершенно аналогично второму уровню. С другой стороны, по Аддисону и Московакису [11], и Мартину [12], *аксиома проективной детерминированности* **PD** влечет, что для любого $m \geqslant 1$, теорема редукции выполнена для проективных классов $\mathbf{\Pi}^1_{2m+1}$, $\mathbf{\Sigma}^1_{2m+2}$ и не имеет места для $\mathbf{\Sigma}^1_{2m+1}$, $\mathbf{\Pi}^1_{2m+2}$, а теоремы отделимости выполнены для $\mathbf{\Sigma}^1_{2m+1}$, $\mathbf{\Pi}^1_{2m+2}$, но не для $\mathbf{\Pi}^1_{2m+1}$, $\mathbf{\Sigma}^1_{2m+2}$ – совершенно аналогично тому, что происходит на первом и втором уровнях ($n = 0$ в этой схеме). Сверх того, согласно Стилу [13], из полной *аксиомы детерминированности* **AD** следует, что если Γ – не самодвойственный (т. е. $\Gamma \neq \Gamma^{\complement}$) класс точечных множеств, замкнутый относительно некоторых простых операций, редукция выполнена для в точности одного из классов Γ, $\Gamma^{\complement}$, а теоремы отделимости выполнены для другого класса. Обратно, согласно Стилу [14], определенная более специальная форма отделимости для $\mathbf{\Pi}^1_3$ влечет недостижимые другими способами связи между некоторыми гипотезами детерминированности. См. также [15] о некоторых других результатах.

Все эти достижения однако не дают ответа на важные вопросы о статусе теорем отделимости для высших проективных классов, как, например, следующая проблема.

Проблема 1.1 (Матайес [16] для $n = 3$). При $n \geqslant 3$, совместима ли с **ZFC** гипотеза о том, что (первая) теорема отделимости не верна для $\mathbf{\Sigma}^1_n$ и для $\mathbf{\Pi}^1_n$?

Харрингтон получил положительный ответ при помощи генерического расширения $\mathbf{L}$, в котором (первая) теорема отделимости не выполнена для $\mathbf{\Sigma}^1_3$ и для $\mathbf{\Pi}^1_3$. Решение было достигнуто при помощи техники почти дизъюнктного форсинга [17], и его схематическое изложение содержится в неопубликованных рукописных заметках [18, часть 2]. Сам результат упоминается, со ссылкой на Харрингтона, например, у Московакиса [4, 5B.3]. Харрингтон также предложил в [18] некоторые существенные изменения в конструкции указанного генерического расширения, направленные к нарушению отделимости для классов $\mathbf{\Sigma}^1_n$ и $\mathbf{\Pi}^1_n$ для данного $n > 3$, или даже для всех n, но такое обобщение не появилось в деталях.

Здесь мы доказываем следующую теорему, положительно решающую проблему 1.1 для данного $n > 3$, методом отличным от использованного в [18].

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathfrak{n} \geqslant 3$. *Имеется генерическое расширение конструктивного универсума* $\mathbf{L}$, *в котором*:

(i) *существует пара дизъюнктных* $\mathit{\Pi}^1_{\mathfrak{n}}$*-множеств* $X, Y \subseteq 2^\omega$, *неотделимых дизъюнктными* $\mathbf{\Sigma}^1_{\mathfrak{n}}$*-множествами, так что теорема отделимости не выполнена для классов* $\mathbf{\Pi}^1_{\mathfrak{n}}$ *и* $\mathit{\Pi}^1_{\mathfrak{n}}$;

(ii) *существует пара дизъюнктных* $\mathit{\Sigma}^1_{\mathfrak{n}}$*-множеств* $X, Y \subseteq 2^\omega$, *неотделимых дизъюнктными* $\mathbf{\Pi}^1_{\mathfrak{n}}$*-множествами, так что теорема отделимости не выполнена для классов* $\mathbf{\Sigma}^1_{\mathfrak{n}}$ *и* $\mathit{\Sigma}^1_{\mathfrak{n}}$.

§ 2. План доказательства

Для данного $\mathfrak{n} \geqslant 3$ мы построим последовательность форсингов $\mathbb{P}_\xi$, $\xi < \omega_1$, в $\mathbf{L}$, произведение $\mathbb{P} = \prod_\xi \mathbb{P}_\xi$ которых с конечной базой удовлетворяет условию счетности антицепей CCC (т. е. Countable Chain Condition) и присоединяет последовательность генерических точек $x_\xi \in 2^\omega$, независимых одна от другой в том смысле, что

(I) если $\eta < \omega_1$, то (a) подмодель $\mathbf{L}[\langle x_\xi \rangle_{\xi \neq \eta}]$ не содержит $\mathbb{P}_\eta$-генерических точек над $\mathbf{L}$, и также (b) x_η – единственная точка в $\mathbf{L}[\langle x_\xi \rangle_{\xi < \omega_1}]$, $\mathbb{P}_\eta$-генерическая над $\mathbf{L}$,

и выполнено такое свойство определимости:

(II) отношение “$x \in 2^\omega$ есть точка $\mathbb{P}_\xi$-генерическая над $\mathbf{L}$” (с аргументами x, ξ) имеет класс $\mathit{\Pi}^1_{\mathfrak{n}-1}$ в самом расширении и его подмоделях.

Далее, чтобы построить пример для теоремы 1.2, (i), мы можем генерически разбить ω_1 на три неограниченных множества[2] $\omega_1 = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, взять $\Delta = \{2\nu \colon \nu \in \Omega_1 \cup \Omega_3\} \cup \{2\nu + 1 \colon \nu \in \Omega_2 \cup \Omega_3\}$, и доказать, что множества Ω_1 и Ω_2 (а точнее, множества кодов в 2^ω для ординалов из Ω_1 и Ω_2) суть дизъюнктные $\mathit{\Pi}^1_{\mathfrak{n}}$-множества, неотделимые дизъюнктными $\mathbf{\Sigma}^1_{\mathfrak{n}}$-множествами в модели $M = \mathbf{L}[\langle x_\xi \rangle_{\xi \in \Delta}]$. Действительно, согласно (I),

$$\Omega_1 = \{\nu < \omega_1 \colon \neg\, \exists\, x \ (x \text{ есть } \mathbb{P}_{2\nu+1}\text{-генерическая точка над } \mathbf{L})\}$$

в M, так что Ω_1 есть $\mathit{\Pi}^1_{\mathfrak{n}}$ в M по (II), и аналогично Ω_2. Утверждение о неотделимости использует такое важное свойство $\mathbb{P}$-генерических расширений:

[2] На самом деле, структура разбиения сложнее, поскольку одновременно нужно строить пример и для 1.2, (ii), см. § 19.

(III) если множество $X \in \mathbf{L}$, $X \subseteq \omega_1$, неограничено в ω_1, а множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$, то $\mathbf{L}[\langle x_\xi \rangle_{\xi \in X}]$ – элементарная подмодель $\mathbf{L}[G]$ для всех $\Sigma^1_{\mathbb{n}-1}$-формул.

Каждый отдельный форсинг $\mathbb{P}_\xi$ в этой схеме – это клон минимального форсинга по Йенсену из [19] (ниже для краткости *форсинг Йенсена*, о нем см. также [20, 28A]). В частности, $\mathbb{P}_\xi$ состоит из *совершенных деревьев* в $2^{<\omega}$. Идея использовать произведения форсингов Йенсена с конечной базой для получения моделей с разными свойствами определимости принадлежит Энайяту [21]. Она использована для построения генерических моделей, содержащих: счетные непустые Π^1_2-множества (даже E_o-классы) без OD точек [22], [23], счетную Π^1_2-пару Грошек–Лейвера [24], плоские Π^1_2-множества со счетными сечениями и OD-неуниформизируемые [25], [26], контрпримеры к теореме отделимости для $\mathbf{\Sigma}^1_3$ и $\mathbf{\Pi}^1_3$ [25], контрпримеры к аксиоме выбора [27], а также ординально-определимое разбиение вещественной прямой на два непустых ординально-неопределимых множества [28].

Результат работы [25] тождествен случаю $\mathbb{n} = 3$ в теореме 1.2, когда (III) сразу выполнено по Шенфилду. С другой стороны, условия, подобные (I), (II) для $\mathbb{n} = 3$, присутствуют в конструкциях форсинга в [22]–[26], а также в самой работе [19], где построен CCC форсинг $\mathbb{J} \in \mathbf{L}$, присоединяющий точку $a \in 2^\omega$ так, что a – единственная $\mathbb{J}$-генерическая точка в $\mathbf{L}[a]$, и "быть $\mathbb{J}$-генерической точкой" есть Π^1_2-свойство. Эти условия обеспечиваются особым построением $\mathbb{J} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbb{J}_\alpha$ в $\mathbf{L}$ из счетных множеств $\mathbb{J}_\alpha$ совершенных деревьев. Это построение можно видеть как максимальную ветвь в некотором мега-дереве $\mathscr{P}$, чьи вершины являются счетными множествами совершенных деревьев, и каждое $\mathbb{J}_\alpha$ выбирается как $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьшее подходящее продолжение. Сложность этой конструкции – Δ^1_2 в кодах, и это влечет Π^1_2-определимость свойства генеричности, а особый тип продолжения в мега-дереве позволяет "убить" все кандидатуры на $\mathbb{J}$-генеричность кроме a.

Близкие идеи и построения применены в упомянутых работах, в частности в [25], где определена модель, в которой $\mathbf{\Pi}^1_3$-отделимость неверна.

Метод переноса генерических контрпримеров, первоначально построенных на втором или третьем проективном уровне, на более высокие проективные уровни $\mathbb{n}$ был введен Харрингтоном [18] на основе почти дизъюнктного форсинга [17] и независимо – в работе [29] на основе форсинга Йенсена [19]. В контексте вышесказанного, метод использует максимальную ветвь в $\mathscr{P}$, пересекающую все плотные множества в $\mathscr{P}$ дескриптивной сложности $\mathbb{n}$ (или $\mathbb{n} + c$, где c – малая целая константа, зависящая от существа задачи). Метод был недавно использован в построении моделей, в которых, для данного $\mathbb{n} \geqslant 2$, имеются:

(a) $\Pi^1_{\mathbb{n}}$ E_o-класс эквивалентности, не содержащий OD элементов, но любое счетное $\Sigma^1_{\mathbb{n}}$-множество точек содержит только OD элементы [30],

(b) такой $\Pi^1_{\mathbb{n}}$ синглет $\{a\}$, что $a \in 2^\omega$ кодирует конфинальную функцию $f\colon \omega \to \omega_1^{\mathbf{L}}$, минимальную над $\mathbf{L}$, но все $\Sigma^1_{\mathbb{n}}$-множества $X \subseteq \omega$ конструктивны [31],

(c) ROD-неуниформизуемое $\Pi^1_{\mathbb{n}}$-множество со счетными сечениями, но все $\mathbf{\Sigma}^1_{\mathbb{n}}$-множества со счетными сечениями $\mathbf{\Delta}^1_{\mathbb{n}+1}$-униформизуемы [32],

а также модель, в которой совокупность $\mathscr{P}(\omega) \cap \mathbf{L}$ всех конструктивных множеств $x \subseteq \omega$ тождественна совокупности всех $\Delta^1_{\mathbb{n}}$-множеств $x \subseteq \omega$ в недавней работе [33]. Здесь этот метод используется для доказательства теоремы 1.2.

Параграфы 3–7: совершенные деревья в $2^{<\omega}$, форсинги из совершенных деревьев, мультидеревья (конечные произведения деревьев), мультифорсинги (счетные произведения форсингов), расщепление, измельчения, генерическое измельчение расщепляющей конструкцией по Йенсену.

Параграфы 8–13: свойства генерических измельчений, запирание плотных множеств и имен точек, приложения к генерическим расширениям.

Параграфы 14–16: мы вводим множество $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$ всех счетных последовательностей $\vec{\boldsymbol{\pi}}$ малых мультифорсингов, возрастающих по измельчению. Рассуждая в $\mathbf{L}$, мы определяем максимальную ветвь $\vec{\sqcap}$ в $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$ класса $\Delta^1_{\mathfrak{n}-1}$ (в кодах), блокирующую все $\Sigma^1_{\mathfrak{n}-2}$-множества в $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$, где $\mathfrak{n}$ – число в теореме 1.2, и $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ *блокирует* $W \subseteq \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ если либо $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in W$, либо нет расширений $\vec{\boldsymbol{\pi}}$ в $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$, принадлежащих W. Форсинг $\mathbb{P}$ для теоремы 1.2 получается из $\vec{\sqcap}$.

Параграфы 17–20: доказывается, что $\mathbb{P}$ удовлетворяет (I) и (II).

Параграфы 22–26: для вывода (III) мы используем вспомогательное отношение вынуждения forc, аппроксимирующее истинность в $\mathbb{P}$-генерических расширениях для $\Sigma^1_{\mathfrak{n}-1}$-формул и ниже. Отношение forc, ограниченное на Σ^1_m или Π^1_m, $m \geqslant 2$, имеет тип соответственно Σ^1_m, Π^1_m. Инвариантность отношения forc относительно определенных преобразований (а сам форсинг $\mathbb{P}$ не инвариантен!) используется для доказательства (III) и теоремы 1.2.

§ 3. Деревья и арбореальные форсинги

Через $2^{<\omega}$ обозначается множество всех кортежей (конечных последовательностей) чисел 0, 1. Если $t \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$ то $t^\frown i$ – продолжение кортежа t членом i справа. Если $s, t \in 2^{<\omega}$, то $s \subseteq t$ означает, что t продолжает s, а $s \subset t$ – собственное продолжение. $\operatorname{lh}(t)$ есть длина $t \in 2^{<\omega}$, а $2^n = \{s \in 2^{<\omega} \colon \operatorname{lh}(s) = n\}$ (кортежи длины n).

Множество $T \subseteq 2^{<\omega}$ есть *дерево*, когда для любых $s \subset t$ в $2^{<\omega}$, из $t \in T$ следует $s \in T$. Любое непустое дерево $T \subseteq 2^{<\omega}$ содержит *пустой кортеж* Λ.

Если $T \subseteq 2^{<\omega}$ – дерево и $s \in T$, то пусть $T{\restriction}_s = \{t \in T \colon s \subseteq t$ или $t \subseteq s\}$.

Определение 3.1. $\mathbf{PT}$ есть множество всех *совершенных* деревьев $\varnothing \neq T \subseteq 2^{<\omega}$; дерево T принадлежит $\mathbf{PT}$, если оно не имеет концевых вершин и изолированных ветвей. Если $T \in \mathbf{PT}$, то определяется совершенное множество

$$[T] = \{a \in 2^\omega \colon \forall\, n\, (a \restriction n \in T)\} \subseteq 2^\omega.$$

Деревья $T, S \in \mathbf{PT}$ *почти дизъюнктны*, кратко *пд*, когда пересечение $S \cap T$ конечно; это равносильно соотношению $[S] \cap [T] = \varnothing$. Множество $\mathbb{A} \subseteq \mathbf{PT}$ есть *антицепь*, если любые два дерева $T \neq S$ в $\mathbb{A}$ являются пд.

Рассматриваются пары вида $\langle n, T\rangle$, где $n < \omega$ и $T \in \mathbf{PT}$. Следуя [34], множество $\omega \times \mathbf{PT}$ всех таких пар упорядочивается отношением $\preccurlyeq$, определенным[3] так, что $\langle n, T\rangle \preccurlyeq \langle m, S\rangle$ (пара $\langle n, T\rangle$ *продолжает* пару $\langle m, S\rangle$), когда $m \leqslant n$,

[3] Это определение прямо не содержит требования о расщеплении. Вот почему в лемме 3.2 требуется генеричность. Более раннее определение в [35] требует, чтобы для любого $s \in S \cap 2^m$ имелись два кортежа $s' \neq s''$ в $T \cap 2^n$, для которых $s \subset s'$ и $s \subset s''$. С таким упорядочением, лемма 3.2 выполнена и без требования генеричности.

$T \subseteq S$, и $T \cap 2^m = S \cap 2^m$. Роль числа m в паре $\langle m, S\rangle$ состоит в том, что оно сохраняет значение $S \cap 2^m$ при $\preccurlyeq$-продолжениях.

Выполнено соотношение $m > n \Longrightarrow \langle m, T\rangle \preccurlyeq \langle n, T\rangle$ (с тем же T!), но $S \subseteq T \Longrightarrow \langle n, S\rangle \preccurlyeq \langle n, T\rangle$ не обязательно верно: требуется $T \cap 2^n = S \cap 2^n$.

Лемма 3.2 (см. [34]). *Пусть* $\cdots \preccurlyeq \langle n_2, T_2\rangle \preccurlyeq \langle n_1, T_1\rangle \preccurlyeq \langle n_0, T_0\rangle$ – *убывающая последовательность в* $\omega \times \mathbf{PT}$, *с* $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ *строго, минимально генерическая в том смысле, что она пересекает каждое множество вида*

$$D_t = \{\langle n, T\rangle \in \omega \times \mathbf{PT} \colon t \notin T \ \textit{или}\ \exists\, s \in T\,(t \subseteq s \wedge s^\frown 0,\ s^\frown 1 \in T)\}, \qquad t \in 2^{<\omega}.$$

Тогда $T = \bigcap_n T_n \in \mathbf{PT}$, *и если* $i < \omega$ *то* $\langle n_i, T\rangle \preccurlyeq \langle n_i, T_i\rangle$.

Определение 3.3. *Арбореальным форсингом* называется любое множество $\mathbb{P} \subseteq \mathbf{PT}$, для которого если $u \in T \in \mathbb{P}$, то $T{\restriction}_u \in \mathbb{P}$. Через $\mathbf{AF}$ обозначим множество всех арбореальных форсингов $\mathbb{P}$. Форсинг $\mathbb{P} \in \mathbf{AF}$ называется:

– *регулярным*, если для любых $S, T \in \mathbb{P}$, пересечение $[S] \cap [T]$ открыто-замкнуто в $[S]$ или в $[T]$ (или как в $[S]$ так и в $[T]$);

– *особым*, если имеется конечная или счетная антицепь $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{P}$, для которой $\mathbb{P} = \{T{\restriction}_s \colon s \in T \in \mathbb{A}\}$ – антицепь $\mathbb{A}$ в этом случае единственна, а сам форсинг $\mathbb{P}$, очевидно, регулярен.

Пример 3.4. Если $s \in 2^{<\omega}$, то дерево $T[s] = \{t \in 2^{<\omega} \colon s \subseteq t \text{ или } t \subseteq s\}$ принадлежит $\mathbf{PT}$ и $T[s] = (2^{<\omega}){\restriction}_s\ \forall\, s$. Множество $\mathbb{P}_{\mathrm{coh}} = \{T[s] \colon s \in 2^{<\omega}\}$ (форсинг Коэна) есть регулярный и особый арбореальный форсинг.

Любое множество $\mathbb{P} \in \mathbf{AF}$ рассматривается как форсинг (если $T \subseteq T'$, то T – более сильное “условие”); такой форсинг $\mathbb{P}$ присоединяет точку из 2^ω.

Применяя расщепляющие конструкции, как в лемме 3.2, над форсингом $\mathbb{P} \in \mathbf{AF}$, мы будем использовать больший форсинг $\bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P} \in \mathbf{AF}$, состоящий из всех конечных объединений деревьев из $\mathbb{P}$. Понятно, что множество $\mathbb{P}$ плотно в $\bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}$, так что оба множества имеют те же свойства как форсинги. Однако множество $\bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}$ более удобно в плане построения деревьев.

Следующая лемма доказывает абсолютность совместимости “условий” в *регулярном* форсинге.

Лемма 3.5. *Пусть форсинг* $\mathbb{P} \in \mathbf{AF}$ *регулярен, и деревья* $S, T \in \mathbb{P}$ *не являются пд. Тогда* $S \cap T \in \bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}$, *так что* S, T *совместны в* $\mathbb{P}$.

Доказательство. Вследствие регулярности, пересечение $[S] \cap [T]$ является открыто-замкнутым, скажем, в $[S]$. Тогда имеется конечное множество $U \subseteq S$, для которого $[S] \cap [T] = \bigcup_{u \in U} [S{\restriction}_u]$. Но каждое $S{\restriction}_u$ принадлежит $\mathbb{P}$ по арбореальности. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть* $\mathbb{P} \in \mathbf{AF}$ *и* $S, T \in \bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}$, $u \in S$, $n = \mathrm{lh}(u)$, $T \subseteq S{\restriction}_u$. *Тогда дерево* $S' = T \cup \bigcup_{v \in S \cap 2^n,\, v \neq u} S{\restriction}_v$ *принадлежит* $\bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}$, $\langle n, S'\rangle \preccurlyeq \langle n, S\rangle$, $S'{\restriction}_u = T$, *и* $S'{\restriction}_v = S{\restriction}_v$ *для всех кортежей* $v \in S$ *с* $\mathrm{lh}(v) = n$, $v \neq u$.

Следствие 3.7. *Предположим, что* $\mathbb{P}, \mathbb{P}' \in \mathbf{AF}$. *Тогда*

(i) *если* $n < \omega$ *и* $T \in \bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}$, *то существует такое дерево* $S \in \bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}$, *что* $\langle n, S\rangle \preccurlyeq \langle n, T\rangle$ *и* $S{\restriction}_t \in \mathbb{P}$ (не только $\in \bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}$!) *для всех* $t \in 2^n \cap S$;

(ii) *если* $T \in \mathbb{P}$ *и* $T' \in \mathbb{P}'$, *то существуют деревья* $S \in \mathbb{P}$, $S' \in \mathbb{P}'$, *для которых* $S \subseteq T$, $S' \subseteq T'$, *и* $[S] \cap [S'] = \varnothing$;

(iii) *если* $n < \omega$, $T \in \bigcup^{\rm fin} \mathbb{P}$, $T' \in \bigcup^{\rm fin} \mathbb{P}'$, *то имеются деревья* $S \in \bigcup^{\rm fin} \mathbb{P}$, $S' \in \bigcup^{\rm fin} \mathbb{P}'$, *для которых* $\langle n, S\rangle \preccurlyeq \langle n, T\rangle$, $\langle n, S'\rangle \preccurlyeq \langle n, T'\rangle$, $[S] \cap [S'] = \varnothing$.

Доказательство. (ii) Если $T = T'$, то выберем пару кортежей $u \ne v$ в $T = T'$ с $\mathrm{lh}(u) = \mathrm{lh}(v)$, и пусть $S = T' \restriction_u$, $S' = T' \restriction_v$. Если к примеру $T \nsubseteq T'$, то берем $u \in T \setminus T'$, и пусть $S = T\restriction_u$ и просто $S' = T'$. Для вывода (iii) итерируем (ii) и используем лемму 3.6. Лемма доказана.

§ 4. Мультифорсинг и мультидеревья

Мультифорсингом назовем любое отображение $\boldsymbol{\pi}\colon |\boldsymbol{\pi}| \to \mathbf{AF}$, где $|\boldsymbol{\pi}| = \operatorname{dom} \boldsymbol{\pi} \subseteq \omega_1$. Через $\mathbf{MF}$ обозначим совокупность всех мультифорсингов. Каждый мультифорсинг $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{MF}$ будет обычно представлен как индексированное множество $\boldsymbol{\pi} = \langle \mathbb{P}_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{\pi}|}$, где $\mathbb{P}_\xi \in \mathbf{AF}$ для всех $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, так что каждое $\mathbb{P}_\xi = \mathbb{P}_\xi^{\boldsymbol{\pi}} = \boldsymbol{\pi}(\xi)$, $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, – арбореальный форсинг. Мультифорсинг $\boldsymbol{\pi}$:

– *малый*, если множество $|\boldsymbol{\pi}|$ и каждый форсинг $\mathbb{P}_\xi^{\boldsymbol{\pi}}$, $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, – счетны;

– *особый*, если каждый форсинг $\mathbb{P}_\xi^{\boldsymbol{\pi}}$ особый в смысле определения 3.3;

– *регулярный*, если каждый форсинг $\mathbb{P}_\xi^{\boldsymbol{\pi}}$ регулярен, в смысле 3.3.

Мультидеревом назовем любую функцию $\boldsymbol{p}\colon |\boldsymbol{p}| \to \mathbf{PT}$, с *конечной областью* $|\boldsymbol{p}| = \operatorname{dom} \boldsymbol{p}$; через $\mathbf{MT}$ обозначим совокупность всех мультидеревьев. Каждое $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}$ будет представлено как индексированное множество $\boldsymbol{p} = \langle T_\xi^{\boldsymbol{p}} \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{p}|}$, где $T_\xi^{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{p}(\xi) \in \mathbf{PT}$ для всех $\xi \in |\boldsymbol{p}|$.

Пусть $\boldsymbol{\pi} = \langle \mathbb{P}_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{\pi}|}$ – мультифорсинг. В этом случае $\boldsymbol{\pi}$-*мультидеревом* называется любое мультидерево $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}$, для которого $|\boldsymbol{p}| \subseteq |\boldsymbol{\pi}|$, и если $\xi \in |\boldsymbol{p}|$, то дерево $\boldsymbol{p}(\xi) = T_\xi^{\boldsymbol{p}}$ принадлежит $\mathbb{P}_\xi$. Если $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, то множество

$$[\boldsymbol{p}] = \{x \in (2^\omega)^{|\boldsymbol{\pi}|} \colon \forall\, \xi \in |\boldsymbol{p}|\, (x(\xi) \in [T_\xi^{\boldsymbol{p}}])\}$$

есть ко-конечномерный совершенный куб в $(2^\omega)^{|\boldsymbol{\pi}|}$. Мы упорядочиваем $\mathbf{MT}$ и каждое $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ покомпонентно: $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$ ($\boldsymbol{q}$ сильнее, чем $\boldsymbol{p}$), когда $|\boldsymbol{p}| \subseteq |\boldsymbol{q}|$ и $T_\xi^{\boldsymbol{q}} \subseteq T_\xi^{\boldsymbol{p}}$ для всех $\xi \in |\boldsymbol{p}|$; это равносильно $[\boldsymbol{q}] \subseteq [\boldsymbol{p}]$. Пустое мультидерево $\boldsymbol{\Lambda}$, для которого $|\boldsymbol{\Lambda}| = \varnothing$, принадлежит $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ и является слабейшим.

Замечание 4.1. Если $\boldsymbol{\pi} = \langle \mathbb{P}_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{\pi}|}$ – мультифорсинг, то множество $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ всех $\boldsymbol{\pi}$-мультидеревьев, очевидно, тождественно произведению $\prod_{\xi \in |\boldsymbol{\pi}|} \mathbb{P}_\xi$ данных арбореальных форсингов $\mathbb{P}_\xi$, с конечной базой.

Определение 4.2. Мультидеревья $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ *где-то почти дизъюнктны* (гпд), если $T_\xi^{\boldsymbol{p}}$ и $T_\xi^{\boldsymbol{q}}$ являются пд для какого-то $\xi \in |\boldsymbol{p}| \cap |\boldsymbol{q}|$. Быть гпд эквивалентно $[\boldsymbol{p}] \cap [\boldsymbol{q}] = \varnothing$, а также, для регулярных мультифорсингов $\boldsymbol{\pi}$, равносильно *несовместности* в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ согласно следующему результату.

Следствие 4.3 (из леммы 3.5). *Пусть* $\boldsymbol{\pi}$ *– регулярный мультифорсинг, а* $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ *не являются гпд. Существует такое конечное множество* $R \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, *что* $[\boldsymbol{p}] \cap [\boldsymbol{q}] = \bigcup_{\boldsymbol{r} \in R} [\boldsymbol{r}]$. *Значит,* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ *совместны в* $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, *т.е. имеется мультидерево* $\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, *для которого* $\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{q}$.

Определение 4.4. *Покомпонентное объединение* мультифорсингов $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\varrho}$ – это мультифорсинг $\boldsymbol{\pi} \cup^{\rm cw} \boldsymbol{\varrho}$, удовлетворяющий $|(\boldsymbol{\pi} \cup^{\rm cw} \boldsymbol{\varrho})| = |\boldsymbol{\pi}| \cup |\boldsymbol{\varrho}|$ и

$$(\boldsymbol{\pi} \cup^{\rm cw} \boldsymbol{\varrho})(\xi) = \boldsymbol{\pi}(\xi), \text{ или } \boldsymbol{\varrho}(\xi), \text{ или } \boldsymbol{\pi}(\xi) \cup \boldsymbol{\varrho}(\xi),$$

когда соответственно $\xi \in |\boldsymbol{\pi}| \setminus |\boldsymbol{\varrho}|$, $\xi \in |\boldsymbol{\varrho}| \setminus |\boldsymbol{\pi}|$, $\xi \in |\boldsymbol{\varrho}| \cap |\boldsymbol{\pi}|$.

Если $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \langle \boldsymbol{\pi}_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda}$ – последовательность форсингов из $\mathbf{MF}$, то определим $\boldsymbol{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}} \vec{\boldsymbol{\pi}} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\lambda} \boldsymbol{\pi}_\alpha \in \mathbf{MF}$ так, что $|\boldsymbol{\pi}| = \bigcup_{\alpha<\lambda} |\boldsymbol{\pi}_\alpha|$ и $\boldsymbol{\pi}(\xi) = \bigcup_{\alpha<\lambda,\, \xi\in|\boldsymbol{\pi}_\alpha|} \boldsymbol{\pi}_\alpha(\xi)$ для каждого $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$.

Замечание 4.5. Любой форсинг вида $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, где $\boldsymbol{\pi} = \langle \mathbb{P}_\xi \rangle_{\xi\in|\boldsymbol{\pi}|} \in \mathbf{MF}$, присоединяет генерическую последовательность $\langle x_\xi \rangle_{\xi\in|\boldsymbol{\pi}|}$, где каждая $x_\xi = x_\xi[G] \in 2^\omega$ есть $\mathbb{P}_\xi$-генерическая точка. Точки вида $x_\xi[G]$ мы называем *главными генерическими точками* в $\mathbf{V}[G]$.

§ 5. Измельчение арбореальных форсингов

Если $T \in \mathbf{PT}$ (дерево) и $D \subseteq \mathbf{PT}$, то $X \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D$ означает, что найдется конечное $D' \subseteq D$, для которого $T \subseteq \bigcup D'$, или равносильно, $[T] \subseteq \bigcup_{S\in D'} [S]$.

Определение 5.1. Пусть $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathbf{AF}$ – арбореальные форсинги. Скажем, что $\mathbb{Q}$ – *измельчение* форсинга $\mathbb{P}$ (символически $\mathbb{P} \sqsubset \mathbb{Q}$), когда

(1) множество $\mathbb{Q}$ плотно[4] в $\mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$: если $T \in \mathbb{P}$, то $\exists\, Q \in \mathbb{Q}\, (Q \subseteq T)$;

(2) если $Q \in \mathbb{Q}$, то $Q \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup \mathbb{P}$;

(3) если $Q \in \mathbb{Q}$ и $T \in \mathbb{P}$, то $[Q] \cap [T]$ открыто-замкнуто в $[Q]$ и $T \not\subseteq Q$.

Лемма 5.2. (i) *Если* $\mathbb{P} \sqsubset \mathbb{Q}$ *и* $S \in \mathbb{P}$, $T \in \mathbb{Q}$, *то* $[S] \cap [T]$ *тощее в* $[S]$, *поэтому* $\mathbb{P} \cap \mathbb{Q} = \varnothing$ *и* $\mathbb{Q}$ *открыто-плотно в* $\mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$;

(ii) *если* $\mathbb{P} \sqsubset \mathbb{Q} \sqsubset \mathbb{R}$, *то* $\mathbb{P} \sqsubset \mathbb{R}$, *т.е.* $\sqsubset$ *– строгий частичный порядок*;

(iii) *если* $\langle \mathbb{P}_{\alpha\alpha<\lambda} \rangle$ *есть* $\sqsubset$*-возрастающая последовательность в* $\mathbf{AF}$ *и* $0 < \mu < \lambda$, *то* $\mathbb{P} = \bigcup_{\alpha<\mu} \mathbb{P}_\alpha \sqsubset \mathbb{Q} = \bigcup_{\mu\leqslant\alpha<\lambda} \mathbb{P}_\alpha$;

(iv) *если* $\langle \mathbb{P}_{\alpha\alpha<\lambda} \rangle$ *есть* $\sqsubset$*-возрастающая последовательность в* $\mathbf{AF}$ *и каждый форсинг* $\mathbb{P}_\alpha$ *– особый, то* $\mathbb{P} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathbb{P}_\alpha \in \mathbf{AF}$ *– регулярный форсинг, и каждое множество* $\mathbb{P}_\gamma$ *предплотно в* $\mathbb{P}$.

Доказательство. (i) Иначе существует кортеж $u \in S$, удовлетворяющий $S{\restriction}_u \subseteq [T] \cap [S]$. Но $S{\restriction}_u \in \mathbb{P}$, что противоречит 5.1, (3).

(ii), (iii) Уже доказанное утверждение (i) используется для вывода 5.1, (3).

(iv) Для проверки регулярности, пусть $S \in \mathbb{P}_\alpha$, $T \in \mathbb{P}_\beta$, $\alpha \leqslant \beta$. Если $\alpha = \beta$, то, раз $\mathbb{P}_\alpha$ – особый форсинг, деревья S, T либо пд, либо $\subseteq$-сравнимы по лемме 3.5. Если $\alpha < \beta$, то $[S] \cap [T]$ открыто-замкнуто в $[T]$ по 5.1, (3).

Для проверки предплотности, пусть $S \in \mathbb{P}_\alpha$, $\alpha \neq \gamma$. Если $\alpha < \gamma$, то согласно 5.1, (1) имеется дерево $T \in \mathbb{P}_\gamma$, $T \subseteq S$. Пусть $\gamma < \alpha$. Тогда имеем $S \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup \mathbb{P}_\gamma$ по 5.1, (2), так что существует дерево $T \in \mathbb{P}_\gamma$, для которого $[S] \cap [T] \neq \varnothing$. Но $[S] \cap [T]$ открыто-замкнуто в $[S]$ по 5.1, (3). Значит, $S{\restriction}_u \subseteq T$ для подходящего $u \in S$. Наконец, $S{\restriction}_u \in \mathbb{P}_\alpha$, так как $\mathbb{P}_\alpha \in \mathbf{AF}$. Лемма 5.2 доказана.

Заметим, что если $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathbf{AF}$ и $\mathbb{P} \sqsubset \mathbb{Q}$, то плотное множество $D \subseteq \mathbb{P}$ необязательно плотно или хотя бы предплотно в $\mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$. Однако имеется особый тип измельчений, сохраняющий предплотность.

[4] Если $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbf{PT}$, то множество $\mathbb{P}$: 1) *плотно* в $\mathbb{R}$, когда $\forall\, T \in \mathbb{R}\; \exists\, S \in \mathbb{P}\; (S \subseteq T)$; 2) *открыто-плотно* в $\mathbb{R}$, когда, кроме того, $\forall\, T \in \mathbb{R}\; \forall\, S \in \mathbb{P}\; (T \subseteq S \Longrightarrow T \in \mathbb{P})$; и 3) *предплотно* в $\mathbb{R}$, когда производное множество $\mathbb{P}' = \{T \in \mathbb{R} \colon \exists\, S \in \mathbb{P}\; (T \subseteq S)\}$ плотно в $\mathbb{R}$.

Определение 5.3. Пусть $\mathbb{P}, \mathbb{Q} \in \mathbf{AF}$ и $D \subseteq \mathbb{P}$. Скажем, что $\mathbb{Q}$ *запирает* D *над* $\mathbb{P}$, символически $\mathbb{P} \sqsubset_D \mathbb{Q}$, если $\mathbb{P} \sqsubset \mathbb{Q}$ и любое дерево $S \in \mathbb{Q}$ удовлетворяет $S \subseteq^{\text{fin}} \bigcup D$. Тогда "просто" $\mathbb{P} \sqsubset \mathbb{Q}$ равносильно $\mathbb{P} \sqsubset_{\mathbb{P}} \mathbb{Q}$.

Мы увидим, что запертое множество предплотно до и после измельчения. Важность запирающих измельчений состоит в том, что запертость сохраняется при последующих простых измельчениях, т. е. $\sqsubset_D$ транзитивно в сочетании с $\sqsubset$ в смысле (ii) следующей леммы.

Лемма 5.4. (i) *Если* $\mathbb{P} \sqsubset_D \mathbb{Q}$, *то* D *предплотно в* $\mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$, *а если к тому же* $\mathbb{P}$ *регулярно, то* D *предплотно также и в* $\mathbb{P}$;

(ii) *если* $\mathbb{P} \sqsubset_D \mathbb{Q} \sqsubset \mathbb{R}$ (второе $\sqsubset$ не есть $\sqsubset_D$!), *то* $\mathbb{P} \sqsubset_D \mathbb{R}$;

(iii) *если* $\langle \mathbb{P}_{\alpha\alpha<\lambda} \rangle$ *есть* $\sqsubset$*-возрастающая последовательность в* $\mathbf{AF}$, $0 < \mu < \lambda$, *и* $\mathbb{P} = \bigcup_{\alpha<\mu} \mathbb{P}_\alpha \sqsubset_D \mathbb{P}_\mu$, *то* $\mathbb{P} \sqsubset_D \mathbb{Q} = \bigcup_{\mu \leqslant \alpha < \lambda} \mathbb{P}_\alpha$.

Доказательство. (i) Для вывода предплотности D в $\mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$, пусть $T_0 \in \mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$. По 5.1, (1) имеется дерево $T \in \mathbb{Q}$, $T \subseteq T_0$. Тогда $T \subseteq^{\text{fin}} \bigcup D$, так что существует дерево $S \in D$ с $X = [S] \cap [T] \neq \varnothing$. Но X открыто-замкнуто в $[T]$ по 5.1, (3). Поэтому найдется дерево $T' \in \mathbb{Q}$ с $[T'] \subseteq X$, откуда $T' \subseteq S \in D$ и $T' \subseteq T \subseteq T_0$. Мы заключаем, что T_0 совместно с $S \in D$ в $\mathbb{P} \cup \mathbb{Q}$.

Для вывода предплотности D в $\mathbb{P}$ (предполагая регулярность $\mathbb{P}$), пусть $S_0 \in \mathbb{P}$. Мы видели выше, что тогда S_0 совместно с каким-то $S \in D$, поэтому S и S_0 не являются пд. Остается применить лемму 3.5.

Для вывода (ii), дополнительно к лемме 5.2, (ii), пусть $R \in \mathbb{R}$. Тогда $R \subseteq^{\text{fin}} \bigcup \mathbb{Q}$, но каждое $T \in \mathbb{Q}$ удовлетворяет $T \subseteq^{\text{fin}} \bigcup D$. Аналогично для (iii). Лемма 5.4 доказана.

§ 6. Измельчение мультифорсингов

Пусть $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\varrho}$ – мультифорсинги. Скажем, что $\boldsymbol{\varrho}$ – *измельчение* мультифорсинга $\boldsymbol{\pi}$, символически $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varrho}$, когда $|\boldsymbol{\pi}| \subseteq |\boldsymbol{\varrho}|$ и $\boldsymbol{\pi}(\xi) \sqsubset \boldsymbol{\varrho}(\xi)$ для каждого ординала $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$.

Следствие 6.1 (из леммы 5.2). *Если* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varrho} \sqsubset \boldsymbol{\rho}$, *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\rho}$.

Если $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varrho}$, *то* $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})$ *открыто-плотно*[5] *в* $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\text{cw}} \boldsymbol{\varrho})$.

Наша следующая задача – приспособить определение 5.3 для мультифорсингов; причем должна быть выполнена лемма, подобная лемме 5.4.

Для начала, мы приспособим определение отношения $\subseteq^{\text{fin}}$ в § 5 для мультидеревьев. А именно, если $\boldsymbol{u}$ – мультидерево и $\boldsymbol{D}$ – множество мультидеревьев, то $\boldsymbol{u} \subseteq^{\text{fin}} \bigvee \boldsymbol{D}$ будет означать, что имеется такое конечное множество $\boldsymbol{D}' \subseteq \boldsymbol{D}$, что 1) $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|$ для всех $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{D}'$, и 2) $[\boldsymbol{u}] \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{D}'} [\boldsymbol{v}]$.

Определение 6.2. Пусть $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\varrho}$ – мультифорсинги, и $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varrho}$. Скажем, что $\boldsymbol{\varrho}$ *запирает множество* $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ *над* $\boldsymbol{\pi}$, символически $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varrho}$, когда выполнено следующее:

---

[5] Если $\boldsymbol{P} \subseteq \boldsymbol{R} \subseteq \mathbf{MT}$, то, аналогично сноске 4, множество $\boldsymbol{P}$ является: 1) *плотным* в $\boldsymbol{R}$, если $\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}\, \exists \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}\, (\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{r})$, 2) *открыто-плотным* в $\boldsymbol{R}$, если дополнительно выполнено $\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}\, \forall \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}\, (\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{r} \Longrightarrow \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R})$, и 3) *предплотным* в $\boldsymbol{R}$, если $\boldsymbol{P}' = \{\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R} : \exists \boldsymbol{p} \in \boldsymbol{P}\, (\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{p})\}$ плотно в $\boldsymbol{R}$.

($*$) если $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})$, $|\boldsymbol{u}| \subseteq |\boldsymbol{\pi}|$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{p}| = \varnothing$, то имеется такое $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, что $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, все еще $|\boldsymbol{q}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, и $\boldsymbol{u} \subseteq^{\text{fin}} \bigvee \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$, где

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|} = \{\boldsymbol{u}' \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})\colon |\boldsymbol{u}'| = |\boldsymbol{u}| \text{ и } \boldsymbol{u}' \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}\}.$$

Заметим, что если $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{q}$ таковы, как указано, то $\boldsymbol{u} \cup \boldsymbol{q} \subseteq^{\text{fin}} \bigvee \boldsymbol{D}'$, где $\boldsymbol{D}' = \{\boldsymbol{u}' \cup \boldsymbol{q}\colon \boldsymbol{u}' \in \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}\} \subseteq \boldsymbol{D}$. Определение $\sqsubset_{\boldsymbol{D}}$ в 6.2 несколько отличается и выглядит более сложным, чем определение $\sqsubset_D$ в 5.3; это отражает тот факт, что произведения форсингов из $\mathbf{AF}$ с конечной базой ведут себя по-другому (и более сложно), чем одиночные арбореальные форсинги. Соответственно, следующая лемма, подобная лемме 5.4, несколько менее очевидна.

Лемма 6.3. *Пусть $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\varrho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ – мультифорсинги, и $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. Тогда*

(i) *если $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varrho}$, то $\boldsymbol{D}$ плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ и предплотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\text{cw}} \boldsymbol{\varrho})$;*

(ii) *если $\boldsymbol{\pi}$ регулярен, $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}_i} \boldsymbol{\varrho}$ для $i = 1, \dots, n$, все множества $\boldsymbol{D}_i \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ открыто-плотны в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, и $\boldsymbol{D} = \bigcap_i \boldsymbol{D}_i$, то $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varrho}$;*

(iii) *если $\boldsymbol{D}$ открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ и $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varrho} \sqsubset \boldsymbol{\sigma}$, то $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\sigma}$;*

(iv) *если $\langle \boldsymbol{\pi}_{\alpha\alpha<\lambda} \rangle$ является $\sqsubset$-возрастающей последовательностью в $\mathbf{MF}$, $0 < \mu < \lambda$, $\boldsymbol{\pi} = \bigcup^{\text{cw}}_{\alpha<\mu} \boldsymbol{\pi}_\alpha$, множество $\boldsymbol{D}$ открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, и $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\pi}_\mu$, то $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varrho} = \bigcup^{\text{cw}}_{\mu \leqslant \alpha < \lambda} \boldsymbol{\pi}_\alpha$.*

Доказательство. (i) Для проверки предплотности $\boldsymbol{D}$ в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\text{cw}} \boldsymbol{\varrho})$, пусть $\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\text{cw}} \boldsymbol{\varrho})$. Поскольку $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\text{cw}} \boldsymbol{\varrho})$ является произведением, можно предполагать, что $|\boldsymbol{r}| \subseteq |\boldsymbol{\pi}|$. Положим

$$X = \{\xi \in |\boldsymbol{r}|\colon T^{\boldsymbol{r}}_\xi \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})\}, \qquad Y = \{\xi \in |\boldsymbol{r}|\colon T^{\boldsymbol{r}}_\xi \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})\}.$$

Тогда $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{u} \cup \boldsymbol{p}$, где $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r} \restriction X \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})$, $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \restriction Y \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. Раз $\boldsymbol{\varrho}$ запирает $\boldsymbol{D}$, имеется мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, для которого $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, $|\boldsymbol{q}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, и $\boldsymbol{u} \subseteq^{\text{fin}} \bigvee \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$. Легко видеть, что найдется мультидерево $\boldsymbol{u}' \in \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$, совместное с $\boldsymbol{u}$ в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})$. Пусть $\boldsymbol{w} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})$, $\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w} \leqslant \boldsymbol{u}'$, $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}'| = |\boldsymbol{u}|$. Тогда мультидерево $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \vee \boldsymbol{\varrho})$ удовлетворяет $\boldsymbol{r}' \leqslant \boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}' \leqslant \boldsymbol{u}' \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}$.

Для проверки плотности $\boldsymbol{D}$ в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, пусть $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. Положим $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\Lambda}$ (пустое мультидерево) в ($*$) определения 6.2, так что $|\boldsymbol{u}| = \varnothing$ и $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|} = \boldsymbol{D}$.

(ii) Пусть $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})$, $|\boldsymbol{u}| \subseteq |\boldsymbol{\pi}|$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{p}| = \varnothing$. Итерируя ($*$) для множеств $\boldsymbol{D}_i$, $i = 1, \dots, n$, мы находим такое мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, что $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, $|\boldsymbol{q}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, и $\boldsymbol{u} \subseteq^{\text{fin}} \bigvee (\boldsymbol{D}_i)_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$ для всех i, где

$$(\boldsymbol{D}_i)_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|} = \{\boldsymbol{u}' \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})\colon |\boldsymbol{u}'| = |\boldsymbol{u}| \text{ и } \boldsymbol{u}' \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}_i\}.$$

Существуют такие конечные множества $U_i \subseteq (\boldsymbol{D}_i)_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$, что $[\boldsymbol{u}] \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{v} \in U_i} [\boldsymbol{v}]$ для всех i. Согласно регулярности и следствию 4.3, мы получаем такое конечное $W \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, что $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}|$ для всех $\boldsymbol{w} \in W$, $\bigcap_i \bigcup_{\boldsymbol{v} \in U_i} [\boldsymbol{v}] = \bigcup_{\boldsymbol{w} \in W} [\boldsymbol{w}]$, и если $i = 1, \dots, n$ и $\boldsymbol{w} \in W$, то $[\boldsymbol{w}] \subseteq [\boldsymbol{v}]$ для какого-то $\boldsymbol{v} \in U_i$ – поэтому $\boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}_i$. Отсюда следует $\boldsymbol{w} \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}$ для всех $\boldsymbol{w} \in W$, поэтому $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$, откуда $W \subseteq \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$. Но $[\boldsymbol{u}] \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{w} \in W} [\boldsymbol{w}]$ по выбору W. Поэтому $\boldsymbol{u} \subseteq^{\text{fin}} \bigvee \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$.

(iii) Имеем $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\sigma}$ по следствию 6.1. Для проверки, что $\boldsymbol{\sigma}$ запирает $\boldsymbol{D}$ над $\boldsymbol{\pi}$, пусть $\boldsymbol{u} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\sigma})$, $|\boldsymbol{u}| \subseteq |\boldsymbol{\pi}|$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{p}| = \varnothing$. Раз $\boldsymbol{\varrho} \sqsubset \boldsymbol{\sigma}$, имеется такое конечное $U \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})$, что $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|$ для всех $\boldsymbol{v} \in U$, и $[\boldsymbol{u}] \subseteq$

$\bigcup_{\boldsymbol{v}\in U}[\boldsymbol{v}]$. А поскольку $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varrho}$, итерированное применение определения 6.2, $(*)$ дает мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, для которого $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, $|\boldsymbol{q}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, и если $\boldsymbol{v} \in U$, то $\boldsymbol{v} \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigvee \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$, где

$$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|} = \{\boldsymbol{v}' \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})\colon |\boldsymbol{v}'| = |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}| \wedge \boldsymbol{v}' \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}\}.$$

При этом $\boldsymbol{u} \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigvee U$ по построению, откуда имеем $\boldsymbol{u} \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigvee \boldsymbol{D}_{\boldsymbol{q}}^{|\boldsymbol{u}|}$.

(iv) Проверим, что $\boldsymbol{\varrho}$ запирает $\boldsymbol{D}$ над $\boldsymbol{\pi}$. Пусть $\boldsymbol{u} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varrho})$, $|\boldsymbol{u}| \subseteq |\boldsymbol{\pi}|$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{p}| = \varnothing$. Найдется такое конечное $U \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}_\mu)$, что $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|$ для всех $\boldsymbol{v} \in U$, и $[\boldsymbol{u}] \subseteq \bigcup_{\boldsymbol{v}\in U}[\boldsymbol{v}]$. И так далее, как в доказательстве (iii). Лемма 6.3 доказана.

§ 7. Генерическое измельчение мультифорсинга по Йенсену

Здесь излагается конструкция измельчений при помощи техники расщепления/слияния. Эта конструкция первоначально применялась как метод построения совершенных множеств в польских пространствах. Йенсен модифицировал ее в [19] для построения измельчений определенных счетных субфорсингов форсинга Сакса. Наше следующее определение вводит по сути вариант йенсеновских измельчений, подходящий для произведений арбореальных форсингов и мультифорсингов. Коль скоро мы имеем дело с произведениями с *конечной* базой (см. замечание 4.1), обычная техника теории произведений форсинга Сакса со счетной базой, как, например, в [36] или [37]–[39], нуждается в определенной корректировке. Понятие *системы* в следующем определении вводит подходящие изменения в инструментариум конструкции расщепления/слияния. То, что бесконечные произведения форсингов йенсенова типа, с конечной базой, удовлетворяют CCC, сохраняют кардиналы (в отличие от произведений форсинга Сакса с конечной базой), и допускают подходящий вариант техники расщепления/слияния, было установлено в [22], [23].

Определение 7.1. Пусть $\boldsymbol{\pi} = \langle \mathbb{P}_\xi \rangle_{\xi\in|\boldsymbol{\pi}|}$ – малый мультифорсинг.

(0) Назовем $\boldsymbol{\pi}$-*системой* любое индексированное множество вида

$$\varphi = \langle T^{\varphi}_{\xi k} \rangle_{\langle \xi,k\rangle \in |\varphi|},$$

где $|\varphi| \subseteq |\boldsymbol{\pi}| \times \omega$ конечно и $T^{\varphi}_{\xi k} = \varphi(\xi,k) \in \bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}_\xi$ для всех ξ, k. (Напомним, что $\bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}_\xi$ включает все конечные объединения деревьев из $\mathbb{P}_\xi$.) Множество $\mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$ всех $\boldsymbol{\pi}$-систем упорядочим покомпонентно: $\varphi \leqslant \psi$ (φ продолжает ψ), когда $|\psi| \subseteq |\varphi|$ и $T^{\varphi}_{\xi k} \subseteq T^{\psi}_{\xi k}$ для всех $\langle \xi,k\rangle \in |\psi|$. Множество $\omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$ упорядочено так, что $\langle n,\varphi\rangle \preccurlyeq \langle m,\psi\rangle$, когда $|\psi| \subseteq |\varphi|$ и $\langle n, T^{\varphi}_{\xi k}\rangle \preccurlyeq \langle m, T^{\psi}_{\xi k}\rangle$ в $\omega \times \mathbf{PT}$ (§ 3) для всех ξ, k; это влечет $m \leqslant n$.

(1) Пусть $\mathfrak{M} \in \mathrm{HC}$ – любое множество[6]. Множество $\mathfrak{M}^+$ всех множеств $X \in \mathrm{HC}$, $\in$-определимых в HC формулами с параметрами из $\mathfrak{M}$, счетно. Следовательно, существует $\preccurlyeq$-убывающая последовательность $\Phi = \langle \langle n_j, \varphi_j\rangle \rangle_{j<\omega}$ пар $\langle n_j, \varphi_j\rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, $\mathfrak{M}^+$-*генерическая* в смысле, что она пересекает все

[6]Напомним, что HC = все *наследственно счетные* множества, т.е. те, транзитивные замыкания которых не более чем счетны.

множества $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, открыто-плотные[7] в $\omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$. Фиксируем одну такую $\mathfrak{M}^+$-генерическую последовательность Φ.

По определению каждая φ_j имеет вид $\varphi_j = \langle T^{\varphi_j}_{\xi k} \rangle_{\langle \xi, k \rangle \in |\varphi_j|}$, где $|\varphi_j| \subseteq |\boldsymbol{\pi}| \times \omega$ конечно, и каждое дерево $T^{\varphi_j}_{\xi k}$ принадлежит $\bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}_\xi$. Мы имеем $n_j \to \infty$ по генеричности, так что можно предполагать, что $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ строго.

(2) Пусть $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, $k < \omega$. Согласно генеричности, существует такое число $j(\xi, k)$, что если $j \geqslant j(\xi, k)$, то $\langle \xi, k \rangle \in |\varphi_j|$, так что дерево $\varphi_j(\xi, k) = T^{\varphi_j}_{\xi k} \in \bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}_\xi$ определено, и мы имеем

$$\cdots \preccurlyeq \langle n_{j(\xi,k)+2}, T^{\varphi_{j(\xi,k)+2}}_{\xi k} \rangle \preccurlyeq \langle n_{j(\xi,k)+1}, T^{\varphi_{j(\xi,k)+1}}_{\xi k} \rangle \preccurlyeq \langle n_{j(\xi,k)}, T^{\varphi_{j(\xi,k)}}_{\xi k} \rangle,$$

причем $n_{j(\xi,k)} < n_{j(\xi,k)+1} < n_{j(\xi,k)+2} < \cdots$ строго, см. (1) выше.

(3) Тогда по лемме 3.2 каждое пересечение $\boldsymbol{Q}^\Phi_{\xi k} = \bigcap_{j \geqslant j(\xi,k)} T^{\varphi_j}_{\xi k}$ есть дерево в $\mathbf{PT}$ (необязательно в $\mathbb{P}_\xi$), и соотношение $\langle n_j, \boldsymbol{Q}^\Phi_{\xi k} \rangle \preccurlyeq \langle n_j, T^{\varphi_j}_{\xi k} \rangle$ выполнено для всех $j \geqslant j(\xi, k)$. Положим $\mathbb{Q}^\Phi_\xi = \{ \boldsymbol{Q}^\Phi_{\xi k} \restriction_s : k < \omega \wedge s \in \boldsymbol{Q}^\Phi_{\xi k} \}$.

(4) Наконец, положим $\boldsymbol{\varphi} = \langle \mathbb{Q}^\Phi_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{\pi}|}$ и $\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varphi} = \langle \mathbb{P}_\xi \cup \mathbb{Q}^\Phi_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{\pi}|}$.

(5) Всякий мультифорсинг $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}[\Phi]$, полученный этим способом из какой-то $\mathfrak{M}^+$-генерической последовательности Φ, назовем *$\mathfrak{M}$-генерическим измельчением* мультифорсинга $\boldsymbol{\pi}$.

Лемма 7.2 (из счетности $\mathfrak{M}^+$). *Если $\mathfrak{M} \in \mathrm{HC}$, то для любого малого мультифорсинга $\boldsymbol{\pi}$ существует $\mathfrak{M}$-генерическое измельчение $\boldsymbol{\varphi}$.*

Следующая теорема формулируется в предположениях и обозначениях определения 7.1. Ее цель – показать, что конструкция из определения 7.1 приносит измельчения типов $\sqsubset_D$ и $\sqsubset_{\boldsymbol{D}}$.

Теорема 7.3. *Если $\mathfrak{M} \in \mathrm{HC}$ транзитивно, а $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}[\Phi] = \langle \mathbb{Q}_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{\pi}|}$ есть $\mathfrak{M}$-генерическое измельчение малого мультифорсинга $\boldsymbol{\pi} = \langle \mathbb{P}_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{\pi}|} \in \mathfrak{M}$, то*

(i) *$\boldsymbol{\varphi}$ – малый особый мультифорсинг, $|\boldsymbol{\varphi}| = |\boldsymbol{\pi}|$, и $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varphi}$;*

(ii) *если пары $\langle \xi, k \rangle \neq \langle \eta, \ell \rangle$ принадлежат $|\boldsymbol{\pi}| = |\boldsymbol{\varphi}|$, то $[\boldsymbol{Q}^\Phi_{\xi k}] \cap [\boldsymbol{Q}^\Phi_{\eta \ell}] = \varnothing$;*

(iii) *если $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, $S \in \mathbb{Q}_\xi$ и $T \in \mathbb{P}_\xi$, то $[S] \cap [T]$ открыто-замкнуто в $[S]$ и $T \not\subseteq S$, а значит $\mathbb{Q}_\xi \cap \mathbb{P}_\xi = \varnothing$;*

(iv) *если $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, то множество $\mathbb{Q}_\xi$ открыто-плотно в $\mathbb{Q}_\xi \cup \mathbb{P}_\xi$;*

(v) *если $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$ и $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}_\xi$ предплотно в $\mathbb{P}_\xi$, то $\mathbb{P}_\xi \sqsubset_D \mathbb{Q}_\xi$;*

(vi) *если, кроме того, $\boldsymbol{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha < \lambda} \boldsymbol{\pi}_\alpha$, где $\lambda < \omega_1$, а $\langle \boldsymbol{\pi}_\alpha \rangle_{\alpha < \lambda} \in \mathfrak{M}$ является $\sqsubset$-возрастающей последовательностью особых мультифорсингов, то $\boldsymbol{\pi}_\alpha \sqsubset \boldsymbol{\varphi}$ для всех $\alpha < \lambda$.*

Доказательство. Мы рассуждаем в обозначениях определения 7.1.

(ii) Согласно следствию 3.7, (iii), множество D всех пар $\langle n, \varphi \rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, где φ – попарно пд система и $|\varphi|$ содержит $\langle \xi, k \rangle$, $\langle \eta, \ell \rangle$, плотно в $\omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, и, конечно, $D \in \mathfrak{M}^+$. Имеем $\langle n_j, \varphi_j \rangle \in D$ для какого-то $j < \omega$. Тогда $T^{\varphi_j}_{\xi k} \cap T^{\varphi_j}_{\eta \ell} = \varnothing$, так как φ_j пд. Но $\boldsymbol{Q}^\Phi_{\xi k} \subseteq T^{\varphi_j}_{\xi k}$, $\boldsymbol{Q}^\Phi_{\eta \ell} \subseteq T^{\varphi_j}_{\eta \ell}$ по построению.

(iii) Пусть $S = \boldsymbol{Q}^\Phi_{\xi k}$. Для вывода открыто-замкнутости, заметим, что множество $D(T)$ всех таких пар $\langle n, \varphi \rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, что $\langle \xi, k \rangle \in |\varphi|$ и если $s \in 2^n$,

[7] Плотность означает, что для любой пары $\langle m, \psi \rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$ имеется $\langle n, \varphi \rangle \in D$ с $\langle n, \varphi \rangle \preccurlyeq \langle m, \psi \rangle$. Открытость означает, что если $\langle m, \psi \rangle \in D$ и $\langle n, \varphi \rangle \preccurlyeq \langle m, \psi \rangle$ то $\langle n, \varphi \rangle \in D$.

то $T^{\varphi}_{\xi k}{\restriction}_s \subseteq T$ или $[T^{\varphi}_{\xi k}] \cap [T] = \varnothing$ – плотно в $\omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$. Для вывода $T \not\subseteq S$, аналогично, множество $D'(T)$ всех таких пар $\langle n, \varphi\rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, что $\langle \xi, k\rangle \in |\varphi|$ и $T \not\subseteq T^{\varphi}_{\xi k}$, плотно. Заметим, что $D(T), D'(T) \in \mathfrak{M}^+$, и завершаем доказательство, как выше.

(iv) Открытость легко следует из (iii). Для вывода плотности, пусть $T \in \mathbb{P}_\xi$. Множество $\Delta(T)$ всех таких пар $\langle n, \varphi\rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, что $\langle \xi, k\rangle \in |\varphi|$ и $T^{\varphi}_{\xi k} = T$ для некоторого k, принадлежит $\mathfrak{M}^+$ и плотно в $\omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$.

(i) По построению множества $\boldsymbol{\varphi}(\xi) = \mathbb{Q}^{\Phi}_{\xi}$ являются особыми арбореальными форсингами, так что $\boldsymbol{\varphi}$ – малый особый мультифорсинг, и $|\boldsymbol{\varphi}| = |\boldsymbol{\pi}|$. Для вывода $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varphi}$, пусть $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$. Нужно доказать $\mathbb{P}_\xi \sqsubset \mathbb{Q}_\xi$. Условие (1) определения 5.1 следует из (iv), условие (3) из (iii), а (2) выполнено, так как $\boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\xi k} \subseteq T^{\varphi_j}_{\xi k} \in \bigcup^{\mathrm{fin}} \mathbb{P}_\xi$ для какого-то j.

(v) Пусть $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, $k < \omega$, а $D \in \mathfrak{M}^+$ предплотно в $\mathbb{P}_\xi$. Тогда множество $D' = \{T \in \mathbb{P}_\xi \colon \exists\, S \in D(T \subseteq S)\}$ открыто-плотно в $\mathbb{P}_\xi$, а потому множество $\Delta \in \mathfrak{M}^+$ всех таких пар $\langle n, \varphi\rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, что $\langle \xi, k\rangle \in |\varphi|$ и $T^{\varphi}_{\xi k}{\restriction}_s \in D'$ для всех $s \in 2^n \cap T^{\varphi}_{\xi k}$, плотно в $\omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$ по лемме 3.6. Следовательно, $\langle n_j, \varphi_j\rangle \in \Delta$ для какого-то j, откуда и следует $\boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\xi k} \subseteq T^{\varphi_j}_{\xi k} \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D$.

(vi) Нужно доказать, что $\boldsymbol{\pi}_\alpha(\xi) \sqsubset \boldsymbol{\varphi}(\xi)$ при $\xi \in |\boldsymbol{\pi}_\alpha|$. Раз $\boldsymbol{\pi}(\xi) \sqsubset \boldsymbol{\varphi}(\xi)$ уже проверено, достаточно проверить $\boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\xi k} \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup \boldsymbol{\pi}_\alpha(\xi)$. Но $D = \boldsymbol{\pi}_\alpha(\xi)$ предплотно в $\boldsymbol{\pi}(\xi) = \mathbb{P}_\xi$ по лемме 5.2, (iv), и $D \in \mathfrak{M}^+$, и можно применить (v). Теорема 7.3 доказана.

Следствие 7.4. *В условиях леммы 7.2, если $|\boldsymbol{\pi}| \subseteq Z \subseteq \omega_1$ и Z счетно, то имеется такой малый особый мультифорсинг $\boldsymbol{\varphi}$, что $|\boldsymbol{\varphi}| = Z$ и $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varphi}$.*

Доказательство. Если $|\boldsymbol{\pi}| = Z$, то берем любое счетное $\mathfrak{M} \in \mathrm{HC}$, содержащее $\boldsymbol{\pi}$, берем $\boldsymbol{\varphi}$ по лемме 7.2 и применяем теорему 7.3. Если же $|\boldsymbol{\pi}| \subsetneqq Z$, то мы тривиально продолжаем конструкцию через $\boldsymbol{\varphi}(\xi) = \mathbb{P}_{\mathrm{coh}}$ (пример 3.4) для всех $\xi \in Z \setminus |\boldsymbol{\pi}|$. Следствие 7.4 доказано.

§ 8. Генерическое измельчение: запираем плотные множества

Здесь доказывается важное следствие $\mathfrak{M}^+$-генеричности измельчений мультифорсингов, отношение $\sqsubset_{\boldsymbol{D}}$ определения 6.2 между мультифорсингом и его измельчением, через плотное множество $\boldsymbol{D}$.

Теорема 8.1. *В предположениях теоремы 7.3, если $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{M}^+$, $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, и $\boldsymbol{D}$ открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, то $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varphi}$.*

Доказательство. По условию $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}[\Phi]$ получено из убывающей $\mathfrak{M}^+$-генерической последовательности Φ пар $\langle n_j, \varphi_j\rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, как в определении 7.1, (1). Рассуждаем в обозначениях 7.1. Пусть $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varphi})$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{p}| = \varnothing$, как в $(*)$ определения 6.2; дополнительное условие $|\boldsymbol{u}| \subseteq |\boldsymbol{\pi}|$ выполнено автоматически, так как $|\boldsymbol{\varphi}| = |\boldsymbol{\pi}|$. Требуется найти мультидерево $\boldsymbol{q}$, дающее 6.2, $(*)$ для $\boldsymbol{u}$.

Каждый член $T^{\boldsymbol{u}}_\xi$ в $\boldsymbol{u}$ $(\xi \in |\boldsymbol{u}|)$ тождествен какому-то $\boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\xi, k_\xi}{\restriction}_{t_\xi}$, где $t_\xi \in \boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\xi, k_\xi}$. Можно предполагать, что $t_\xi = \Lambda$, так что $T^{\boldsymbol{u}}_\xi = \boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\xi, k_\xi}$, $\forall\, \xi$.

Определение 8.2. Если $n < \omega$, то $\mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$ содержит все такие системы $\varphi \in \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, что $\langle \xi, k_\xi \rangle \in |\varphi|$ для всех $\xi \in |\boldsymbol{u}|$, и $T^{\varphi}_{\xi k}{\restriction}_t \in \mathbb{P}_\xi = \boldsymbol{\pi}(\xi)$ (а не только $\in \bigcup^{\text{fin}} \mathbb{P}_\xi$!) для всех $\langle \xi, k \rangle \in |\varphi|$ и $t \in 2^n \cap T^{\varphi}_{\xi k}$.

Если $\varphi \in \mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$, то $\mathbf{S}^n_\varphi$ содержит все такие мультикортежи $\mathbf{s} = \langle s_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{u}|}$, что $s_\xi \in 2^n \cap T^{\varphi}_{\xi, k_\xi}$ для всех $\forall\, \xi \in |\boldsymbol{u}|$. Если $\mathbf{s} = \langle s_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{u}|} \in \mathbf{S}^n_\varphi$, то определим $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\varphi \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ так, что $|\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\varphi| = |\boldsymbol{u}|$ и $T^{\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\varphi}_\xi = T^{\varphi}_{\xi, k_\xi}{\restriction}_{s_\xi}$ для всех $\xi \in |\boldsymbol{u}|$.

Лемма 8.3. *Пусть $n < \omega$ и $\varphi \in \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$. Существует система $\psi \in \mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$, для которой $\langle n, \psi \rangle \preccurlyeq \langle n, \varphi \rangle$.*

Доказательство. Добавим каждую отсутствующую пару $\langle \xi, k_\xi \rangle \notin |\varphi|$ к $|\psi|$, доопределяя $T^{\psi}_{\xi, k_\xi} \in \mathbb{P}_\xi$ произвольно. Если $\langle \xi, k \rangle \in |\psi|$ и $t \in 2^n \cap T^{\psi}_{\xi k}$, но $T^{\psi}_{\xi k}{\restriction}_t \in \bigcup^{\text{fin}} \mathbb{P}_\xi \setminus \mathbb{P}_\xi$, сузим $T^{\psi}_{\xi k}$ до дерева из $\mathbb{P}_\xi$ по лемме 3.7, (i), и сделаем так для каждой такой тройки ξ, k, t. Лемма 8.3 доказана.

Лемма 8.4. *Если $\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $|\boldsymbol{r}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, то множество $\Delta_{\boldsymbol{r}} \in \mathfrak{M}$ всех пар $\langle n, \varphi \rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, для которых $\varphi \in \mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$ и имеется такое $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, что $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{r}$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{q}| = \varnothing$, и выполнено* (1), *если $\mathbf{s} \in \mathbf{S}^n_\varphi$, то $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\varphi \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}$ – плотно в $\omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$.*

Доказательство. Пусть $\langle n, \psi \rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$. Мы найдем такую пару $\langle n, \varphi \rangle \in \Delta_{\boldsymbol{r}}$ (с тем же n!), что $\langle n, \varphi \rangle \preccurlyeq \langle n, \psi \rangle$. Не ограничивая общности предполагаем, что $\psi \in \mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$ согласно лемме 8.3.

Пусть $\mathbf{s} = \langle s_\xi \rangle_{\xi \in |\boldsymbol{u}|} \in \mathbf{S}^n_\psi$. Рассмотрим мультидерево $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\psi \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. Раз $\boldsymbol{D}$ плотно, найдутся такие мультидеревья $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, что $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|$, $\boldsymbol{v} \leqslant \boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\psi$, $|\boldsymbol{r}'| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, $\boldsymbol{r}' \leqslant \boldsymbol{r}$, и $\boldsymbol{v} \cup \boldsymbol{r}' \in \boldsymbol{D}$. Определим систему $\psi' \in \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$ с $|\psi'| = |\psi|$, продолжающую ψ сужением каждого дерева $T^{\psi}_{\xi, k_\xi}{\restriction}_{s_\xi}$ до $T^{\boldsymbol{v}}_\xi$, так, что $T^{\psi'}_{\xi, k_\xi}{\restriction}_{s_\xi} = T^{\boldsymbol{v}}_\xi$, но $T^{\psi'}_{\xi, k_\xi}{\restriction}_t = T^{\psi}_{\xi, k_\xi}{\restriction}_t$ для всех $t \in 2^n \cap T^{\psi}_{\xi, k_\xi}$, $t \neq s_\xi$, и $T^{\psi'}_{\eta k} = T^{\psi}_{\eta k}$, когда $\langle \eta, k \rangle \in |\psi|$ не имеет вида $\langle \xi, k_\xi \rangle$, где $\xi \in |\boldsymbol{u}|$. Мы имеем $\langle n, \psi' \rangle \preccurlyeq \langle n, \psi \rangle$ по построению, поэтому $\mathbf{S}^n_{\psi'} = \mathbf{S}^n_\psi$.

Это построение можно итерировать, рассматривая все кортежи $\mathbf{s} \in \mathbf{S}^n_\psi$ один за одним. В результате получается такая система $\varphi \in \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, что $|\varphi| = |\psi|$ и $\langle n, \varphi \rangle \preccurlyeq \langle n, \psi \rangle$, – а тогда $\mathbf{S}^n_\varphi = \mathbf{S}^n_\psi$, и такое мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ с $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{r}$ и $|\boldsymbol{q}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, что если $\mathbf{s} \in \mathbf{S}^n_\psi$, то мультидерево $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\psi$ удовлетворяет $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\psi \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}$. Это $\boldsymbol{q}$ свидетельствует, что $\langle n, \varphi \rangle \in \Delta_r$. Лемма 8.4 доказана.

По лемме имеем $\langle n_j, \varphi_j \rangle \in \Delta_{\boldsymbol{p}}$ для какого-то j. Пусть это обеспечивается мультидеревом $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, так что $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{q}| = \varnothing$, и выполнено условие (1) леммы 8.4 для $n = n_j$, $\varphi = \varphi_j$. Отсюда легко следует $[\boldsymbol{u}] \subseteq \bigcup_{\mathbf{s} \in \mathbf{S}^n_{\varphi_j}} [\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_{\varphi_j}]$. Однако $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_{\varphi_j} \in \boldsymbol{D}^{|\boldsymbol{u}|}_{\boldsymbol{q}}$ $\forall\, \mathbf{s}$, согласно (1). Теорема 8.1 доказана.

Следствие 8.5. *В предположениях теоремы 7.3, если множество $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{M}$, $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ предплотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, то оно предплотно и в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\text{cw}} \boldsymbol{\varrho})$.*

Доказательство. Предполагаем без потери общности, что $\boldsymbol{D}$ открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. (Иначе рассматриваем множество $\boldsymbol{D}' = \{\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \colon \exists\, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}\, (\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q})\}$.) Тогда $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varrho}$ по теореме 8.1; далее используем лемму 6.3, (i). Следствие доказано.

§ 9. Имена точек и прямое вынуждение

Наша очередная цель: ввести подходящие обозначения, относящиеся к именам точек в 2^ω в контексте форсингов вида $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$.

Определение 9.1. *Имя точки* есть любое такое множество $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT} \times (\omega \times 2)$, что множества $K^{\mathbf{c}}_{ni} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT} \colon \langle \boldsymbol{p}, n, i\rangle \in \mathbf{c}\}$ удовлетворяют условию: если $n < \omega$ и $\boldsymbol{p} \in K^{\mathbf{c}}_{n0}$, $\boldsymbol{q} \in K^{\mathbf{c}}_{n1}$, то $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ являются гпд[8]. Положим $K^{\mathbf{c}}_n = K^{\mathbf{c}}_{n0} \cup K^{\mathbf{c}}_{n1}$.

Имя точки $\mathbf{c}$ называется *малым*, если каждое $K^{\mathbf{c}}_n$ не более чем счетно, – тогда множество $|\mathbf{c}| = \bigcup_n \bigcup_{\boldsymbol{p} \in K^{\mathbf{c}}_n} |\boldsymbol{p}|$ и само $\mathbf{c}$ также счетны.

Пусть $\boldsymbol{\pi}$ – мультифорсинг. Имя точки $\mathbf{c}$ называется $\boldsymbol{\pi}$-*полным*, если каждое множество $K^{\mathbf{c}}_n \uparrow \boldsymbol{\pi} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \colon \exists\, \boldsymbol{q} \in K^{\mathbf{c}}_n\, (\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q})\}$ ($\boldsymbol{\pi}$-конус $K^{\mathbf{c}}_n$) предплотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. В этом случае если множество (фильтр) $G \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ является $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$-генерическим над семейством всех множеств $K^{\mathbf{c}}_n$, то мы определяем точку $\mathbf{c}[G] \in 2^\omega$ так, что $\mathbf{c}[G](n) = i$ если и только если $G \cap C_{ni} \neq \varnothing$.

Мы не требуем в последнем случае, чтобы выполнялось $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \times (\omega \times 2)$, или, эквивалентно, $K^{\mathbf{c}}_n \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ для всех n, и если это соотношение выполнено, то это будет оговариваться.

Пусть $\mathbf{c}$ – имя точки в смысле 9.1. Определим, что мультидерево $\boldsymbol{p}$:

– *прямо вынуждает* $\mathbf{c}(n) = i$, где $n < \omega$ и $i = 0, 1$, если имеется мультидерево $\boldsymbol{q} \in K^{\mathbf{c}}_{ni}$, для которого $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q}$;

– *прямо вынуждает* $s \subset \mathbf{c}$, где $s \in 2^{<\omega}$, если для любого $n < \mathrm{lh}(s)$, $\boldsymbol{p}$ прямо вынуждает $\mathbf{c}(n) = i$, где $i = s(n)$;

– *прямо вынуждает* $\mathbf{c} \notin [T]$, где $T \in \mathbf{PT}$, когда имеется такой кортеж $s \in 2^{<\omega} \setminus T$, что $\boldsymbol{p}$ прямо вынуждает $s \subset \mathbf{c}$.

Определение прямого вынуждения не связано непосредственно ни с каким конкретным мультифорсингом, но фактически совместимо с любым из них.

Лемма 9.2. *Пусть* $\boldsymbol{\pi}$ *– мультифорсинг,* $\mathbf{c}$ *есть* $\boldsymbol{\pi}$*-полное имя точки,* $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. *Если* $n < \omega$, *то найдется* $i = 0, 1$ *и мультидерево* $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}), \boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, *прямо вынуждающее* $\mathbf{c}(n) = i$. *Если* $T \in \mathbf{PT}$, *то найдется* $s \in T$ *и мультидерево* $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, *которое прямо вынуждает* $\mathbf{c} \notin [T{\restriction}_s]$.

Доказательство. Для вывода первого утверждения используем плотность множеств $K^{\mathbf{c}}_n$ по определению 9.1. Для второго утверждения возьмем такое n, что $T \cap 2^n$ содержит не менее двух кортежей. По первому утверждению имеются такие мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, и кортеж $t \in T \cap 2^n$, что $\boldsymbol{q}$ прямо вынуждает $t \subset \mathbf{c}$. Остается взять любое $s \in T \cap 2^n$, $s \neq t$. Лемма доказана.

§ 10. Запирание имен точек и избегающие измельчения

Следующее определение распространяет определение 6.2 на имена точек.

Определение 10.1. Пусть $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\varrho}$ – мультифорсинги, $\mathbf{c}$ есть $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки и $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varrho}$. Скажем, что $\boldsymbol{\varrho}$ *запирает* $\mathbf{c}$ *над* $\boldsymbol{\pi}$, символически $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho}$, если

[8]Напомним, что условие где-то почти дизъюнктности гпд (определение 4.2) равносильно несовместности $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$ в $\mathbf{MT}$ и в любом множестве вида $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, где $\boldsymbol{\pi}$ – регулярный мультифорсинг согласно следствию 4.3.

$\boldsymbol{\varrho}$ запирает каждое множество $K_n^{\mathbf{c}} \uparrow \boldsymbol{\pi} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \colon \exists\, \boldsymbol{q} \in K_n^{\mathbf{c}}\, (\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q})\}$ над $\boldsymbol{\pi}$, в смысле определения 6.2.

Следствие 10.2. *В предположениях теоремы 7.3, если* $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}^+$ *и* $\mathbf{c}$ *есть* $\boldsymbol{\pi}$*-полное имя точки, то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho}$.

Доказательство. Каждое множество $K_n^{\mathbf{c}} \uparrow \boldsymbol{\pi}$ принадлежит $\mathfrak{M}^+$ (вместе с $\boldsymbol{\pi}$ и $\mathbf{c}$) и открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, так что остается применить теорему 8.1. Следствие доказано.

Лемма 10.3. *Пусть* $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\sigma}$ *– мультифорсинги, а* $\mathbf{c}$ *есть имя точки. Тогда*

(i) *если* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho}$, *то* $\mathbf{c}$ *есть* $\boldsymbol{\pi}$*-полное и* $(\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varrho})$*-полное имя точки*;

(ii) *если* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho} \sqsubset \boldsymbol{\sigma}$, *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\sigma}$;

(iii) *если* $\langle \boldsymbol{\pi}_{\alpha\alpha<\lambda} \rangle$ *–* $\sqsubset$*-возрастающая последовательность в* $\mathbf{MF}$, $0 < \mu < \lambda$, $\boldsymbol{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\mu} \boldsymbol{\pi}_\alpha$, *и* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\pi}_\mu$, *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\mu\leqslant\alpha<\lambda} \boldsymbol{\pi}_\alpha$.

Доказательство. (i) По определению имеем $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{K_n^{\mathbf{c}}\uparrow\boldsymbol{\pi}} \boldsymbol{\varrho}$ для любого n, поэтому $K_n^{\mathbf{c}} \uparrow \boldsymbol{\pi}$ плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ (тогда, очевидно, открыто-плотно) и предплотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varrho})$ по лемме 6.3, (i). Значит, $K_n^{\mathbf{c}} \uparrow (\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varrho})$ плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varrho})$.

Для вывода (ii), (iii) используем (iii), (iv) леммы 6.3.

Лемма доказана.

Если $\boldsymbol{\pi}$ – мультифорсинг, то $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ присоединяет набор *главных генерических точек* $x_\xi = x_\xi[G] \in 2^\omega$, $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, каждая из которых является $\boldsymbol{\pi}(\xi)$-генерической над исходным универсумом множеств, см. замечание 4.5. Понятно, что присоединяются и другие точки. Имея $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки $\mathbf{c}$, можно установить разные требования, чтобы "условие" $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ вынуждало, что $\mathbf{c}$ – имя точки вида $x_{\xi k}$, или вынуждало обратное. Следующее определение вводит такое требование, именно для "обратного" направления.

Определение 10.4. Пусть $\boldsymbol{\pi}$ – мультифорсинг, $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$. Имя точки $\mathbf{c}$ назовем *неглавным над* $\boldsymbol{\pi}$ *в* ξ, если следующее множество:

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{c}}^{\xi}(\boldsymbol{\pi}) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \colon \xi \in |\boldsymbol{p}| \wedge \boldsymbol{p} \text{ прямо вынуждает } \mathbf{c} \notin [T_\xi^{\boldsymbol{p}}]\}$$

открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$.

Мы докажем ниже (теорема 12.2, (i)), что неглавность влечет, что $\mathbf{c}$ не есть имя точки $x_\xi[\underline{G}]$. И далее, мы покажем, что условие избегания в следующем определении влечет, что $\mathbf{c}$ – имя негенерической точки.

Определение 10.5. Пусть $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\varrho}$ – мультифорсинги, $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varrho}$, $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$. Скажем, что $\boldsymbol{\varrho}$ *избегает имя точки* $\mathbf{c}$ *над* $\boldsymbol{\pi}$ *в* ξ, символически $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_\xi^{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho}$, если для каждого $Q \in \boldsymbol{\varrho}(\xi)$, $\boldsymbol{\varrho}$ запирает множество

$$\boldsymbol{D}(\mathbf{c}, Q, \boldsymbol{\pi}) = \{\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \colon \xi \in |\boldsymbol{r}| \wedge \boldsymbol{r} \text{ прямо вынуждает } \mathbf{c} \notin [Q]\},$$

над $\boldsymbol{\pi}$ в смысле определения 6.2, т. е. формально $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}(\mathbf{c},Q,\boldsymbol{\pi})} \boldsymbol{\varrho}$.

Лемма 10.6. *Пусть* $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\varrho}$, $\boldsymbol{\sigma}$ *– мультифорсинги,* $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, *и* $\mathbf{c}$ *есть* $\boldsymbol{\pi}$*-полное имя точки. Тогда*

(i) *если* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_\xi^{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho}$ *и* $Q \in \boldsymbol{\varrho}(\xi)$, *то множество* $\boldsymbol{D}(\mathbf{c}, Q, \boldsymbol{\pi})$ *открыто-плотно в* $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ *и предплотно в* $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varrho})$;

(ii) *если* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset^{\mathbf{c}}_{\xi} \boldsymbol{\varphi} \sqsubset \boldsymbol{\sigma}$, *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset^{\mathbf{c}}_{\xi} \boldsymbol{\sigma}$;

(iii) *если* $\langle \boldsymbol{\pi}_{\alpha\alpha<\lambda}\rangle$ *есть* $\sqsubset$*-возрастающая последовательность в* $\mathbf{MF}$, $0 < \mu < \lambda$, $\boldsymbol{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\mu} \boldsymbol{\pi}_{\alpha}$, *и* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset^{\mathbf{c}}_{\xi} \boldsymbol{\pi}_{\mu}$, *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset^{\mathbf{c}}_{\xi} \boldsymbol{\varphi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\mu\leqslant\alpha<\lambda} \boldsymbol{\pi}_{\alpha}$.

Доказательство. (i) Используем лемму 6.3, (i). Для доказательства (ii) пусть $S \in \boldsymbol{\sigma}(\xi)$. Коль скоро $\boldsymbol{\varphi} \sqsubset \boldsymbol{\sigma}$, найдется конечное множество $\{Q_1,\dots,Q_m\} \subseteq \boldsymbol{\varphi}(\xi)$, для которого $S \subseteq Q_1 \cup \dots \cup Q_m$. Имеем $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}(\mathbf{c},Q_i,\boldsymbol{\pi})} \boldsymbol{\varphi}$ для всех i, так как $\boldsymbol{\pi} \sqsubset^{\mathbf{c}}_{\xi} \boldsymbol{\varphi}$. Значит, $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}(\mathbf{c},Q_i,\boldsymbol{\pi})} \boldsymbol{\sigma}$, $\forall i$ по лемме 6.3, (iii). Однако $\bigcap_i \boldsymbol{D}(\mathbf{c},Q_i,\boldsymbol{\pi}) \subseteq \boldsymbol{D}(\mathbf{c},S,\boldsymbol{\pi})$, поскольку $S \subseteq \bigcup_i Q_i$. Мы заключаем, что $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}(\mathbf{c},S,\boldsymbol{\pi})} \boldsymbol{\sigma}$ по лемме 6.3, (ii). Отсюда $\boldsymbol{\pi} \sqsubset^{\mathbf{c}}_{\xi} \boldsymbol{\sigma}$, что и требовалось.

Для вывода (iii) используем лемму 6.3, (iv) аналогичным образом.

Лемма доказана.

§ 11. Генерическое измельчение: запираем неглавные имена

Согласно следующей теореме, генерические измельчения, как в § 7, избегают неглавные имена. Это напоминает теорему 8.1 до некоторой степени, однако последняя прямо не применима здесь, поскольку мультидерево Q и множество $\boldsymbol{D}(\mathbf{c},Q,\boldsymbol{\pi})$ зависят от $\boldsymbol{\varphi}$, и потому множества $\boldsymbol{D}(\mathbf{c},Q,\boldsymbol{\pi})$ необязательно принадлежат к $\mathfrak{M}^+$. Однако доказательство основано на весьма похожих рассуждениях.

Теорема 11.1. *В предположениях теоремы* 7.3, *если* $\eta \in |\boldsymbol{\pi}| \subseteq \mathfrak{M}$ *и* $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}$ *есть* $\boldsymbol{\pi}$*-полное имя точки неглавное над* $\boldsymbol{\pi}$ *в* η, *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset^{\mathbf{c}}_{\eta} \boldsymbol{\varphi}$.

Доказательство. По условию $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}[\Phi]$ получено из убывающей $\mathfrak{M}^+$-генерической последовательности Φ пар $\langle n_j,\varphi_j\rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, как в определении 7.1, (1). Рассуждаем в обозначениях 7.1.

Пусть $Q \in \boldsymbol{\varphi}(\eta) = \mathbb{P}^{\boldsymbol{\varphi}}_{\eta}$; докажем, что $\boldsymbol{\varphi}$ запирает множество $\boldsymbol{D}(\mathbf{c},Q,\boldsymbol{\pi})$ над $\boldsymbol{\pi}$. По построению $Q = \boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\eta K}{\restriction}_s$ для каких-то $K < \omega$ и $s \in \boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\eta K}$; можно считать, что просто $Q = \boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\eta K}$. Следуя доказательству теоремы 8.1, предполагаем, что $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{u} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\varphi})$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{p}| = \varnothing$, и $T^{\boldsymbol{u}}_{\xi} = \boldsymbol{Q}^{\Phi}_{\xi,k_\xi}$, для всех $\xi \in |\boldsymbol{u}|$. Нужно найти мультидерево $\boldsymbol{q}$, которое дает 6.2, $(*)$ для $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}(\mathbf{c},Q,\boldsymbol{\pi})$. При этом η может не принадлежать множеству $|\boldsymbol{u}|$, и даже если $\eta \in |\boldsymbol{u}|$, так что k_η определено, то K может не совпадать с k_η. По ходу доказательства мы используем обозначения определения 8.2, в частности, $\mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$, $\mathbf{S}^n_{\varphi}$, $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_{\varphi}$.

Пусть $\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $|\boldsymbol{r}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$. Рассмотрим множество $\Delta_{\boldsymbol{r}} \in \mathfrak{M}$ всех таких пар $\langle n,\varphi\rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$, что $\varphi \in \mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$ (определение 8.2), $\langle \eta,K\rangle \in |\varphi|$, и существует мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, для которого $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{r}$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{q}| = \varnothing$ и

($1'$) если $\mathbf{s} \in \mathbf{S}^n_{\varphi}$ и $t \in T^{\varphi}_{\eta K} \cap 2^n$, то $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_{\varphi} \cup \boldsymbol{q}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T^{\varphi}_{\eta K}{\restriction}_t]$.

Условие ($1'$) подобно условию (1) леммы 8.4, конечно. Заметим, что прямое вынуждение формулы $\mathbf{c} \notin [Q]$ нельзя использовать в ($1'$), так как Q необязательно принадлежит $\mathfrak{M}$, но $\mathbf{c} \notin [T^{\varphi}_{\eta K}]$ оказывается эффективной заменой.

Лемма 11.2. *Если* $\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $|\boldsymbol{r}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, *то* $\Delta_{\boldsymbol{r}}$ *плотно в* $\omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$.

Доказательство. Следуем доказательству леммы 8.4. Пусть $\langle n,\psi\rangle \in \omega \times \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$. Можно предполагать, что $\psi \in \mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$ (см. лемму 8.4), так что $\langle \xi,k_\xi\rangle \in |\psi|$ для всех $\xi \in |\boldsymbol{u}|$, $T^{\psi}_{\xi k}{\restriction}_t \in \mathbb{P}_{\xi}$ для всех $\langle \xi,k\rangle \in |\psi|$ и $t \in 2^n \cap T^{\psi}_{\xi k}$, и также $\langle \eta,K\rangle \in |\psi|$.

Требуется построить такую систему $\varphi \in \mathbf{Sys}_n(\boldsymbol{\pi})$, что $\langle n, \varphi\rangle \preccurlyeq \langle n, \pi\rangle$ и $\varphi \in \Delta_r$. Как в доказательстве леммы 8.4, достаточно обеспечить $(1')$ для какой-то одной пары из $\mathbf{s} = \langle s_\xi\rangle_{\xi\in|\boldsymbol{u}|} \in \mathbf{S}^n_\psi$ и $t \in T^\psi_{\eta K} \cap 2^n$; конечная цель тогда достигается простой итерацией через все эти пары. Имеем два случая.

Случай 1. $\eta \in |\boldsymbol{u}|$, $K = k_\eta$, $t = s_\eta$. Рассмотрим мультидерево $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\psi \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. Множество $\boldsymbol{D}^\eta_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{\pi})$, как в определении 10.4, плотно из-за неглавности $\mathbf{c}$. Поэтому имеются такие мультидеревья $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, что $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|$, $\boldsymbol{v} \leqslant \boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\psi$, $|\boldsymbol{q}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{r}$, и $\boldsymbol{v} \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}^\eta_{\mathbf{c}}(\boldsymbol{\pi})$, так что $\boldsymbol{v} \cup \boldsymbol{q}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T^{\boldsymbol{q}}_\eta]$. Определим систему $\varphi \in \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$ с $|\varphi| = |\psi|$, из ψ посредством:

(a) сужения каждого дерева $T^\psi_{\xi,k_\xi}{\restriction}_{s_\xi}$ $(\xi \in |\boldsymbol{u}|)$ до $T^{\boldsymbol{v}}_\xi$, так что $T^\varphi_{\xi,k_\xi}{\restriction}_{s_\xi} = T^{\boldsymbol{v}}_\xi$,

(b) в частности, сужения $T^\psi_{\eta K}{\restriction}_t$ до $T^{\boldsymbol{v}}_\eta$, так что $T^\varphi_{\eta K}{\restriction}_t = T^{\boldsymbol{v}}_\eta$,

и более никаких изменений. Имеем $\langle n, \varphi\rangle \preccurlyeq \langle n, \psi\rangle$, $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\varphi = \boldsymbol{v}$, и $T^\varphi_{\eta K}{\restriction}_t = T^{\boldsymbol{v}}_\eta$ по построению, так что $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\varphi \cup \boldsymbol{q}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T^\varphi_{\eta K}{\restriction}_t]$, и мы имеем $(1')$.

Случай 2: не случай 1. По лемме 9.2 существуют такие мультидеревья $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ и дерево $T \in \mathbb{P}_\eta$, что $T \subseteq T^\psi_{\eta K}{\restriction}_t$, $|\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}|$, $\boldsymbol{v} \leqslant \boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\psi$, $|\boldsymbol{q}| \cap |\boldsymbol{u}| = \varnothing$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{r}$, и $\boldsymbol{v} \cup \boldsymbol{q}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T]$. Определим систему $\varphi \in \mathbf{Sys}(\boldsymbol{\pi})$ с $|\varphi| = |\psi|$, которая продолжает ψ посредством (a) и

(c) сужения $T^\psi_{\eta K}{\restriction}_t$ до T, так что $T^\varphi_{\eta K}{\restriction}_t = T$,

и более никаких изменений. Заметим, что (a) и (c) не противоречат одно другому, поскольку $\langle \eta, T, t\rangle \neq \langle \xi, k_\xi, s_\xi\rangle$ для всех $\xi \in \boldsymbol{u}$ по гипотезе случая 2). По построению имеем $\langle n, \varphi\rangle \preccurlyeq \langle n, \psi\rangle$, $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\varphi = \boldsymbol{v}$, и $T^\varphi_{\eta K}{\restriction}_t = T^{\boldsymbol{v}}_\eta$. В частности, $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_\varphi \cup \boldsymbol{q}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T^\varphi_{\eta K}{\restriction}_t]$, так что $(1')$ выполнено. Лемма доказана.

Возвращаемся к теореме. Раз $\Delta_{\boldsymbol{p}} \in \mathfrak{M}^+$, мы имеем $\langle n_j, \varphi_j\rangle \in \Delta_{\boldsymbol{p}}$ для какого-то j по лемме. Пусть это обеспечивается мультидеревом $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, так что $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, $|\boldsymbol{u}| \cap |\boldsymbol{q}| = \varnothing$, и $(1')$ выполнено для $n = n_j$, $\varphi = \varphi_j$. В частности, поскольку $T^{\varphi_j}_{\eta K} = \bigcup_{t\in T^{\varphi_j}_{\eta K}\cap 2^n} T^{\varphi_j}_{\eta K}{\restriction}_t$, мультидерево $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_{\varphi_j} \cup \boldsymbol{q}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T^{\varphi_j}_{\eta K}]$ для всех $\mathbf{s} \in \mathbf{S}^n_{\varphi_j}$, следовательно, также прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [Q]$, так как $Q = \boldsymbol{Q}^\Phi_{\eta K} \subseteq T^{\varphi_j}_{\eta K}$ по построению. Итак, если $\mathbf{s} \in \mathbf{S}^n_{\varphi_j}$, то $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_{\varphi_j} \cup \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{D}(\mathbf{c}, Q, \boldsymbol{\pi})$, и потому $\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_{\varphi_j} \in \boldsymbol{D}(\mathbf{c}, Q, \varphi_j)^{|\boldsymbol{u}|}_{\boldsymbol{q}})$. С другой стороны, $[\boldsymbol{u}] \subseteq \bigcup_{\mathbf{s}\in\mathbf{S}^n_{\varphi_j}} [\boldsymbol{v}^{\mathbf{s}}_{\varphi_j}]$, так что $\boldsymbol{u} \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigvee \boldsymbol{D}(\mathbf{c}, Q, \boldsymbol{\pi}^{|\boldsymbol{u}|}_{\boldsymbol{q}})$, что и требовалось. Теорема 11.1 доказана.

§ 12. Следствия для генерических расширений

Сначала мы докажем лемму об адекватном представлении точек 2^ω в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$-генерических расширениях при помощи имен точек. Затем теорема 12.2 покажет следствия именно для неглавных имен.

Лемма 12.1. *Пусть* $\boldsymbol{\pi}$ *– регулярный мультифорсинг, а множество* $G \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ *является генерическим над исходным универсумом множеств* $\mathbf{V}$.

Если $x \in \mathbf{V}[G] \cap 2^\omega$, *то существует* $\boldsymbol{\pi}$*-полное имя точки* $\mathbf{c} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \times \omega \times 2$, *для которого* $x = \mathbf{c}[G]$.

Если $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ *есть CCC форсинг*[9] *в* $\mathbf{V}$, *и* $\mathbf{c} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \times \omega \times 2$ *есть* $\boldsymbol{\pi}$*-полное имя точки, то существует такое малое* $\boldsymbol{\pi}$*-полное имя точки* $\mathbf{d} \in \mathbf{V}$, $\mathbf{d} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \times \omega \times 2$, *что* $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ *вынуждает* $\mathbf{c}[\underline{G}] = \mathbf{d}[\underline{G}]$ *над* $\mathbf{V}$.

[9]Свойство CCC означает, что каждая антицепь $A \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ не более чем счетна.

Доказательство. Первое утверждение есть частный случай общей теоремы в теории форсинга. Для вывода второго увеличим каждое множество $K_n^{\mathbf{c}} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ до открыто-плотного $K_n^{\mathbf{c}} \uparrow \boldsymbol{\pi} = \{\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})\colon \exists\, \boldsymbol{q} \in K_n^{\mathbf{c}}\,(\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q})\}$, выберем максимальные антицепи $A_n \subseteq K_n^{\mathbf{c}} \uparrow \boldsymbol{\pi}$ – они счетны по CCC, затем положим $A_{ni} = \{\boldsymbol{p} \in A_n\colon \exists\, \boldsymbol{q} \in K_{ni}^{\mathbf{c}}(\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q})\}$ и $\mathbf{d} = \{\langle \boldsymbol{p}, n, i\rangle\colon \boldsymbol{p} \in A_{ni}\}$. Лемма доказана.

Теорема 12.2. *Пусть $\boldsymbol{\pi}$ – регулярный мультифорсинг и $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$. Тогда*

(i) *если $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ есть CCC, множество $G \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ – генерическое над исходным универсумом множеств $\mathbf{V}$, и $x \in \mathbf{V}[G] \cap 2^\omega$, то $x \neq x_\xi[G]$, если и только если существует малое $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \times (\omega \times 2)$, неглавное над $\boldsymbol{\pi}$ в ξ, и удовлетворяющее $x = \mathbf{c}[G]$;*

(ii) *если $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \times (\omega \times 2)$ есть $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки, $\boldsymbol{\varphi}$ – мультифорсинг, $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_\xi^{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varphi}$, и множество $G \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varphi})$ является генерическим над $\mathbf{V}$, то $\mathbf{c}[G] \notin \bigcup_{Q \in \boldsymbol{\varphi}(\xi)} [Q]$.*

Доказательство. (i) Пусть $x \neq x_\xi[G]$. Согласно одной из главных теорем форсинга существует такое $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \times (\omega \times 2)$, что $x = \mathbf{c}[G]$ и $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ вынуждает $\mathbf{c} \neq x_\xi[\underline{G}]$, и, по лемме 12.1, $\mathbf{c}$ – малое, раз $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ есть CCC. Осталось доказать, что $\mathbf{c}$ – неглавное имя над $\boldsymbol{\pi}$ в ξ, т. е. множество

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{c}}^{\xi}(\boldsymbol{\pi}) = \{\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})\colon \xi \in |\boldsymbol{p}| \wedge \boldsymbol{p} \text{ прямо вынуждает } \mathbf{c} \notin [T_\xi^{\boldsymbol{p}}]\}$$

открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. Открытость очевидна, так что займемся плотностью. Рассмотрим любое $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. Тогда $\boldsymbol{q}$ $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$-вынуждает $\mathbf{c} \neq x_\xi[\underline{G}]$ по выбору $\mathbf{c}$, поэтому можно предполагать, что для какого-то n, $\boldsymbol{q}$ $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$-вынуждает $\mathbf{c}(n) \neq x_\xi[\underline{G}](n)$. Тогда по лемме 9.2 имеется такое мультидерево $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q}$, и $s \in \omega^{n+1}$, что $\boldsymbol{p}$ прямо вынуждает $s \subseteq \mathbf{c}$. Теперь достаточно показать, что $s \notin T_\xi^{\boldsymbol{p}}$. Пусть, напротив, $s \in T_\xi^{\boldsymbol{p}}$. Тогда дерево $T = T_\xi^{\boldsymbol{p}} {\restriction}_s$ принадлежит $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$. Следовательно, мультидерево $\boldsymbol{r}$, определенное через $T_\xi^{\boldsymbol{r}} = T$ и $T_{\xi'}^{\boldsymbol{r}} = T_{\xi'}^{\boldsymbol{p}}$ для любого $\xi' \neq \xi$, принадлежит $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$ и удовлетворяет $\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q}$. Однако $\boldsymbol{r}$ прямо вынуждает, что $\mathbf{c}(n)$ и $x_\xi[\underline{G}](n)$ равны одной и той же величине $\ell = s(n)$, что противоречит выбору n.

Для доказательства в обратную сторону, пусть $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \times (\omega \times 2)$ есть $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки, неглавное над $\boldsymbol{\pi}$ в ξ, и $x = \mathbf{c}[G]$. Пусть, напротив, $x = x_\xi[G]$. Существует мультидерево $\boldsymbol{q} \in G$, $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$-вынуждающее $\mathbf{c} = x_\xi[\underline{G}]$. Раз $\mathbf{c}$ неглавное, существует мультидерево $\boldsymbol{p} \in G \cap \boldsymbol{D}_{\mathbf{c}}^{\xi}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{q}$. Тогда $\boldsymbol{p}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T_\xi^{\boldsymbol{p}}]$, и поэтому $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$-вынуждает то же утверждение. Однако $\boldsymbol{p}$, очевидно, $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$-вынуждает $x_\xi[\underline{G}] \in [T_\xi^{\boldsymbol{p}}]$, имеем противоречие.

(ii) Пусть напротив, $Q \in \boldsymbol{\varphi}(\xi)$ и $\mathbf{c}[G] \in [Q]$. По определению мультифорсинг $\boldsymbol{\varphi}$ запирает над $\boldsymbol{\pi}$ множество

$$\boldsymbol{D}(\mathbf{c}, Q, \boldsymbol{\pi}) = \{\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})\colon \xi \in |\boldsymbol{r}| \wedge \boldsymbol{r} \text{ прямо вынуждает } \mathbf{c} \notin [Q]\}.$$

Значит, $\boldsymbol{D}(\mathbf{c}, Q, \boldsymbol{\pi})$ предплотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varphi})$ по лемме 6.3, и потому $G \cap \boldsymbol{D}(\mathbf{c}, Q, \boldsymbol{\pi}) \neq \varnothing$. Иными словами, имеется мультидерево $\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, прямо вынуждающее $\mathbf{c} \notin [Q]$. Отсюда легко следует $\mathbf{c}[G] \notin [Q]$, противоречие. Теорема 12.2 доказана.

§ 13. Соединяем типы измельчений

Здесь суммируются рассмотренные выше свойства генерических измельчений. Следующее определение соединяет типы измельчений $\sqsubset_D$, $\sqsubset_{\boldsymbol{D}}$, $\sqsubset_{\mathbf{c}}$, $\sqsubset_{\xi}^{\mathbf{c}}$.

Определение 13.1. Допустим, что $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varrho}$ – мультифорсинги, $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$ и $\mathfrak{M} \in \mathrm{HC}$ любое множество. Соотношение $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\varrho}$ означает, что выполнены следующие четыре требования:

(1) если $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \boldsymbol{\pi}(\xi)$, D предплотно в $\boldsymbol{\pi}(\xi)$, то $\boldsymbol{\pi}(\xi) \sqsubset_D \boldsymbol{\varrho}(\xi)$;

(2) если $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{M}$, $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{D}$ открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, то $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{\varrho}$;

(3) если $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}$ есть $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки, то $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho}$;

(4) если $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}$ $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки, *неглавное над* $\boldsymbol{\pi}$ *в* ξ, то $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\xi}^{\mathbf{c}} \boldsymbol{\varrho}$.

Следствие 13.2 (из лемм 5.4, 6.3, 10.3, 10.6). *Пусть* $\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\varrho}, \boldsymbol{\sigma}$ – *мультифорсинги, и* $\mathfrak{M}$ – *счетное множество. Тогда*

(i) *если* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\varrho} \sqsubset \boldsymbol{\sigma}$, *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\sigma}$;

(ii) *если* $\langle \boldsymbol{\pi}_\alpha \rangle_{\alpha<\lambda}$ *есть* $\sqsubset$*-возрастающая последовательность в* $\mathbf{MF}$, $0 < \mu < \lambda$, $\boldsymbol{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\mu} \boldsymbol{\pi}_\alpha$, *и* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\pi}_\mu$, *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\varrho} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\mu\leqslant\alpha<\lambda} \boldsymbol{\pi}_\alpha$.

Следствие 13.3. *Если* $\boldsymbol{\pi}$ – *малый мультифорсинг*, $\mathfrak{M} \in \mathrm{HC}$, *а* $\boldsymbol{\varrho}$ *является* $\mathfrak{M}$*-генерическим измельчением* $\boldsymbol{\pi}$ (*существует по лемме* 7.2!), *то* $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\varrho}$.

Доказательство. Имеем $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\varrho}$, благодаря 7.3, (v), 8.1, 8.5, 11.1. Следствие доказано.

§ 14. Возрастающие последовательности мультифорсингов

Напомним, что $\mathbf{MF}$ – совокупность всех мультифорсингов (§ 4). Пусть

$$\mathbf{sMF} = \{\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{MF} \colon \boldsymbol{\pi} \text{ – \textit{малый} мультифорсинг}\};$$
$$\mathbf{spMF} = \{\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{MF} \colon \boldsymbol{\pi} \text{ – \textit{малый особый} мультифорсинг}\}.$$

Итак, мультифорсинг $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{MF}$ принадлежит $\mathbf{sMF}$, когда $|\boldsymbol{\pi}| \subseteq \omega_1$ – (не более чем) счетно, и если $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$, то $\boldsymbol{\pi}(\xi)$ – счетный форсинг в $\mathbf{AF}$, а $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{spMF}$ требует, чтобы дополнительно каждый $\boldsymbol{\pi}(\xi)$ был особым (определение 3.3).

Определение 14.1. Если $\kappa \leqslant \omega_1$, то через $\overrightarrow{\mathbf{MF}}_\kappa$ обозначим множество всех $\sqsubset$-возрастающих последовательностей $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \langle \boldsymbol{\pi}_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa}$ мультифорсингов $\boldsymbol{\pi}_\alpha \in \mathbf{spMF}$, *непрерывных по области* в том смысле, что если $\lambda < \kappa$ – предельный ординал, то $|\boldsymbol{\pi}_\lambda| = \bigcup_{\alpha<\lambda} |\boldsymbol{\pi}_\alpha|$. Пусть $\overrightarrow{\mathbf{MF}} = \bigcup_{\kappa<\omega_1} \overrightarrow{\mathbf{MF}}_\kappa$.

Мы упорядочиваем $\overrightarrow{\mathbf{MF}} \cup \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$ обычными отношениями $\subseteq$ и $\subset$ продолжения последовательностей. А именно, $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subset \vec{\boldsymbol{\varrho}}$, когда $\kappa = \mathrm{dom}(\vec{\boldsymbol{\pi}}) < \lambda = \mathrm{dom}(\vec{\boldsymbol{\varrho}})$ и $\boldsymbol{\pi}_\alpha = \boldsymbol{\varrho}_\alpha$ для всех $\alpha < \kappa$. В этом случае, если $\mathfrak{M}$ – любое множество, и $\boldsymbol{\varrho}_\kappa$ (первый член последовательности $\vec{\boldsymbol{\varrho}}$, отсутствующий в $\vec{\boldsymbol{\pi}}$) удовлетворяет $\boldsymbol{\pi} \sqsubset_{\mathfrak{M}} \boldsymbol{\varrho}_\kappa$, где $\boldsymbol{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\kappa} \boldsymbol{\pi}_\alpha$, то пишем $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\boldsymbol{\varrho}}$.

Если $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_\kappa$, то пусть $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}) = \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi})$, где $\boldsymbol{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}} \vec{\boldsymbol{\pi}} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\kappa} \boldsymbol{\pi}_\alpha$ (покомпонентное объединение). Соответственно $\vec{\boldsymbol{\pi}}$*-полное имя точки* означает $\boldsymbol{\pi}$-полное имя точки.

Лемма 14.2. *Если* $\vec{\boldsymbol{\pi}}, \vec{\boldsymbol{\varrho}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\mathbf{c}$ *есть* $\vec{\boldsymbol{\pi}}$*-полное имя точки, и* $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subset_{\{\mathbf{c}\}} \vec{\boldsymbol{\varrho}}$, *то* $\mathbf{c}$ *есть и* $\vec{\boldsymbol{\varrho}}$*-полное имя точки.*

Доказательство. Пусть $\kappa = \operatorname{dom}(\vec{\pi}) < \lambda = \operatorname{dom}(\vec{\varphi})$ и $\pi = \bigcup^{\mathrm{cw}} \vec{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\kappa} \pi_\alpha$. По определению $\pi \sqsubset_{\{\mathbf{c}\}} \varphi_\kappa$, так что $\pi \sqsubset_{\mathbf{c}} \varphi_\kappa$, ибо $\mathbf{c}$ есть π-полное имя точки. Однако $\pi \sqsubset_{\mathbf{c}} \varphi = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\kappa\leqslant\alpha<\lambda} \varphi_\alpha$ по лемме 10.3, (iii). Значит, $\mathbf{c}$ есть $(\pi \cup^{\mathrm{cw}} \varphi)$-полное имя по лемме 10.3, (i). Но $\pi \cup^{\mathrm{cw}} \varphi = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\lambda} \varphi_\alpha = \bigcup^{\mathrm{cw}} \vec{\varphi}$. Лемма доказана.

Определение 14.3. Через $\mathbf{ZFL}^-$ обозначим подтеорию $\mathbf{ZFC}$, включающую все аксиомы, кроме аксиомы степени, плюс аксиома конструктивности $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ и аксиома существования $\mathscr{P}(\omega)$. (Тогда множества ω_1, HC и вообще относящиеся к континууму множества вроде $2^\omega, \mathbf{PT}$, также существуют.) Аксиома выбора включена в $\mathbf{ZFL}^-$ в форме принципа полной упорядочиваемости.

Если $x \in \mathrm{HC}$ (HC = наследственно счетные множества, сноска 6), то через $\mathfrak{L}(x)$ обозначим наименьшую *счетную* транзитивная модель (CTM) теории $\mathbf{ZFL}^-$, содержащую x и удовлетворяющую $x \in (\mathrm{HC})^{\mathfrak{L}(x)}$. Она с необходимостью имеет вид $\mathfrak{L}(x) = \mathbf{L}_\mu$, где $\mu = \mu_x < \omega_1$.

Ординал $\xi < \kappa$ называется *критическим* для $\vec{\pi} = \langle \pi_\alpha{}_{\alpha<\kappa} \rangle \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_\kappa$, когда мы имеем $(\bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\xi} \pi_\alpha) \sqsubset_{\mathfrak{L}(\vec{\pi}\restriction\xi)} \pi_\xi$. Это эквивалентно $\vec{\pi} \restriction \xi \subset_{\mathfrak{L}(\vec{\pi}\restriction\xi)} \vec{\pi}$.

Лемма 14.4. *Пусть* $\kappa \leqslant \omega_1$ *и* $\vec{\pi} = \langle \pi_\alpha{}_{\alpha<\kappa} \rangle \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_\kappa$. *Тогда*

(i) $\pi = \bigcup^{\mathrm{cw}} \vec{\pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\kappa} \pi_\alpha$ *есть регулярный мультифорсинг*;

(ii) *если* $\kappa < \lambda \leqslant \omega_1$ *и* $\mathfrak{M} \in \mathrm{HC}$, *то существует такая последовательность* $\vec{\varphi} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, *что* $\operatorname{dom}(\vec{\varphi}) = \lambda$ *и* $\vec{\pi} \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\varphi}$;

(iii) *если* $\xi < \kappa$ – *критический ординал* $\vec{\pi}$, $\pi_{<\xi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\xi} \pi_\alpha$, $\pi_{\geqslant\xi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\xi\leqslant\beta<\kappa} \pi_\beta$, *то* $\pi_{<\xi} \sqsubset_{\mathfrak{L}(\vec{\pi}\restriction\xi)} \pi_{\geqslant\xi}$ *и* $\pi_{<\xi} \sqsubset_{\mathfrak{L}(\vec{\pi}\restriction\xi)} \pi_\beta$ *для* $\xi \leqslant \beta < \kappa$, *следовательно*,

(a) $\mathbf{MT}(\pi_{\geqslant\xi})$ *открыто-плотно в* $\mathbf{MT}(\vec{\pi})$,

(b) *если* $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{L}(\vec{\pi} \restriction \xi)$, $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbf{MT}(\vec{\pi} \restriction \xi)$, $\boldsymbol{D}$ *открыто-плотно в* $\mathbf{MT}(\vec{\pi} \restriction \xi)$, *то* $\boldsymbol{D}$ *предплотно в* $\mathbf{MT}(\pi_{<\xi} \cup^{\mathrm{cw}} \pi_{\geqslant\xi}) = \mathbf{MT}(\vec{\pi})$.

Доказательство. (i) Используем лемму 5.2, (iv).

(ii) Определяем члены φ_α требуемой последовательности $\vec{\varphi}$ по индукции.

Само собой, $\varphi_\alpha = \pi_\alpha$ для всех $\alpha < \kappa$. Для определения критического члена φ_κ мы предположим, что $\mathfrak{M}$ содержит $\vec{\pi}$ и удовлетворяет $\kappa \subseteq \mathfrak{M}$ (иначе возьмем большее множество). По лемме 7.2 существует $\mathfrak{M}$-генерическое измельчение π' мультифорсинга $\pi = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\kappa} \pi_\alpha$. По теореме 7.3 π' – малый особый мультифорсинг, $\pi \sqsubset \pi'$ и $\pi_\alpha \sqsubset \pi'$ для всех $\alpha < \kappa$. Дополнительно, $\pi \sqsubset_{\mathfrak{M}} \pi'$ согласно следствию 13.3. Положим $\varphi_\kappa = \pi'$. Продолженная последовательность $\vec{\varphi}_+ = \langle \varphi_\alpha \rangle_{\alpha<\kappa+1}$ принадлежит к $\overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\kappa+1}$ и удовлетворяет $\vec{\pi} \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\varphi}_+$.

Следующие шаги аналогичны, но только можно взять $\mathfrak{M} = \varnothing$.

Для вывода главного утверждения (iii) ссылаемся на следствие 13.2.

Для вывода (iii), (a) ссылаемся на следствие 6.1. Наконец, (iii), (b). Раз $\pi_{<\xi} \sqsubset_{\mathfrak{L}(\vec{\pi}\restriction\xi)} \pi_{\geqslant\xi}$ и $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{L}(\vec{\pi} \restriction \xi)$, мы имеем $\pi_{<\xi} \sqsubset_{\boldsymbol{D}} \pi_{\geqslant\xi}$, поэтому множество $\boldsymbol{D}$ предплотно в $\mathbf{MT}(\vec{\pi})$ по лемме 6.3, (i). Лемма доказана.

§ 15. Ключевая последовательность

В этом параграфе мы определяем форсинг для доказательства теоремы 1.2. Он будет иметь вид $\mathbf{MT}(\mathbb{P})$ для определенного мультифорсинга $\mathbb{P}$ с $|\mathbb{P}| = \omega_1$. Мультифорсинг $\mathbb{P}$ будет получен как покомпонентное объединение членов последовательности $\vec{\mathbb{\Pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$. Построение этой последовательности в конструктивном универсуме $\mathbf{L}$ будет использовать некоторые идеи, относящиеся к даймонд-конструкциям, а также особый вид *определимой генеричности*. Следующее определение вводит важное понятие для этого построения.

Определение 15.1. Последовательность $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ *блокирует* множество W, если либо $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in W$ (*позитивный* блок), либо не существует последовательностей $\vec{\boldsymbol{\varphi}} \in W$, продолжающих $\vec{\boldsymbol{\pi}}$ (*негативный* блок).

Напомним, что НС – все наследственно счетные множества, сноска 6.

Определение 15.2. Мы используем стандартные обозначения $\varSigma_n^{\mathrm{HC}}$, $\varPi_n^{\mathrm{HC}}$, $\varDelta_n^{\mathrm{HC}}$ (наклонные $\varSigma$, $\varPi$, $\varDelta$) для классов *эффективной* определимости в НС (параметры не допускаются), и $\mathbf{\Sigma}_n(\mathrm{HC})$, $\mathbf{\Pi}_n(\mathrm{HC})$, $\mathbf{\Delta}_n(\mathrm{HC})$ – для *параметрической* определимости в НС (параметры из НС допускаются). Хорошо известно, что если $n \geqslant 1$ и $X \subseteq 2^\omega$, то

$$X \in \varSigma_n^{\mathrm{HC}} \iff X \in \varSigma_{n+1}^1, \qquad X \in \mathbf{\Sigma}_n(\mathrm{HC}) \iff X \in \mathbf{\Sigma}_{n+1}^1,$$

и то же для $\varPi$, $\mathbf{\Pi}$, $\varDelta$, $\mathbf{\Delta}$.

Теорема 15.3 (в $\mathbf{L}$). *Пусть* $\mathbb{n} \geqslant 3$. *Существует последовательность* $\vec{\mathbb{\Pi}} = \langle \mathbb{\Pi}_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$, *удовлетворяющая следующим требованиям*:

(i) *последовательность* $\vec{\mathbb{\Pi}}$ *принадлежит классу определимости* $\varDelta_{\mathbb{n}-2}^{\mathrm{HC}}$;

(ii) $|\bigcup^{\mathrm{cw}} \vec{\mathbb{\Pi}}| = \omega_1$;

(iii) *если* $\mathbb{n} \geqslant 4$ *и* $W \subseteq \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ *есть* $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}-3}(\mathrm{HC})$*-множество, то существует такой ординал* $\gamma < \omega_1$, *что последовательность* $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma$ *блокирует* W;

(iv) *существует такое замкнутое неограниченное множество* $\mathbb{C} \subseteq \omega_1$, *что каждый ординал* $\gamma \in \mathbb{C}$ *является критическим для* $\vec{\mathbb{\Pi}}$ *в смысле определения* 14.3.

Доказательство. Рассуждаем в предположении $\mathbf{V} = \mathbf{L}$. Если $\mathbb{n} \geqslant 4$, то пусть $\mathbf{un}_{\mathbb{n}}(p, x)$ – каноническая универсальная $\varSigma_{\mathbb{n}-3}$-формула, так что семейство всех множеств $X \subseteq \mathrm{HC}$ класса $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}-3}(\mathrm{HC})$ равно семейству всех множеств вида $\Upsilon_{\mathbb{n}}(p) = \{x \in \mathrm{HC} \colon \mathrm{HC} \models \mathbf{un}_{\mathbb{n}}(p, x)\}$, $p \in \mathrm{HC}$.

Утверждение. *Если* $\mathbb{n} \geqslant 4$, *то множество* $\{\langle \vec{\boldsymbol{\pi}}, p \rangle \colon \vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}} \wedge p \in \mathrm{HC} \wedge \vec{\boldsymbol{\pi}}$ блокирует $\Upsilon_{\mathbb{n}}(p)\}$ *принадлежит* $\varDelta_{\mathbb{n}-2}^{\mathrm{HC}}$.

Доказательство. Мы опускаем рутинную проверку того, что $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$ имеет класс $\varDelta_1^{\mathrm{HC}}$. Далее, если $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и $p \in \mathrm{HC}$, то для того, чтобы $\vec{\boldsymbol{\pi}}$ блокировала $\Upsilon_{\mathbb{n}}(p)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\underbrace{\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \Upsilon_{\mathbb{n}}(p)}_{\varSigma_{\mathbb{n}-3}^{\mathrm{HC}}} \vee \underbrace{\neg \exists \vec{\boldsymbol{\varphi}} \big(\underbrace{\vec{\boldsymbol{\varphi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}} \wedge \vec{\boldsymbol{\varphi}} \text{ extends } \vec{\boldsymbol{\pi}}}_{\varDelta_1^{\mathrm{HC}}} \wedge \underbrace{\vec{\boldsymbol{\varphi}} \in \Upsilon_{\mathbb{n}}(p)}_{\varSigma_{\mathbb{n}-3}^{\mathrm{HC}}}\big)}_{\varPi_{\mathbb{n}-3}^{\mathrm{HC}}},$$

так что мы имеем дизъюнкцию формул типов $\varSigma_{\mathbb{n}-3}^{\mathrm{HC}}$ и $\varPi_{\mathbb{n}-3}^{\mathrm{HC}}$, следовательно, класс $\varDelta_{\mathbb{n}-2}^{\mathrm{HC}}$. Утверждение доказано.

Для $\alpha < \omega_1$ определим последовательность $\vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha] \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ по индукции следующим образом. Положим $\vec{\boldsymbol{\pi}}[0] = \varnothing$, пустая последовательность.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$. Допустим, что $\vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha] \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ уже определена, $\kappa = \operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha]$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}(\vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha])$ и p_α есть α-й элемент множества $\mathrm{HC} = \mathbf{L}_{\omega_1}$ в смысле гёделева полного порядка $\leqslant_{\mathbf{L}}$. По лемме 14.4, (ii), имеется последовательность $\vec{\boldsymbol{\tau}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\kappa+1}$, для которой $\vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha] \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\boldsymbol{\tau}}$. Согласно следствию 7.4 найдется последовательность $\vec{\boldsymbol{\varphi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\kappa+2}$, для которой $\vec{\boldsymbol{\tau}} \subset \vec{\boldsymbol{\varphi}}$ и $\alpha \in |\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\kappa + 1)|$. Наконец, если $\mathbb{n} \geqslant 4$, то найдется последовательность $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, удовлетворяющая $\vec{\boldsymbol{\varphi}} \subset \vec{\boldsymbol{\pi}}$ и блокирующая множество $\Upsilon_{\mathbb{n}}(p_\alpha)$, если же $\mathbb{n} = 3$, то просто полагаем $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \vec{\boldsymbol{\varphi}}$. Таким образом, окончательно мы имеем:

($*$) $\vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha] \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\boldsymbol{\pi}}$, $\kappa + 1 < \operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\pi}}$, $\alpha \in |\vec{\boldsymbol{\varphi}}(\kappa + 1)|$, и если $\mathbb{n} \geqslant 4$, то $\vec{\boldsymbol{\pi}}$ блокирует множество $\Upsilon_{\mathbb{n}}(p_\alpha)$.

Пусть $\vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha+1]$ – $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьшая из последовательностей $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, удовлетворяющих ($*$). Заметим, что аксиома $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ совершенно необходима для этой конструкции, поскольку иначе выбор $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьшей последовательности $\vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha+1]$ был бы, вообще говоря, невозможен.

Предельный шаг. Если $\lambda < \omega_1$ пределен, то положим $\vec{\boldsymbol{\pi}}[\lambda] = \bigcup_{\alpha<\lambda} \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha]$.

Мы имеем $\alpha < \beta \Longrightarrow \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha] \subset \vec{\boldsymbol{\pi}}[\beta]$ по построению, так что $\vec{\mathbb{\Pi}} = \bigcup_\alpha \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha] \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$. Для вывода (i) заметим, что отношение $R(\vec{\boldsymbol{\pi}}, \vec{\boldsymbol{\varphi}}, \mathfrak{M}) :=$ "$\vec{\boldsymbol{\pi}} \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\boldsymbol{\varphi}}$" абсолютно для всех транзитивных моделей $\mathbf{ZFL}^-$, поэтому R имеет класс $\varDelta_1^{\mathrm{HC}}$. Легко видеть, что отображение $\vec{\boldsymbol{\pi}} \mapsto \mathfrak{L}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$ также принадлежит $\varDelta_1^{\mathrm{HC}}$. Наконец, и "блокировать $\Upsilon_{\mathbb{n}}(p)$" является $\varDelta_{\mathbb{n}-2}^{\mathrm{HC}}$-отношением согласно утверждению выше. Используя эти факты, рутинная проверка показывает, что ($*$) является $\varDelta_{\mathbb{n}-2}^{\mathrm{HC}}$-отношением (в $\mathbf{L}$). С другой стороны, известно, что в предположении $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, выбор $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьшего элемента в каждом непустом сечении $\varDelta_k^{\mathrm{HC}}$-множества, $k \geqslant 1$, дает множество-трансверсаль того же класса $\varDelta_k^{\mathrm{HC}}$. Этим проверка (i) завершена.

Для вывода (ii) заметим, что по построению $\alpha \in |\bigcup^{\mathrm{cw}} \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha + 1]|$.

Для вывода (iii) ($\mathbb{n} \geqslant 4$) заметим, что любое $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}-3}(\mathrm{HC})$-множество $W \subseteq \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ равно $\Upsilon_{\mathbb{n}}(p_\alpha)$ для некоторого $\alpha < \omega_1$, так что берем $\gamma = \operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha + 1]$.

(iv) Множество $\mathbb{C} = \{\operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha] \colon \alpha < \omega_1\}$ замкнуто и неограничено согласно предельному шагу построения. Далее, если $\gamma = \operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha] \in \mathbb{C}$, то $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma = \vec{\boldsymbol{\pi}}[\alpha]$, а значит, ординал γ – критический для $\vec{\mathbb{\Pi}}$ по построению.

Общее соглашение 15.4 (в $\mathbf{L}$). С этого момента фиксируем число $\mathbb{n} \geqslant 3$ как в теореме 1.2. Также фиксируем последовательность $\vec{\mathbb{\Pi}} = \langle \mathbb{\Pi} \rangle_{\alpha \alpha < \omega_1} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$, удовлетворяющую (i)–(iv) теоремы 15.3 для этого $\mathbb{n}$. Мы называем эту фиксированную $\vec{\mathbb{\Pi}}$ *ключевой последовательностью.*

Лемма 15.5. *Если $\mathbb{n} \geqslant 4$ и $W \subseteq \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ есть $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}-3}(\mathrm{HC})$-множество, плотное в $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$, то существует такой ординал $\gamma < \omega_1$, что $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \in W$.*

Доказательство. Согласно 15.4 $\vec{\mathbb{\Pi}}$ удовлетворяет (iii) теоремы 15.3, поэтому найдется ординал $\gamma < \omega_1$, для которого $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma$ блокирует W. Негативный блок невозможен из-за плотности W, значит, мы имеем $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \in W$. Лемма доказана.

§ 16. Ключевой форсинг

Продолжая рассуждать в $\mathbf{L}$, мы проведем дальнейшие построения, отправляясь от ключевой последовательности $\vec{\Pi} = \langle \Pi_{\alpha\,\alpha<\omega_1} \rangle$, введенной в 15.4.

Определение 16.1 (в $\mathbf{L}$). Определим мультифорсинги

$$\begin{aligned} \Pi &= \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha \in \mathbf{MF}, \\ \Pi_{<\gamma} &= \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\gamma} \Pi_\alpha \in \mathbf{sMF} \quad \text{для каждого} \quad \gamma<\omega_1, \\ \Pi_{\geqslant\gamma} &= \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\gamma\leqslant\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha \in \mathbf{MF} \quad \text{для каждого} \quad \gamma<\omega_1. \end{aligned}$$

Мы далее определяем $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\Pi) = \mathbf{MT}(\vec{\Pi})$, и для каждого $\gamma < \omega_1$

$$\mathbb{P}_{<\gamma} = \mathbf{MT}(\Pi_{<\gamma}) = \mathbf{MT}(\vec{\Pi} \restriction \gamma), \qquad \mathbb{P}_{\geqslant\gamma} = \mathbf{MT}(\Pi_{\geqslant\gamma}) = \mathbf{MT}(\vec{\Pi} \restriction (\omega_1 \setminus \gamma)).$$

Множество $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\Pi)$ будет нашим *ключевым форсингом.*

Следствие 16.2 (в $\mathbf{L}$, согласно 15.3, (ii)). *Π есть регулярный мультифорсинг и $|\Pi| = \omega_1$, следовательно, $\mathbb{P} = \prod_{\xi<\omega_1} \Pi(\xi)$ (с конечной базой).*

Если $\xi < \omega_1$, то, согласно следствию, пусть $\alpha(\xi) < \omega_1$ равно наименьшему ординалу α, для которого $\xi \in |\Pi_\alpha|$. Таким образом, форсинг $\Pi_\alpha(\xi) \in \mathbf{AF}$ определен для любого α, удовлетворяющего $\alpha(\xi) \leqslant \alpha < \omega_1$, и $\langle \Pi_\alpha(\xi) \rangle_{\alpha(\xi)\leqslant\alpha<\omega_1}$ есть $\sqsubset$-возрастающая последовательность особых форсингов в $\mathbf{AF}$. Заметим, что по построению $\Pi(\xi) = \bigcup_{\alpha(\xi)\leqslant\alpha<\omega_1} \Pi_\alpha(\xi)$.

Следствие 16.3 (в $\mathbf{L}$). *Последовательность ординалов $\langle \alpha(\xi) \rangle_{\xi<\omega_1}$ и последовательность форсингов $\langle \Pi_\alpha(\xi) \rangle_{\xi<\omega_1,\,\alpha(\xi)\leqslant\alpha<\omega_1}$ имеют класс $\varDelta^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$.*

Доказательство. Следующая двойная эквивалентность

$$\begin{aligned} \alpha < \alpha(\xi) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists\, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\pi} = \Pi_\alpha \wedge \xi \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\pi}) \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall\, \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\pi} = \Pi_\alpha \Longrightarrow \xi \in \operatorname{dom} \boldsymbol{\pi}) \end{aligned}$$

выполнена по построению. Однако $\boldsymbol{\pi} = \Pi_\alpha$ есть $\varDelta^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$-отношение по теореме 15.3, (i). Этому же классу $\varDelta^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$ тогда принадлежит и последовательность $\langle \alpha(\xi) \rangle_{\xi<\omega_1}$. Второе утверждение аналогично. Следствие доказано.

Следствие 16.4 (в $\mathbf{L}$, из леммы 5.2, (iv)). *Если $\xi < \omega_1$ и $\alpha(\xi) \leqslant \alpha < \omega_1$, то множество $\Pi_\alpha(\xi)$ предплотно в $\Pi(\xi)$ и в Π.*

Несмотря на 16.2, множества $|\Pi_{<\gamma}|$ могут быть достаточно произвольными (счетными) подмножествами ω_1. Однако мы получаем такое следствие.

Следствие 16.5 (в $\mathbf{L}$, из 16.2). *Множество $\mathbb{C}' = \{\gamma < \omega_1 \colon |\Pi_{<\gamma}| = \gamma\}$ замкнуто и неограничено в ω_1.*

Для вывода свойства CCC нам потребуется следующая лемма.

Лемма 16.6 (в $\mathbf{L}$). *Если $X \subseteq \mathrm{HC} = \mathbf{L}_{\omega_1}$, то множество $\mathscr{O}_X$ всех таких ординалов $\gamma < \omega_1$, что $\langle \mathbf{L}_\gamma; X \cap \mathbf{L}_\gamma \rangle$ есть элементарная подмодель $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; X \rangle$ и $X \cap \mathbf{L}_\gamma \in \mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$ – стационарно, поэтому неограничено в ω_1.*

Вообще, если $X_n \subseteq \mathrm{HC}$ для всех n, то множество $\mathscr{O}$ всех таких $\gamma < \omega_1$, что $\langle \mathbf{L}_\gamma; \langle X_n \cap \mathbf{L}_\gamma \rangle_{n<\omega} \rangle$ есть элементарная подмодель $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; \langle X_n \rangle_{n<\omega} \rangle$ и $\langle X_n \cap \mathbf{L}_\gamma \rangle_{n<\omega} \in \mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$, стационарно и неограничено в ω_1.

Доказательство. Пусть $C \subseteq \omega_1$ – замкнутое неограниченное множество. Пусть M – счетная элементарная подмодель $\mathbf{L}_{\omega_2}$, содержащая C, ω_1, X, $\vec{\mathbb{\Pi}}$, и такая, что $M \cap \mathbf{L}_{\omega_1}$ транзитивно. Рассмотрим коллапс по Мостовскому $\phi\colon M \xrightarrow{\text{на}} \mathbf{L}_\lambda$; пусть $\gamma = \phi(\omega_1)$. Тогда

$$\gamma < \lambda < \omega_1, \qquad \phi(X) = X \cap \mathbf{L}_\gamma, \qquad \phi(C) = C \cap \gamma, \qquad \phi(\vec{\mathbb{\Pi}}) = \vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma$$

по выбору M. Отсюда следует, что $\langle \mathbf{L}_\gamma; X \cap \mathbf{L}_\gamma, C \cap \gamma, \vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \rangle$ – элементарная подмодель $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; X, C, \vec{\mathbb{\Pi}} \rangle$, таким образом, $\gamma \in \mathscr{O}_X$. Более того, γ несчетен в $\mathbf{L}_\lambda$, значит, $\mathbf{L}_\lambda \subseteq \mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$. (См. определение 14.3 о моделях $\mathfrak{L}(\vec{\boldsymbol{\pi}}) \models \mathbf{ZFL}^-$.) Мы заключаем, что $X \cap \mathbf{L}_\gamma \in \mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$ поскольку $X \cap \mathbf{L}_\gamma \in \mathbf{L}_\lambda$ по построению. С другой стороны, $C \cap \gamma$ неограничено в γ по элементарности, следовательно, $\gamma \in C$, что и требовалось.

Второе, более общее утверждение мало чем отличается.

Лемма доказана.

Следствие 16.7 (в $\mathbf{L}$). *Форсинг $\mathbb{P}$ удовлетворяет CCC. Следовательно, $\mathbb{P}$-генерические расширения $\mathbf{L}$ сохраняют кардиналы.*

Доказательство. Пусть $A \subseteq \mathbb{P} = \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}})$ – максимальная антицепь. По 15.4 и теореме 15.3, (iv) существует замкнутое неограниченное множество $\mathbb{C} \subseteq \omega_1$, каждый ординал $\gamma \in \mathbb{C}$ в котором – критический для $\vec{\mathbb{\Pi}}$. По лемме 16.6 имеется такой ординал $\gamma \in \mathbb{C}$, что $A' = A \cap \mathbb{P}_{<\gamma}$ – максимальная антицепь в $\mathbb{P}_{<\gamma} = \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$ и $A' \in \mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$. Тогда множество $D(A') = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{P}_{<\gamma} \colon \exists\, \boldsymbol{q} \in A\, (p \leqslant q)\} \in \mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$ открыто-плотно в $\mathbb{P}_{<\gamma}$.

Но γ – критический ординал для $\vec{\mathbb{\Pi}}$, так что по лемме 14.4, (iii), (b) как множество $D(A')$, так и само A' остаются предплотными в самом множестве $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}})$. Отсюда следует, что $A = A'$ – счетное множество. Следствие доказано.

Следствие 16.8 (в $\mathbf{L}$). *Если множество $D \subseteq \mathbb{P}$ предплотно в $\mathbb{P}$, то найдется такой ординал $\gamma < \omega_1$, что $D \cap \mathbb{P}_{<\gamma}$ уже предплотно в $\mathbb{P}$.*

Доказательство. Можно предполагать, что D даже плотно. Пусть $A \subseteq D$ – максимальная антицепь в D; тогда A является максимальной антицепью и в $\mathbb{P}$ из-за предплотности D. Тогда $A \subseteq \mathbb{P}_{<\gamma}$ для какого-то $\gamma < \omega_1$ по следствию 16.7. Но A предплотно в $\mathbb{P}$. Следствие доказано.

§ 17. Базовое генерическое расширение

Напомним, что ключевая последовательность $\vec{\mathbb{\Pi}} = \langle \mathbb{\Pi}_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1}$ малых особых мультифорсингов $\mathbb{\Pi}_\alpha$ определена в $\mathbf{L}$ по 15.4, покомпонентное объединение $\mathbb{\Pi} = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\alpha<\omega_1} \mathbb{\Pi}_\alpha$ есть мультифорсинг, $|\mathbb{\Pi}| = \omega_1$ в $\mathbf{L}$, а $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}}) = \mathbf{MT}(\mathbb{\Pi}) \in \mathbf{L}$ –

наш ключевой форсинг, равный произведению с конечной базой $\prod_{\xi<\omega_1}\mathbb{\Pi}(\xi)$ арбореальных форсингов $\mathbb{\Pi}(\xi)$ в $\mathbf{L}$. Некоторые свойства $\mathbb{P}$ уже установлены в § 16, включая CCC и определимость множителей $\mathbb{\Pi}(\xi)$ в $\mathbf{L}$. Теперь наша цель – использовать некоторые подмодели $\mathbb{P}$-генерических моделей для доказательства теоремы 1.2.

Замечание 17.1. С этого момента мы будем обычно рассуждать в $\mathbf{L}$ и генерических расширениях $\mathbf{L}$, сохраняющих по крайней мере $\omega_1^{\mathbf{L}}$ (сюда относятся и $\mathbb{P}$-генерические расширения по следствию 16.7), так что всегда будет $\omega_1^{\mathbf{L}}=\omega_1$. Это позволит нам предполагать, что $|\mathbb{\Pi}|=\omega_1$ (а не $\omega_1^{\mathbf{L}}$).

Определение 17.2. Пусть множество $G\subseteq\mathbb{P}$ является генерическим над конструктивным универсумом $\mathbf{L}$. Если $\xi<\omega_1$, то следуя замечанию 4.5, мы

– определяем $G(\xi)=\{T_\xi^{\boldsymbol{p}}\colon \boldsymbol{p}\in G\wedge\xi\in|\boldsymbol{p}|\}\subseteq\mathbb{\Pi}(\xi)$;

– через $x_\xi=x_\xi[G]\in 2^\omega$ обозначаем единственную точку в $\bigcap_{T\in G(\xi)}[T]$;

– полагаем $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}[G]=\langle x_\xi[G]\rangle_{\xi<\omega_1}=\{\langle\xi,x_\xi[G]\rangle\colon\xi<\omega_1\}$.

Итак, $\mathbb{P}$ присоединяет массив $\boldsymbol{X}[G]$ точек 2^ω к $\mathbf{L}$, где каждая $x_\xi[G]\in 2^\omega\cap\mathbf{L}[G]$ является $\mathbb{\Pi}(\xi)$-генерической точкой над $\mathbf{L}$, и $\mathbf{L}[G]=\mathbf{L}[\boldsymbol{X}[G]]$.

Если $\Delta\subseteq\omega_1$, то пусть $\mathbb{P}\upharpoonright\Delta=\mathbf{MT}(\mathbb{\Pi}\upharpoonright\Delta)=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{P}\colon|\boldsymbol{p}|\subseteq\Delta\}$.

Следующая лемма использует структуру $\mathbb{P}$ как произведения.

Лемма 17.3. *Пусть* $\Delta\in\mathbf{L}$, $\Delta\subseteq\omega_1$. *Тогда* $\mathbb{P}=\mathbf{MT}(\mathbb{\Pi})$ *тождественно произведению* $(\mathbb{P}\upharpoonright\Delta)\times(\mathbb{P}\upharpoonright\Delta')$, *где* $\Delta'=\omega_1\setminus\Delta$. *Если* $G\subseteq\mathbb{P}$ *генерическое над* $\mathbf{L}$, *то множество* $G\upharpoonright\Delta=\{\boldsymbol{p}\in G\colon|\boldsymbol{p}|\subseteq\Delta\}$ *является* $(\mathbb{P}\upharpoonright\Delta)$*-генерическим над* $\mathbf{L}$. *Если* $\xi<\omega_1$, $\xi\notin\Delta$, *то* $x_\xi[G]\notin\mathbf{L}[G\upharpoonright\Delta]$.

§ 18. Определимость генерических точек

Напомним, что компоненты $\mathbb{\Pi}(\xi)$ форсинга $\mathbb{P}=\mathbf{MT}(\mathbb{\Pi})=\prod_{\xi<\omega_1}\mathbb{\Pi}(\xi)$ определены через $\mathbb{\Pi}(\xi)=\bigcup_{\alpha(\xi)\leqslant\alpha<\omega_1}\mathbb{\Pi}_\alpha(\xi)$, где $\alpha(\xi)<\omega_1$, множества $\mathbb{\Pi}_\alpha(\xi)$ счетны и состоят из совершенных деревьев, а их определимость в $\mathbf{L}$ дается следствием 16.3. Мы будем свободно использовать обозначения из определения 17.2.

Теорема 18.1. *Допустим, что множество* $G\subseteq\mathbb{P}$ $\mathbb{P}$*-генерическое над* $\mathbf{L}$, $\xi<\omega_1$, *и* $x\in\mathbf{L}[G]\cap 2^\omega$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $x=x_\xi[G]$;

(2) *точка* x *является* $\mathbb{\Pi}(\xi)$*-генерической над* $\mathbf{L}$;

(3) $x\in\bigcap_{\alpha(\xi)\leqslant\alpha<\omega_1}\bigcup_{T\in\mathbb{\Pi}_\alpha(\xi)}[T]$.

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) несложно (см. замечание 4.5). Для вывода (2) $\Longrightarrow$ (3) напомним, что каждое множество $\mathbb{\Pi}_\alpha(\xi)$ предплотно в $\mathbb{\Pi}(\xi)$ по лемме 5.2, (iv). Остается вывести (3) $\Longrightarrow$ (1). Предположим, что $x\in\mathbf{L}[G]\cap 2^\omega$, но (1) не выполнено, т.е. $x\neq x_\xi[G]$. По теореме 12.2, (i) найдется такое малое ($\mathbb{P}=\mathbf{MT}(\mathbb{\Pi})$ удовлетворяет CCC по 16.7) $\mathbb{\Pi}$-полное имя точки $\mathbf{c}\in\mathbf{L}$, что $\mathbf{c}\subseteq\mathbb{P}\times\omega\times 2$, $x=\mathbf{c}[G]$, и $\mathbf{c}$ неглавное над $\mathbb{\Pi}$ в ξ, в том смысле, что множество

$$\boldsymbol{D}_{\mathbf{c}}^{\xi}(\mathbb{\Pi})=\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{P}=\mathbf{MT}(\mathbb{\Pi})\colon\xi\in|\boldsymbol{p}|\wedge\boldsymbol{p}\text{ прямо вынуждает }\mathbf{c}\notin[T_\xi^{\boldsymbol{p}}]\}$$

открыто-плотно в $\mathbb{P}=\mathbf{MT}(\mathbb{\Pi})$. Из-за малости $\mathbf{c}$ имеется такой ординал $\gamma<\omega_1$, что $\mathbf{c}$ есть $\mathbb{\Pi}_{<\gamma}$-полное имя точки, и можно предполагать по следствию 16.8, что множество $\boldsymbol{D}^{\xi}_{k\mathbf{c}}(\mathbb{\Pi}) \cap \mathbb{P}_{<\gamma}$ предплотно в $\mathbb{P}$, значит, открыто-плотно в $\mathbb{P}_{<\gamma}$, а тогда $\mathbf{c}$ является неглавным над $\mathbb{\Pi}_{<\gamma}$ в ξ. Далее, можно предполагать, что $\mathbf{c} \in \mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$. Наконец, можно предполагать, что γ принадлежит множеству $\mathbb{C}$ теоремы 15.3, (iv), другими словами, γ – критический ординал для $\vec{\boldsymbol{\pi}}$, т.е. $\mathbb{\Pi}_{<\gamma} \sqsubset_{\mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}}\restriction\gamma)} \mathbb{\Pi}_{\gamma}$. Отсюда следует $\mathbb{\Pi}_{<\gamma} \sqsubset_{\mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}}\restriction\gamma)} \mathbb{\Pi}_{\geqslant\gamma}$ по лемме 14.4, (iii). Тогда $\mathbb{\Pi}_{<\gamma} \sqsubset^{\mathbf{c}}_{\xi} \mathbb{\Pi}_{\geqslant\gamma}$ также выполнено по лемме 13.1, (4), так как $\mathbf{c} \in \mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$ и вследствие неглавности $\mathbf{c}$. Теперь теорема 12.2, (ii) для $\boldsymbol{\pi} = \mathbb{\Pi}_{<\gamma}$ и $\boldsymbol{\varrho} = \mathbb{\Pi}_{\geqslant\gamma}$ (отметим, что $\boldsymbol{\pi} \cup^{\mathrm{cw}} \boldsymbol{\varrho} = \mathbb{\Pi}$) влечет $x = \mathbf{c}[G] \notin \bigcup_{Q\in\mathbb{\Pi}_{\geqslant\gamma}(\xi)}[Q]$, в частности, $x \notin \bigcup_{Q\in\mathbb{\Pi}_{\gamma}(\xi)}[Q]$. Другими словами, (3) также не имеет места. Теорема доказана.

Следствие 18.2. *Пусть $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$, а M – генерическое расширение $\mathbf{L}$, удовлетворяющее $2^{\omega} \cap M \subseteq \mathbf{L}[G]$. Тогда $\boldsymbol{X}[G] \cap M$ есть множество типа $\mathit{\Pi}^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$ в M.*

Напомним, что $\boldsymbol{X}[G]$ введено определением 17.2.

Доказательство. По теореме соотношение $\langle \xi, x\rangle \in \boldsymbol{X}[G]$ эквивалентно в модели M такому предложению:

$$\forall\, \alpha < \omega_1\, \exists\, T \in \mathbb{\Pi}_{\alpha}(\xi)\big(\alpha(\xi) \leqslant \alpha \Longrightarrow x \in [T]\big),$$

которое можно переписать как

$$\forall\, \alpha < \omega_1\, \forall\, \mu < \omega_1\, \forall\, Y\ \exists\, T \in Y\big(\mu = \alpha(\xi) \wedge Y = \mathbb{\Pi}_{\alpha}(\xi) \wedge \mu \leqslant \alpha \Longrightarrow x \in [T]\big).$$

Здесь равенство $\mu = \alpha(\xi)$ имеет тип $\mathit{\Delta}^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$ по следствию 16.3, и то же самое верно для равенства $Y = \mathbb{\Pi}_{\alpha}(\xi)$ также по 16.3. Поэтому все отношение в целом имеет тип $\mathit{\Pi}^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$, так как квантор $\exists\, T \in Y$ ограничен. Следствие доказано.

Следствие 18.3. *Если $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$, то в $\mathbf{L}[G]$ существует "хорошее" полное $\mathit{\Delta}^1_{\mathfrak{n}}$-упорядочение 2^{ω} длины ω_1.*

Доказательство. Если $\gamma < \omega_1$, то пусть $\boldsymbol{X}_{\gamma} = \langle x_{\xi}[G]\rangle_{\xi<\gamma}$. Равенство $Y = \boldsymbol{X}_{\gamma}$ есть $\mathit{\Pi}^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$-отношение в $\mathbf{L}[G]$ (с аргументами γ, Y) по следствию 18.2. Если $x \in 2^{\omega} \cap \mathbf{L}[G]$, то пусть $\gamma(x)$ – наименьший ординал $\gamma < \omega_1$, для которого $x \in \mathbf{L}[\boldsymbol{X}_{\gamma}]$, а $\nu(x) < \omega_1$ – номер x в каноническом полном упорядочении 2^{ω} в $\mathbf{L}[\boldsymbol{X}_{\gamma}]$. Мы упорядочиваем $2^{\omega} \cap \mathbf{L}[G]$ согласно лексикографическому порядку троек $\langle \max\{\gamma(x), \nu(x)\}, \gamma(x), \nu(x)\rangle$. Класс этого порядка будет $\mathit{\Delta}^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-1}$ согласно вышесказанному, следовательно, $\mathit{\Delta}^1_{\mathfrak{n}}$. А "хорошесть" (т.е. множество всех кодированных начальных сегментов должно быть $\mathit{\Sigma}^1_{\mathfrak{n}}$) легко проверяется. Лемма доказана.

§ 19. Модель, в которой отделимость нарушена

Мы определим модель для теоремы 1.2 на базе $\mathbb{P}$-генерического расширения $\mathbf{L}[G]$ класса $\mathbf{L}$. Более точно, оно будет иметь вид $\mathbf{L}[G \restriction \Delta]$, где $\Delta \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$ само будет генерическим множеством над $\mathbf{L}[G]$.

Пусть $\mathbb{Q} = \{1,2,3\}^{\omega_1^{\mathbf{L}}} \cap \mathbf{L}$ со *счетной* базой, т.е. типичный элемент $\mathbb{Q}$ – это частичная функция $q \in \mathbf{L}$ из $\omega_1^{\mathbf{L}}$ в 3-элементное множество $\{1,2,3\}$, чья область определения $\operatorname{dom} q \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$ счетна в $\mathbf{L}$, т. е. просто ограничена в $\omega_1^{\mathbf{L}}$. (Выбор 3-элементного множества $\{1,2,3\}$ будет ясен из нижеследующего, см. определение 19.3.) Мы упорядочиваем $\mathbb{Q}$ обратно включению, т. е. $q \leqslant q'$ (q сильнее), когда $q' \subseteq q$. Таким образом, $\mathbb{Q} \in \mathbf{L}$ и, внутри $\mathbf{L}$, $\mathbb{Q}$ тождественно степени $\{1,2,3\}^{\omega_1}$ со счетной базой. Соответственно, $\mathbb{Q}$-генерические объекты являются $\mathbb{Q}$-генерическими функциями $H : \omega_1^{\mathbf{L}} \to \{1,2,3\}$.

Напомним, что $\mathbb{P}$ есть CCC форсинг в $\mathbf{L}$ согласно следствию 16.7.

Лемма 19.1. *$\mathbb{P}$ остается CCC в любом $\mathbb{Q}$-генерическом расширении $\mathbf{L}[H]$ класса $\mathbf{L}$, так что $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$ сохраняет кардиналы над $\mathbf{L}$.*

Доказательство. Пусть напротив, $q' \in \mathbb{Q}$ вынуждает, что C – несчетная антицепь в $\mathbb{P}$, где C является $\mathbb{Q}$-именем. Заметим, что в $\mathbf{L}$, $\mathbb{Q}$ *счетно полно*: если $q_0 \geqslant q_1 \geqslant q_2 \geqslant \cdots$ – последовательность в $\mathbb{Q}$, то имеется условие $q = \bigcup_k q_k \in \mathbb{Q}$; $q \leqslant q_k$, $\forall\, k$. Поэтому, рассуждая в $\mathbf{L}$, можно определить по индукции убывающую $\langle q_{\xi_{\xi<\omega_1}} \rangle$ в $\mathbb{Q}$ и последовательность попарно несовместных условий $p_\xi \in \mathbb{P}$, так, что $q_0 \leqslant q'$ и каждое q_ξ вынуждает $p_\xi \in C$. Но тогда $A = \{p_\xi : \xi < \omega_1\} \in \mathbf{L}$ – несчетная антицепь в $\mathbb{P}$, противоречие. Лемма доказана.

Лемма 19.2. *Пусть множество $G \times H$ – $\mathbb{P} \times \mathbb{Q}$-генерическое над $\mathbf{L}$. Тогда*

(i) $2^\omega \cap \mathbf{L}[G,H] \subseteq \mathbf{L}[G]$, *поэтому* $\omega_1^{\mathbf{L}} = \omega_1^{\mathbf{L}[G]} = \omega_1^{\mathbf{L}[G,H]}$;

(ii) *если* $\Delta \in \mathbf{L}$, $\Delta \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$, *то* $\mathbf{L}[G \restriction \Delta, H] \cap 2^\omega \subseteq \mathbf{L}[G \restriction \Delta]$;

(iii) *если* $\Delta \in \mathbf{L}[H]$, $\Delta \subseteq \omega_1^{\mathbf{L}}$, *и* $\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$, *то* $x_\xi[G] \in \mathbf{L}[G \restriction \Delta]$ *равносильно* $\xi \in \Delta$.

Доказательство. Множество $\mathbb{Q}$ необязательно остается счетно полным в $\mathbf{L}[G]$, так что наиболее простой метод доказательства (ii) не работает. Однако рассмотрим $\mathbf{L}[G,H]$ как $\mathbb{P}$-генерическое расширение $\mathbf{L}[H][G]$ модели $\mathbf{L}[H]$. Пусть $x \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[H][G]$. Раз $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\mathbb{\Pi})$ есть CCC форсинг в $\mathbf{L}[H]$ по лемме 19.1, лемма 12.1 дает малое $\mathbb{\Pi}$-полное имя точки $\mathbf{c} \in \mathbf{L}[H]$, для которого $\mathbf{c} \subseteq \mathbb{P} \times \omega \times 2$ и $x = \mathbf{c}[G]$. Благодаря малости, $\mathbf{c}$ эффективно кодируется точкой 2^ω, так что $\mathbf{c} \in \mathbf{L}$, поскольку $\mathbf{L}[H] \cap 2^\omega = \mathbf{L} \cap 2^\omega$. Поэтому $x = \mathbf{c}[G] \in \mathbf{L}[G]$.

Доказательство (ii) аналогично.

(iii) В нетривиальном направлении, пусть $\xi \notin \Delta$. Рассмотрим множество $\Delta' = \omega_1^{\mathbf{L}} \setminus \{\xi\} \in \mathbf{L}$. Ясно, что $G \restriction \Delta \in \mathbf{L}[G \restriction \Delta', H]$, и потому любая точка в $2^\omega \cap \mathbf{L}[G \restriction \Delta]$ принадлежит $\mathbf{L}[G \restriction \Delta']$ согласно (ii). Но $x_\xi[G] \notin \mathbf{L}[G \restriction \Delta']$ по лемме 17.3.

Лемма доказана.

Напомним, что если $\nu \in \mathbf{Ord}$, то произведение ординалов 2ν рассматривается как порядковая сумма ν копий ординала $2 = \{0,1\}$. (В то время как $\nu 2 = \nu + \nu$.) Например, если $\nu = \lambda + m$, где λ пределен или 0 и $m < \omega$, то $2\nu = \lambda + 2m$ и $2\nu + 1 = \lambda + 2m + 1$, а $\langle \nu, i \rangle \mapsto 2\nu + i$ – биекция $\omega_1 \times 2$ на ω_1.

Определение 19.3. Если $H : \omega_1^{\mathbf{L}} \to \{1,2,3\}$, то определим множества

$$\mathbb{1}_H = \{2\nu : H(2\nu) = 1\}, \qquad \mathbb{2}_H = \{2\nu : H(2\nu) = 2\}, \qquad \mathbb{3}_H = \{2\nu : H(2\nu) = 3\},$$
$$\mathbb{4}_H = \{2\nu+1 : H(2\nu+1) = 1\}, \qquad \mathbb{5}_H = \{2\nu+1 : H(2\nu+1) = 2\},$$

и $\mathbb{6}_H = \{2\nu+1\colon H(2\nu+1)=3\}$, и далее

$$\begin{aligned}\Delta_H = \{4\nu\colon 2\nu\in \mathbb{1}_H\cup \mathbb{3}_H\}\cup\{4\nu+1\colon 2\nu\in \mathbb{2}_H\cup\mathbb{3}_H\}\\ \cup\{4\nu+2\colon 2\nu+1\in \mathbb{4}_H\}\cup\{4\nu+3\colon 2\nu+1\in\mathbb{5}_H\}.\end{aligned}$$

Соотношение $\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]\subseteq\mathbf{L}[G]$ необязательно выполнено, так как множество Δ_H может не принадлежать к $\mathbf{L}[G]$, однако $\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]\subseteq\mathbf{L}[G][H]$.

§ 20. Теорема неотделимости: HC-вариант

Здесь доказывается такой вариант теоремы 1.2 для определимости в HC.

Теорема 20.1. *Пусть множество $G\subseteq\mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$, а $H\colon\omega_1^{\mathbf{L}}\to\{1,2,3\}$ – функцией $\mathbb{Q}$-генерической над $\mathbf{L}[G]$. Тогда в $\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]$ истинно следующее*:

(i) $\mathbb{1}_H$, $\mathbb{2}_H$ – *дизъюнктные множества класса $\varPi^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-1}$, неотделимые дизъюнктными $\mathbf{\Sigma_{n-1}}(\mathrm{HC})$-множествами*;

(ii) $\mathbb{4}_H$, $\mathbb{5}_H$ – *дизъюнктные множества класса $\varSigma^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-1}$ неотделимые дизъюнктными $\mathbf{\Pi_{n-1}}(\mathrm{HC})$-множествами.*

Доказательство теоремы 20.1 в этом параграфе содержит ссылку на следующую теорему, собственное длинное доказательство которой последует в заключительной части статьи.

Теорема 20.2 (будет доказана в § 26). *Пусть множество $X\in\mathbf{L}$, $X\subseteq\omega_1^{\mathbf{L}}$ неограничено в $\omega_1^{\mathbf{L}}$, а множество $G\subseteq\mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$. Тогда $\mathbf{L}[G\restriction X]\cap 2^\omega$ – элементарная подмодель $\mathbf{L}[G]\cap 2^\omega$ по отношению ко всем $\varSigma^1_{\mathfrak{n}-1}$-формулам с параметрами из $2^\omega\cap\mathbf{L}[G\restriction X]$.*

Следствие 20.3. *В предположениях теоремы 20.1 $\mathrm{HC}^{\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]}$ есть элементарная подмодель $\mathrm{HC}^{\mathbf{L}[G]}$ по отношению ко всем $\varSigma_{\mathfrak{n}-2}$-формулам.*

Заметим, что $\mathrm{HC}^{\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]}\subseteq\mathrm{HC}^{\mathbf{L}[G]}$ по лемме 19.2, но $\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]\not\subseteq\mathbf{L}[G]$.

Доказательство (следствия 20.3). Имеем $\omega_1^{\mathbf{L}}=\omega_1^{\mathbf{L}[G]}=\omega_1^{\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]}$ и $\Delta_H\cap\lambda\in\mathbf{L}$ для всех $\lambda<\omega_1^{\mathbf{L}}$ по лемме 19.2. Остается сослаться на теорему 20.2, с учетом того, что $\varSigma^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$-определимость соответствует $\varSigma^1_{\mathfrak{n}-1}$-определимости.

Следствие доказано.

Доказательство (теоремы 20.1). (i) Чтобы проверить, к примеру, что $\mathbb{1}_H$ является $\varPi^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-1}$-множеством в $\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]$, достаточно доказать равенство

$$\mathbb{1}_H=\{2\nu<\omega_1\colon\neg\,\exists\,x\ (\langle 4\nu+1,x\rangle\in\boldsymbol{X})\}$$

в $\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]$, где $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}[G]\cap\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]$ есть $\varPi^{\mathrm{HC}}_{\mathfrak{n}-2}$-множество в $\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]$ согласно следствию 18.2. (Для $\mathbb{2}_H$ было бы $\langle 4\nu,x\rangle\in\boldsymbol{X}$ в выделенной формуле.)

Сначала предположим, что $\nu<\omega_1^{\mathbf{L}}$, $\xi=4\nu+1$, $x\in\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]\cap 2^\omega$, и $\langle\xi,x\rangle\in\boldsymbol{X}$; проверим, что $2\nu\notin\mathbb{1}_H$. По определению $x=x_\xi[G]$, и $\xi\in\Delta_H$ по лемме 19.2, (iii). Но тогда $2\nu\in\mathbb{2}_H\cup\mathbb{3}_H$, так что $2\nu\notin\mathbb{1}_H$, что и требовалось.

Обратно, пусть $2\nu\notin\mathbb{1}_H$, так что $2\nu\in\mathbb{2}_H\cup\mathbb{3}_H$. Тогда $\xi=4\nu+1\in\Delta_H$, поэтому $x=x_\xi\in\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]$ и $\langle\xi,x\rangle=\langle 4\nu+1,x\rangle\in\boldsymbol{X}$, что и требовалось.

Для доказательства неотделимости предположим, что, напротив, множества $\mathbb{1}_H$, $\mathbb{2}_H$ отделимы дизъюнктными $\mathbf{\Sigma_{n-1}}(\mathrm{HC})$-множествами $A, B \subseteq \omega_1 = \omega_1^{\mathbf{L}}$ в $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_H]$. Множества A, B определены, в $\mathrm{HC}^{\mathbf{L}[G\restriction\Delta_H]}$, $\Sigma_{\mathbb{n}-1}$-формулами $\varphi(a,\xi), \psi(a,\xi)$ соответственно, с точкой $a \in \mathbf{L}[G \restriction \Delta_H] \cap 2^\omega$ в роли параметра, так что, $a \in \mathbf{L}[G]$ по лемме 19.2. Пусть $\lambda < \omega_1^{\mathbf{L}}$ – такой предельный ординал, что $a \in \mathbf{L}[G \restriction \Delta_{H\lambda}]$, где $\Delta_{H\lambda} = \Delta_H \cap \lambda \in \mathbf{L}$.

Если $K\colon \omega_1^{\mathbf{L}} \to \{1,2,3\}$ (например, $K = H$), то положим

$$A_K^* = \{\xi < \omega_1^{\mathbf{L}} \colon \varphi(a,\xi)^{\mathrm{HC}^{\mathbf{L}[G\restriction\Delta_K]}}\}, \qquad B_K^* = \{\xi < \omega_1^{\mathbf{L}} \colon \psi(a,\xi)^{\mathrm{HC}^{\mathbf{L}[G\restriction\Delta_K]}}\}. \quad (*)$$

По определению $\mathbb{1}_H \subseteq A = A_H^*$, $\mathbb{2}_H \subseteq B = B_H^*$, и $A_H^* \cap B_H^* = \varnothing$. Имеется “условие” $q_0 \in \mathbb{Q}$, совместимое с H (т.е. здесь просто $q_0 \subset H$), которое вынуждает указанные свойства множеств A, B, так что

(†) если $K\colon \omega_1^{\mathbf{L}} \to \{1,2,3\}$ является $\mathbb{Q}$-генерической функцией над $\mathbf{L}[G]$, совместимой с q_0, то $\mathbb{1}K \subseteq A_K^*$, $\mathbb{2}K \subseteq B_K^*$, и $A_K^* \cap B_K^* = \varnothing$.

Можно предполагать, что $\operatorname{dom} q_0 \subseteq \lambda$, иначе просто увеличим λ.

Берем любой ординал ν_0, $\lambda \leqslant \nu_0 < \omega_1$. Рассмотрим функции H_1, H_2, H_3: $\omega_1^{\mathbf{L}} \to \{1,2,3\}$, генерические над $\mathbf{L}[G]$, совместные с q_0, и удовлетворяющие $H_i(2\nu_0) = i$, $i = 1,2,3$, и $H_1(\alpha) = H_2(\alpha) = H_3(\alpha)$ для всех $\alpha \neq 2\nu_0$. Имеем $\Delta_{H_3} = \Delta_{H_1} \cup \{4\nu_0 + 1\}$ по определению 19.3, значит, $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_{H_1}] \subseteq \mathbf{L}[G \restriction \Delta_{H_3}]$. Отсюда $A_{H_1}^* \subseteq A_{H_3}^*$ по следствию 20.3. Значит, $\mathbb{1}H_1 \subseteq A_{H_1}^* \subseteq A_{H_3}^*$ согласно (†). Мы получаем $2\nu_0 \in A_{H_3}^*$, поскольку $2\nu_0 \in \mathbb{1}H_1$ по выбору H_1.

Мы выводим $2\nu_0 \in B_{H_3}^*$ аналогичным рассуждением (с H_2). Итак, $A_{H_3}^* \cap B_{H_3}^* \neq \varnothing$, что противоречит (†). Противоречие завершает доказательство (i).

Доказательство п. (ii) строится совершенно аналогично.

Вывод теоремы 20.1 из теоремы 20.2 закончен.

§ 21. Главная теорема из теоремы 20.2

Доказательство (теоремы 1.2). (i) Рассуждаем в условиях теоремы 20.1. Для построения неотделимой пары $\Pi_{\mathbb{n}}^1$-множеств в $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_H]$, рассмотрим Π_1^1-множество кодов счетных ординалов $\mathbf{WO} \subseteq 2^\omega$, и для $w \in \mathbf{WO}$ пусть $|w| < \omega_1$ – кодируемый ординал. Раз $\omega_1^{\mathbf{L}} = \omega_1$ согласно 16.7, для любого $\xi < \omega_1$ имеется код $w \in \mathbf{WO} \cap \mathbf{L}$ с $|w| = \xi$. Через w_ξ обозначим $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьший из них, и пусть $X = \{w_\xi \colon \xi \in \mathbb{1}_H\}$ и $Y = \{w_\xi \colon \xi \in \mathbb{2}_H\}$.

Множества $X, Y \subseteq \mathbf{WO} \cap \mathbf{L}$ принадлежат $\Pi_{\mathbb{n}-1}^{\mathrm{HC}}$ в $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_H]$ вместе с $\mathbb{1}_H$, $\mathbb{2}_H$, следовательно, $\Pi_{\mathbb{n}}^1$, и $X \cap Y = \varnothing$. Пусть, напротив, в $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_H]$, $X', Y' \subseteq 2^\omega$ являются дизъюнктными множествами в $\mathbf{\Sigma}_{\mathbb{n}}^1$, следовательно, в $\mathbf{\Sigma_{n-1}}(\mathrm{HC})$, и при этом $X \subseteq X'$ и $Y \subseteq Y'$. Тогда, в $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_H]$,

$$A = \{\xi < \omega_1^{\mathbf{L}} \colon w_\xi \in X'\} \quad \text{и} \quad B = \{\xi < \omega_1^{\mathbf{L}} \colon w_\xi \in Y'\}$$

– дизъюнктные $\mathbf{\Sigma_{n-1}}(\mathrm{HC})$-множества, причем $\mathbb{1}_H \subseteq A$ и $\mathbb{2}_H \subseteq B$ по построению, что противоречит теореме 20.1. Противоречие завершает доказательство п. (i). Доказательство п. (ii) строится совершенно аналогично.

Вывод теоремы 1.2 из теоремы 20.2 закончен.

§ 22. Вспомогательное отношение вынуждения

Мы начинаем довольно длинное доказательство теоремы 20.2. Оно включает вспомогательное отношение вынуждения, не связанное прямо ни с каким определенным форсингом, в частности, с нашим ключевым форсингом $\mathbb{P}$.

Общее соглашение 22.1. Предполагаем, что $\mathbb{n} \geqslant 4$, ибо если $\mathbb{n} = 3$, то теорема 20.2 следует из абсолютности по Шенфилду.

Мы рассуждаем в $\mathbf{L}$. Используется язык арифметики второго порядка с переменными $k, l, m, n, \ldots$ типа 0 над ω и переменными $a, b, x, y, \ldots$ типа 1 над 2^ω с атомарными формулами $x(n) = i$. Через $\mathscr{L}$ обозначим расширение этого языка разрешением замещать переменные типа 0 натуральными числами, а переменные типа 1 – *малыми именами точек* (определение 9.1) $\mathbf{c} \in \mathbf{L}$.

Классы $\mathscr{L}\Sigma^1_n$, $\mathscr{L}\Pi^1_n$ $(n \geqslant 1)$ $\mathscr{L}$-формул определяются естественным образом. Пусть $\mathscr{L}(\Sigma\Pi)^1_1$ – замыкание $\mathscr{L}\Sigma^1_1 \cup \mathscr{L}\Pi^1_1$ относительно $\neg$, $\wedge$, $\vee$ и кванторов над ω. Если φ – формула из $\mathscr{L}\Sigma^1_n$ (или $\mathscr{L}\Pi^1_n$), то φ^- есть результат канонического преобразования $\neg\varphi$ к виду $\mathscr{L}\Pi^1_n$ (соответственно $\mathscr{L}\Sigma^1_n$).

Мы определим отношение $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \varphi$ между мультидеревьями $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}$, последовательностями $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и замкнутыми формулами φ из $\mathscr{L}(\Sigma\Pi)^1_1$ или $\mathscr{L}\Sigma^1_n \cup \mathscr{L}\Pi^1_n$, $n \geqslant 2$, которое подходящим образом аппроксимирует настоящее отношение $\mathbb{P}$-вынуждения. Определение идет индукцией по сложности φ.

1°. Пусть $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}$ (необязательно $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$), а φ – замкнутая $\mathscr{L}(\Sigma\Pi)^1_1$-формула. Определим $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \varphi$, когда существует СТМ $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFL}^-$ (см. определение 14.3 о теории $\mathbf{ZFL}^-$), ординал $\vartheta < \operatorname{dom}\vec{\boldsymbol{\pi}}$ и мультидерево $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta)$, такие, что

(1) $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{p}_0$ (т. е. $\boldsymbol{p}_0$ – более слабое условие),

(2) $\mathfrak{M}$ содержит $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta$ (и тогда также содержит $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta)$ и $\boldsymbol{p}_0$),

(3) каждое имя $\mathbf{c}$ в φ принадлежит $\mathfrak{M}$ и является $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta$-полным,

(4) $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\boldsymbol{\pi}}$ – значит, $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta \subset_{\{\mathbf{c}\}} \vec{\boldsymbol{\pi}}$ для любого имени $\mathbf{c}$ в φ, и

(5) $\boldsymbol{p}_0$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta)$-вынуждает $\varphi[\underline{G}]$ над $\mathfrak{M}$ в обычном смысле[10].

2°. Если $\varphi(x)$ есть $\mathscr{L}\Pi^1_n$-формула, $n \geqslant 1$, то определяем $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \exists x\, \varphi(x)$, когда имеется малое имя точки $\mathbf{c}$, для которого $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \varphi(\mathbf{c})$.

3°. Если $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}$, а φ – замкнутая $\mathscr{L}\Pi^1_n$-формула, $n \geqslant 2$, то определяем $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \varphi$, когда нет последовательности $\vec{\boldsymbol{\tau}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и мультидерева $\boldsymbol{p}' \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\tau}})$ таких, что $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\tau}}$, $\boldsymbol{p}' \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}' \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\tau}}} \varphi^-$.

Замечание 22.2. Условие “$\boldsymbol{p}_0$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta)$-вынуждает $\varphi[\underline{G}]$ над $\mathfrak{M}$” в 1° не зависит от выбора СТМ $\mathfrak{M}$, содержащей $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta$ и φ, поскольку если φ есть $\mathscr{L}(\Sigma\Pi)^1_1$-формула, то все транзитивные модели согласованы по отношению к формуле $\varphi[G]$ по теореме абсолютности Мостовского [20, теорема 25.4].

Лемма 22.3. *Пусть последовательности* $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\varrho}}$ *принадлежат* $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, φ *есть* $\mathscr{L}$*-формула. Тогда* $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \varphi$ *влечет* $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}} \varphi$.

Доказательство. Пусть φ есть $\mathscr{L}(\Sigma\Pi)^1_1$-формула, и $\mathfrak{M}$, ϑ, $\boldsymbol{p}_0$, как в 1°, обеспечивают $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \varphi$. Тогда те же $\mathfrak{M}$, ϑ, $\boldsymbol{p}_0$ обеспечивают $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}} \varphi$.

Индуктивный шаг $\exists$, как в 2°, достаточно элементарен.

---

[10] Пункт 1° не только требует, чтобы $\varphi[\underline{G}]$ вынуждалось, но и также фиксирует этот статус посредством $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\boldsymbol{\pi}}$. Это позволит вывести непротиворечивость forc в лемме 22.7.

Теперь индуктивный шаг $\forall$, как в 3°. Пусть φ – замкнутая $\mathscr{L}\varPi^1_n$-формула, $n \geqslant 2$, и $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$. Допустим, что $\boldsymbol{q}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varsigma}}}\,\varphi$ не выполнено, т. е. согласно 3° имеются: последовательность $\vec{\boldsymbol{\varsigma}}\,' \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и мультидерево $\boldsymbol{q}' \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varsigma}}\,')$, удовлетворяющие $\vec{\boldsymbol{\varsigma}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\varsigma}}\,'$, $\boldsymbol{q}' \leqslant \boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{q}'\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varsigma}}\,'}\,\varphi^-$. Но тогда $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\varsigma}}\,'$ и $\boldsymbol{q}' \leqslant \boldsymbol{p}$, так что и $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$ не может иметь места по 3°. Лемма 22.3 доказана.

Определение 22.4. Если K – один из классов $\mathscr{L}(\varSigma\varPi)^1_1$, $\mathscr{L}\varSigma^1_n$, $\mathscr{L}\varPi^1_n$ $(n \geqslant 2)$, то $\mathbf{FORC}[K]$ есть множество всех таких троек $\langle \vec{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{p}, \varphi \rangle$, что $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$.

Таким образом, $\mathbf{FORC}[K]$ – подмножество множества HC.

Лемма 22.5 (определимость, в $\mathbf{L}$). $\mathbf{FORC}[\mathscr{L}(\varSigma\varPi)^1_1] \in \varDelta^{\mathrm{HC}}_1$. *Если $n \geqslant 2$, то* $\mathbf{FORC}[\mathscr{L}\varSigma^1_n]$ *принадлежит* $\varSigma^{\mathrm{HC}}_{n-1}$, *а* $\mathbf{FORC}[\mathscr{L}\varPi^1_n]$ *принадлежит* $\varPi^{\mathrm{HC}}_{n-1}$.

Доказательство. Такие отношения, как $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, "быть формулой типа $\mathscr{L}(\varSigma\varPi)^1_1$, $\mathscr{L}\varSigma^1_n$, $\mathscr{L}\varPi^1_n$", $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\rho}})$, вынуждение над СТМ и т. д., определимы в HC ограниченными формулами, поэтому $\varDelta^{\mathrm{HC}}_1$. Сверх этого, модель $\mathfrak{M}$ может быть связана как квантором $\exists$, так и $\forall$ в 1°, см. замечание 22.2. Отсюда следует $\varDelta^{\mathrm{HC}}_1$-оценка для $\mathscr{L}(\varSigma\varPi)^1_1$.

Индуктивный шаг 2° достаточно элементарен.

Теперь индуктивный шаг 3°. Пусть $n \geqslant 2$, и $\mathbf{FORC}[\mathscr{L}\varSigma^1_n] \in \varSigma^{\mathrm{HC}}_{n-1}$ уже установлено. Однако $\langle \vec{\boldsymbol{\pi}}, \boldsymbol{p}, \varphi \rangle \in \mathbf{FORC}[\mathscr{L}\varPi^1_n]$, когда $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}$, φ – замкнутая $\mathscr{L}\varPi^1_n$-формула, и согласно 3° нет ни одной такой тройки $\langle \vec{\boldsymbol{\tau}}, \boldsymbol{p}', \psi \rangle \in \mathbf{FORC}[\mathscr{L}\varSigma^1_n]$, что $\vec{\boldsymbol{\tau}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\tau}}$, $\boldsymbol{p}' \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\tau}})$, $\boldsymbol{p}' \leqslant \boldsymbol{p}$ и ψ есть φ^-. Отсюда легко следует требуемая $\varPi^{\mathrm{HC}}_{n-1}$-оценка для $\mathbf{FORC}[\mathscr{L}\varPi^1_n]$. Лемма 22.5 доказана.

Лемма 22.6 (в $\mathbf{L}$). *Пусть* $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$, φ *есть* $\mathscr{L}(\varSigma\varPi)^1_1$-*формула.*

(i) *Если* $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\varsigma}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}} \cup \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$, *ТМ* $\mathfrak{N} \models \mathbf{ZFL}^-$ *содержит* $\vec{\boldsymbol{\varsigma}}$ *и* φ, *и* $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$, *то* $\boldsymbol{p}$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varsigma}})$-*вынуждает* $\varphi[\underline{G}]$ *над* $\mathfrak{N}$ *в обычном смысле.*

(ii) *Если ТМ* $\mathfrak{N} \models \mathbf{ZFL}^-$ *содержит* $\vec{\boldsymbol{\pi}}$, *каждое имя* $\mathbf{c}$ *в* φ *принадлежит* $\mathfrak{N}$ *и является* $\vec{\boldsymbol{\pi}}$-*полным, и* $\boldsymbol{p}$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varsigma}})$-*вынуждает* $\varphi[\underline{G}]$ *над* $\mathfrak{N}$, *то найдется такая* $\vec{\boldsymbol{\varsigma}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, *что* $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subset_{\mathfrak{N}} \vec{\boldsymbol{\varsigma}}$ *и* $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varsigma}}}\,\varphi$.

Доказательство. (i) По определению существуют ординал $\vartheta < \mathrm{dom}\,\vec{\boldsymbol{\pi}}$, мультидерево $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta)$, и СТМ $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFL}^-$, содержащая $\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta$, такие, что $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{p}_0$, каждое имя $\mathbf{c}$ в φ принадлежит $\mathfrak{M}$ и является $\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta$-полным, $\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\boldsymbol{\pi}}$, и $\boldsymbol{p}_0$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta)$-вынуждает $\varphi[\underline{G}]$ над $\mathfrak{M}$. Можно, не умаляя общности, предположить, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. (Иначе $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, и просто берем модель $\mathfrak{M}$ вместо $\mathfrak{N}$.)

Пусть множество $G \subseteq \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varsigma}})$ является $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varsigma}})$-генерическим над $\mathfrak{N}$ и $\boldsymbol{p} \in G$ – тогда также $\boldsymbol{p}_0 \in G$. Нужно доказать, что $\varphi[G]$ истинно в $\mathfrak{N}[G]$.

Утверждается, что множество $G' = G \cap \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta)$ – $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta)$-генерическое над $\mathfrak{M}$. Действительно, пусть $\boldsymbol{D} \in \mathfrak{M}$, $\boldsymbol{D} \subseteq \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta)$ открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta)$. Однако $\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta \subset_{\mathfrak{M}} \vec{\boldsymbol{\varsigma}}$, поэтому $\boldsymbol{D}$ предплотно в $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varsigma}})$ согласно лемме 14.4, (iii), (b), так что $G \cap \boldsymbol{D} \neq \varnothing$ по выбору G. Следовательно, $G' \cap \boldsymbol{D} \neq \varnothing$.

Теперь, если $\mathbf{c}$ – имя в φ, то $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}$ и $\mathbf{c}$ является $\vec{\boldsymbol{\pi}} \upharpoonright \vartheta$-полным. Значит, согласно доказанному $\mathbf{c}[G'] \in 2^\omega$ определено. Следовательно, $\mathbf{c}[G] = \mathbf{c}[G']$, так как $G' \subseteq G$. Поэтому $\varphi[G]$ тождественно $\varphi[G']$. Заметим также, что $\boldsymbol{p}_0 \in G'$.

Мы заключаем, что $\varphi[G']$ истинно в $\mathfrak{M}[G']$, так как $\boldsymbol{p}_0$ вынуждает $\varphi[\underline{G}]$ над $\mathfrak{M}$. Та же формула $\varphi[G]$ тогда истинна и в $\mathfrak{N}[G]$ по абсолютности Мостовского.

(ii) Лемма 14.4, (ii) дает $\vec{\boldsymbol{\varphi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, для которой $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subset_{\mathfrak{N}} \vec{\boldsymbol{\varphi}}$.

Лемма 22.6 доказана.

Лемма 22.7 (в $\mathbf{L}$). *Пусть* $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$, φ *– формула из* $\mathscr{L}(\Sigma\Pi)^1_1$ *или* $\mathscr{L}\Sigma^1_n$, $n \geqslant 2$. *Тогда* $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$ *и* $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi^-$ *не выполняются вместе.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{L}(\Sigma\Pi)^1_1$. Если $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$ и $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi^-$, то по лемме 22.6 $\boldsymbol{p}$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$-вынуждает $\varphi[\underline{G}]$ и $\varphi^-[\underline{G}]$ над достаточно большой СТМ $\mathfrak{M}$, противоречие. Если $\varphi \in \mathscr{L}\Sigma^1_n$, $n \geqslant 2$, то результат следует из 3°. Лемма 22.7 доказана.

§ 23. Хвостовая инвариантность

Теоремы инвариантности типичны для всех типов форсинга. Мы докажем две существенные теоремы инвариантности для вспомогательного форсинга. Первая теорема доказывает "хвостовую" инвариантность, вторая же (§ 24) исследует пермутационную инвариантность.

Если $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \langle \boldsymbol{\pi}_\alpha{}_{\alpha<\lambda} \rangle \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и $\gamma < \lambda = \operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\pi}}$, то γ-*хвостом* $\vec{\boldsymbol{\pi}}{\restriction}_{\geqslant\gamma}$ назовем сужение $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction [\gamma, \lambda)$ на ординальный полуинтервал $[\gamma, \lambda) = \{\alpha \colon \gamma \leqslant \alpha < \lambda\}$. Тогда множество $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}{\restriction}_{\geqslant\gamma}) = \bigcup^{\mathrm{cw}}_{\gamma\leqslant\alpha<\lambda} \vec{\boldsymbol{\pi}}(\alpha)$ открыто-плотно в $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$ по лемме 14.4, (iii), (a). Поэтому можно ожидать, что если $\vec{\boldsymbol{\varphi}}$ – другая последовательность той же длины $\lambda = \operatorname{dom}(\vec{\boldsymbol{\varphi}})$, и $\vec{\boldsymbol{\varphi}}{\restriction}_{\geqslant\gamma} = \vec{\boldsymbol{\pi}}{\restriction}_{\geqslant\gamma}$, то отношение $\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}$ тождественно $\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varphi}}}$. Так (или почти так) оно и получается.

Теорема 23.1. *Пусть* $\vec{\boldsymbol{\pi}}, \vec{\boldsymbol{\varphi}}$ *– последовательности в* $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\gamma < \lambda = \operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\pi}} = \operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\varphi}}$, $\vec{\boldsymbol{\varphi}}{\restriction}_{\geqslant\gamma} = \vec{\boldsymbol{\pi}}{\restriction}_{\geqslant\gamma}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}$, $n \geqslant 2$ *и* φ *есть формула из* $\mathscr{L}\Pi^1_n \cup \mathscr{L}\Sigma^1_{n+1}$. *Тогда* $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$ *равносильно* $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varphi}}}\,\varphi$.

Доказательство. *Часть* 1. *Случай* $\mathscr{L}\Pi^1_2$. Рассмотрим $\mathscr{L}\Sigma^1_1$-формулу $\psi(x)$. Допустим, что $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varphi}}}\,\forall x\,\psi(x)$ не имеет места, т.е. существуют такие $\vec{\boldsymbol{\varphi}}' \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}')$, что $\vec{\boldsymbol{\varphi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\varphi}}'$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varphi}}'}\,\exists x\,\psi^-(x)$. Можно предполагать, что $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}'{\restriction}_{\geqslant\gamma})$. По определению 2° (§ 22) имеется малое имя точки $\mathbf{c}$, для которого $\boldsymbol{q}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varphi}}'}\,\psi^-(\mathbf{c})$. По определению 1° найдется такой ординал $\vartheta < \lambda' = \operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\varphi}}'$, что каждое имя $\mathbf{c}'$ в формуле $\psi^-(\mathbf{c})$, включая $\mathbf{c}' = \mathbf{c}$, $\vec{\boldsymbol{\varphi}}' \restriction \vartheta$-полно, значит, и $\vec{\boldsymbol{\varphi}}'$-полно по лемме 14.2.

Определим последовательность $\vec{\boldsymbol{\pi}}'$ так, что $\operatorname{dom} \vec{\boldsymbol{\pi}}' = \lambda'$, $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\pi}}'$ и $\vec{\boldsymbol{\pi}}'{\restriction}_{\geqslant\lambda} = \vec{\boldsymbol{\varphi}}'{\restriction}_{\geqslant\lambda}$. Тогда $\vec{\boldsymbol{\pi}}'{\restriction}_{\geqslant\gamma} = \vec{\boldsymbol{\varphi}}'{\restriction}_{\geqslant\gamma}$, значит, $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}'{\restriction}_{\geqslant\gamma}) \subseteq \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}')$.

Рассмотрим любую СТМ $\mathfrak{N} \models \mathbf{ZFL}^-$, содержащую ψ, $\mathbf{c}$, $\vec{\boldsymbol{\pi}}'$, $\vec{\boldsymbol{\varphi}}'$. Тогда $\boldsymbol{q}$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}')$-вынуждает $\psi^-(\mathbf{c})[\underline{G}]$ над $\mathfrak{N}$ по лемме 22.6. Однако форсинги $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}')$, $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}')$ включают одно и то же плотное множество $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}'{\restriction}_{\geqslant\gamma}) = \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}'{\restriction}_{\geqslant\gamma})$. Следовательно, каждое имя $\mathbf{c}'$ в формуле $\psi^-(\mathbf{c})$, включая $\mathbf{c}' = \mathbf{c}$, $\vec{\boldsymbol{\pi}}'$-полно, поскольку оно $\vec{\boldsymbol{\varphi}}'$-полно, и $\boldsymbol{q}$ также $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}')$-вынуждает $\psi^-(\mathbf{c})[\underline{G}]$ над $\mathfrak{N}$. Значит, по лемме 22.6, (ii) найдется такая последовательность $\vec{\boldsymbol{\tau}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, что $\vec{\boldsymbol{\pi}}' \subseteq \vec{\boldsymbol{\tau}}$ и $\boldsymbol{q}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\tau}}}\,\psi^-(\mathbf{c})$. Но тогда $\boldsymbol{q}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\tau}}}\,\exists x\,\psi^-(x)$, поэтому не имеет места $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\forall x\,\psi(x)$, что и требовалось.

Часть 2. *Шаг* $\mathscr{L}\varPi^1_n \to \mathscr{L}\varSigma^1_{n+1}$, $n \geqslant 2$. Рассмотрим $\mathscr{L}\varPi^1_n$-формулу $\varphi(x)$. Пусть $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\exists\,x\,\varphi(x)$. По определению (см. 2° в § 22) существует малое имя точки $\mathbf{c}$, для которого $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi(\mathbf{c})$. Тогда мы имеем $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}}\,\varphi(\mathbf{c})$ по индуктивному предположению, так что $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}}\,\exists\,x\,\psi(x)$.

Часть 3. *Шаг* $\mathscr{L}\varSigma^1_n \to \mathscr{L}\varPi^1_n$, $n \geqslant 3$. Пусть φ есть $\mathscr{L}\varPi^1_n$-формула, и $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}}\,\varphi$ не имеет места. По определению 3° (§ 22) найдутся последовательность $\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,' \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и мультидерево $\boldsymbol{p}' \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,')$, для которых $\vec{\boldsymbol{\varrho}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'$, $\boldsymbol{p}' \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}'\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'}\,\varphi^-$. По лемме 14.4, (ii), (a) имеется мультидерево $\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'{\restriction}_{\geqslant\gamma})$, $\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{p}'$. Тогда $\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{r}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'}\,\varphi^-$. Зададим последовательность $\vec{\boldsymbol{\pi}}\,' \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ соотношениями $\mathrm{dom}\,\vec{\boldsymbol{\pi}}\,' = \lambda' = \mathrm{dom}\,\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'$, $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\pi}}\,'$ и $\vec{\boldsymbol{\pi}}\,'{\restriction}_{\geqslant\lambda} = \vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'{\restriction}_{\geqslant\lambda}$. Тогда $\boldsymbol{r} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}\,'{\restriction}_{\geqslant\gamma})$, $\boldsymbol{r} \leqslant \boldsymbol{p}$ и также $\boldsymbol{r}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}\,'}\,\varphi^-$ по индуктивному предположению. Мы заключаем, что и $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$ не имеет места.

Теорема 23.1 доказана.

§ 24. Пермутации

Продолжая рассуждать в $\mathbf{L}$, рассмотрим множество PERM всех таких биекций $\boldsymbol{h}\colon \omega_1 \xrightarrow{\text{на}} \omega_1$, что $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}^{-1}$ и *область неидентичности* $\mathbf{NID}(\boldsymbol{h}) = \{\xi\colon \boldsymbol{h}(\xi) \neq \xi\}$ не более чем счетна. Элементы PERM называются *пермутациями*.

Пусть $\boldsymbol{h} \in \mathrm{PERM}$. Мы продолжаем действие $\boldsymbol{h}$ следующим образом:

– если $\boldsymbol{p}$ – мультидерево, то $\boldsymbol{h}\boldsymbol{p}$ – мультидерево, $|\boldsymbol{h}\boldsymbol{p}| = \boldsymbol{h}''\boldsymbol{p} = \{\boldsymbol{h}(\xi)\colon \xi \in |\boldsymbol{p}|\}$ и $(\boldsymbol{h}\boldsymbol{p})(\boldsymbol{h}(\xi)) = \boldsymbol{p}(\xi)$ для всех $\xi \in |\boldsymbol{p}|$, таким образом, $\boldsymbol{h}\boldsymbol{p}$ тождественно суперпозиции $\boldsymbol{p} \circ (\boldsymbol{h}^{-1})$;

– если $\boldsymbol{\pi} \in \mathbf{MT}$ – мультифорсинг, то $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \circ (\boldsymbol{h}^{-1})$ – мультифорсинг, $|\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\pi}| = \boldsymbol{h}''\boldsymbol{\pi}$ и $(\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{h}(\xi)) = \boldsymbol{\pi}(\xi)$ для всех $\xi \in |\boldsymbol{\pi}|$;

– если $\mathbf{c} \subseteq \mathbf{MT} \times (\omega \times \omega)$ – имя точки, то положим $\boldsymbol{h}\mathbf{c} = \{\langle \boldsymbol{h}\boldsymbol{p}, n, i\rangle\colon \langle \boldsymbol{p}, n, i\rangle \in \mathbf{c}\}$, понятно, что $\boldsymbol{h}\mathbf{c}$ – также имя точки;

– если $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \langle \boldsymbol{\pi}_{\alpha}{}_{\alpha<\kappa}\rangle \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, то $\boldsymbol{h}\vec{\boldsymbol{\pi}} = \langle \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\pi}_{\alpha}{}_{\alpha<\kappa}\rangle$ – также последовательность из $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$;

– если $\varphi := \varphi(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ есть $\mathscr{L}$-формула (все имена явно указаны), то $\boldsymbol{h}\varphi$ есть $\varphi(\boldsymbol{h}\mathbf{c}_1, \dots, \boldsymbol{h}\mathbf{c}_n)$.

Многие определенные выше понятия и отношения PERM-инвариантны, т. е. $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{\pi}) \iff \boldsymbol{h}\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\pi})$, $\boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{\varrho} \iff \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\pi} \sqsubset \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\varrho}$ и т. д. Инвариантность также имеет место и для отношения forc.

Теорема 24.1. *Пусть* $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, $\boldsymbol{p} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$, $\boldsymbol{h} \in \mathrm{PERM}$, $n \geqslant 2$ *и* φ *принадлежит* $\mathscr{L}\varPi^1_n \cup \mathscr{L}\varSigma^1_{n+1}$. *Тогда* $\boldsymbol{p}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\,\varphi$ *равносильно* $(\boldsymbol{h}\boldsymbol{p})\,\mathrm{forc}_{\boldsymbol{h}\vec{\boldsymbol{\pi}}}(\boldsymbol{h}\varphi)$.

Доказательство. Пусть $\vec{\boldsymbol{\varrho}} = \boldsymbol{h}\vec{\boldsymbol{\pi}}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{h}\boldsymbol{p}$.

Часть 1. *Случай* $\mathscr{L}\varPi^1_2$. Пусть $\varphi(x)$ есть $\mathscr{L}\varSigma^1_1$ формула, $\psi(x) := \boldsymbol{h}\varphi(x)$, и $\boldsymbol{q}\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}}\,\forall\,x\,\psi(x)$ не выполнено. По определению (1°, 2° в § 22) имеются последовательность $\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,' \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, мультидерево $\boldsymbol{q}' \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,')$ и малое имя точки $\mathbf{d}$, для которых $\vec{\boldsymbol{\varrho}} \subset \vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'$, $\boldsymbol{q}' \leqslant \boldsymbol{q}$, и $\boldsymbol{q}'\,\mathrm{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'}\,\psi^-(\mathbf{d})$. Тогда последовательность $\vec{\boldsymbol{\pi}}\,' = \boldsymbol{h}\vec{\boldsymbol{\varrho}}\,'$ удовлетворяет $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subset \vec{\boldsymbol{\pi}}\,'$, мультидерево $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{h}\boldsymbol{q}'$ принадлежит $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}\,')$, $\boldsymbol{p}' \leqslant \boldsymbol{p}$, а $\mathbf{c} = \boldsymbol{h}\mathbf{d}$ есть малое имя точки. Но здесь нельзя сразу утверждать, что

$\boldsymbol{p}' \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}'} \varphi^-(\mathbf{c})$, ибо существование $\mathfrak{M}$ и ϑ, как в 1° § 22, необязательно сохраняется действием $\boldsymbol{h}^{-1}$ или $\boldsymbol{h}$.

Чтобы обойти эту трудность, пусть $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFL}^-$ есть любая СТМ, содержащая $\vec{\boldsymbol{\pi}}'$, $\vec{\boldsymbol{\varrho}}'$, $\boldsymbol{h}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ и (все имена в) φ, ψ. Тогда $\boldsymbol{q}'$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varrho}}')$-вынуждает $\psi^-(\mathbf{d})[\underline{G}]$ над $\mathfrak{M}$ по лемме 22.6, (i). Но тогда $\boldsymbol{p}'$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}}')$-вынуждает $\varphi^-(\mathbf{c})[\underline{G}]$ над $\mathfrak{M}$ по стандартным теоремам форсинга. Лемма 22.6, (ii) дает такую последовательность $\vec{\boldsymbol{\tau}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ с $\vec{\boldsymbol{\pi}}' \subset \vec{\boldsymbol{\tau}}$, что $\boldsymbol{p}' \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\tau}}} \varphi^-(\mathbf{c})$, и потому $\boldsymbol{p}' \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\tau}}} \exists\, x\, \varphi^-(x)$ согласно 2°. Но $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subset \vec{\boldsymbol{\pi}}' \subset \vec{\boldsymbol{\tau}}$ и $\boldsymbol{p}' \leqslant \boldsymbol{p}$, значит, $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \forall\, x\, \varphi(x)$ не выполнено по 3°, что и требовалось.

Часть 2. *Шаг* $\mathscr{L}\Pi^1_n \to \mathscr{L}\Sigma^1_{n+1}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\varphi(x)$ есть $\mathscr{L}\Pi^1_n$-формула, и $\psi(x) := \boldsymbol{h}\varphi(x)$. Допустим, что $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \exists\, x\, \varphi(x)$. По определению, см. 2° в § 22, существует малое имя точки $\mathbf{c}$, удовлетворяющее $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \varphi(\mathbf{c})$. Тогда мы имеем $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}} \psi(\mathbf{d})$ по индуктивному предположению, где $\mathbf{d} = \boldsymbol{h}\mathbf{c}$ само есть малое имя точки. Значит, $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}} \exists\, x\, \psi(x)$.

Часть 3. *Шаг* $\mathscr{L}\Sigma^1_n \to \mathscr{L}\Pi^1_n$, $n \geqslant 3$. Пусть $\varphi(x)$ есть $\mathscr{L}\Pi^1_n$-формула, и $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}} \psi$ не выполнено, где $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{h}\boldsymbol{p}$, $\vec{\boldsymbol{\varrho}} = \boldsymbol{h}\vec{\boldsymbol{\pi}}$, а ψ есть $\boldsymbol{h}\varphi$, как и выше. Согласно 3° имеются такие последовательность $\vec{\boldsymbol{\varrho}}' \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и мультидерево $\boldsymbol{q}' \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\varrho}}')$, что $\vec{\boldsymbol{\varrho}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\varrho}}'$, $\boldsymbol{q}' \leqslant \boldsymbol{q}$, и $\boldsymbol{q}' \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\varrho}}'} \psi^-$. Теперь пусть $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{h}^{-1}\boldsymbol{q}'$ и $\vec{\boldsymbol{\pi}}' = \boldsymbol{h}^{-1}\vec{\boldsymbol{\varrho}}'$, так что $\boldsymbol{p}' \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\vec{\boldsymbol{\pi}} \subseteq \vec{\boldsymbol{\pi}}'$. Имеем $\boldsymbol{p}' \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}'} \varphi^-$ по индуктивному предположению. Значит, $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}} \varphi$ не выполнено, что и требовалось.

Теорема 24.1 доказана.

§ 25. Вынуждение внутри ключевой последовательности

Согласно следующей теореме 25.3, вынуждение $\operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}$, рассмотренное со счетными начальными сегментами $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \alpha$ ключевой последовательности $\vec{\mathbb{\Pi}}$, тождественно обычному $\mathbb{P}$-вынуждению до уровня $\mathbb{n} - 1$.

Мы рассуждаем в $\mathbf{L}$. Напомним, что число $\mathbb{n}$ и ключевая последовательность $\vec{\mathbb{\Pi}} = \langle \mathbb{\Pi}_\alpha \rangle_{\alpha<\omega_1} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}_{\omega_1}$, удовлетворяющая пп. (i)–(iv) теоремы 15.3, введены посредством общего соглашения 15.4, и $\mathbb{P} = \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}})$ – наш ключевой форсинг. Дополнительно, $\mathbb{n} \geqslant 4$ по соглашению 22.1.

Определение 25.1. Для краткости пишем $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\alpha\varphi}$ вместо $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}}\restriction\alpha} \varphi$. Пусть $\boldsymbol{p} \operatorname{forc} \varphi$ означает: $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\alpha\varphi}$ для какого-то $\alpha < \omega_1$.

Лемма 25.2 (в $\mathbf{L}$). *Пусть* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{P}$, $\alpha < \omega_1$ *и* $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\alpha\varphi}$. *Тогда*

(i) *если* $\alpha \leqslant \beta < \omega_1$, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{P}_{<\beta} = \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \beta)$ *и* $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, *то* $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\beta\varphi}$;

(ii) *если* $\boldsymbol{q} \in \mathbb{P}$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, *то* $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\beta\varphi}$ *для некоторого* β, $\alpha \leqslant \beta < \omega_1$;

(iii) *если* $\boldsymbol{q} \in \mathbb{P}$ *и* $\boldsymbol{q} \operatorname{forc} \varphi^-$, *то* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ *являются гпд*;

(iv) *следовательно, во-первых, если* $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{P}$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$ *и* $\boldsymbol{p} \operatorname{forc} \varphi$, *то* $\boldsymbol{q} \operatorname{forc} \varphi$, *и во-вторых*, $\boldsymbol{p} \operatorname{forc} \varphi$, $\boldsymbol{p} \operatorname{forc} \varphi^-$ *не выполняются вместе*.

Доказательство. Для вывода (i) используем лемму 22.3. Для вывода (ii) выберем β так, что $\alpha < \beta < \omega_1$ и $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \beta)$ и применим (i). Для вывода (iii) заметим, что $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ несовместны в $\mathbb{P}$, ибо иначе (i) ведет к противоречию, но несовместность в $\mathbb{P}$ влечет свойство гпд по следствию 4.3. Лемма 25.2 доказана.

Теорема 25.3. *Если φ – замкнутая $\mathscr{L}$-формула в*

$$\mathscr{L}(\varSigma\varPi)^1_1 \cup \mathscr{L}\varSigma^1_2 \cup \mathscr{L}\varPi^1_2 \cup \dots \cup \mathscr{L}\varSigma^1_{\mathbf{n}-2} \cup \mathscr{L}\varPi^1_{\mathbf{n}-2} \cup \mathscr{L}\varSigma^1_{\mathbf{n}-1}$$

и $\boldsymbol{p} \in \mathbb{P}$, то $\boldsymbol{p}$ $\mathbb{P}$-вынуждает $\varphi[\underline{G}]$ над $\mathbf{L}$ в обычном смысле, если и только если $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}\varphi$.

Доказательство. Через $\Vdash$ обозначим обычное $\mathbb{P}$-вынуждение над $\mathbf{L}$.

Часть 1. *φ – формула из $\mathscr{L}(\varSigma\varPi)^1_1$.* Если $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}\varphi$, то $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}}\restriction\gamma}\varphi$ для какого-то $\gamma < \omega_1$, и тогда $\boldsymbol{p} \Vdash \varphi[\underline{G}]$ по лемме 22.6, (i) с $\vec{\boldsymbol{\varphi}} = \vec{\mathbb{\Pi}}$ и $\mathfrak{N} = \mathbf{L}$.

Пусть теперь $\boldsymbol{p} \Vdash \varphi[\underline{G}]$. Существует такой ординал $\gamma_0 < \omega_1$, что $\boldsymbol{p} \in \mathbb{P}_{\gamma_0} = \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0)$ и φ (т. е. все имена в φ) принадлежит $\mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0)$. (См. определение 14.3 о моделях $\mathfrak{L}(x) \models \mathbf{ZFL}^-$.) Множество U всех таких последовательностей $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, что $\gamma_0 < \operatorname{dom}\vec{\boldsymbol{\pi}}$ и найдется ординал ϑ, $\gamma_0 < \vartheta < \operatorname{dom}\vec{\boldsymbol{\pi}}$, для которого $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta \subset_{\mathfrak{L}(\vec{\boldsymbol{\pi}}\restriction\vartheta)} \vec{\boldsymbol{\pi}}$, плотно в $\overrightarrow{\mathbf{MF}}$ по лемме 14.4, (ii), и принадлежит $\boldsymbol{\Delta}_1(\mathrm{HC})$. Поэтому по следствию 15.5 имеется такой ординал $\gamma < \omega_1$, что $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \in U$. Пусть ϑ – соответствующий ординал, т. е. $\gamma_0 < \vartheta < \gamma = \operatorname{dom}\vec{\boldsymbol{\pi}}$ и $\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta \subset_{\mathfrak{L}(\vec{\boldsymbol{\pi}}\restriction\vartheta)} \vec{\boldsymbol{\pi}}$. Утверждается, что $\boldsymbol{p}$ $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta)$-вынуждает $\varphi[\underline{G}]$ над $\mathfrak{L}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta)$ в обычном смысле – тогда по определению $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\varphi$, что и требовалось.

Для доказательства утверждения предположим противное. Тогда имеется мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \vartheta)$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, $\mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta)$-вынуждающее $\neg\varphi[\underline{G}]$ над $\mathfrak{L}(\vec{\boldsymbol{\pi}} \restriction \vartheta)$. Отсюда по определению (см. 1° в § 22) следует $\boldsymbol{q}\operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\neg\varphi$, т. е. $\boldsymbol{q}\operatorname{forc}\neg\varphi$, далее, $\boldsymbol{q} \Vdash \neg\varphi[\underline{G}]$ (см. выше), с противоречием к $\boldsymbol{p} \Vdash \varphi[\underline{G}]$.

Часть 2. *Шаг $\mathscr{L}\varPi^1_n \to \mathscr{L}\varSigma^1_{n+1}$ $(n \geqslant 1)$.* Рассмотрим любую $\mathscr{L}\varPi^1_n$-формулу $\varphi(x)$. Пусть $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}\exists x\,\varphi(x)$. По определению существует малое имя точки $\mathbf{c}$, для которого $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}\varphi(\mathbf{c})$. По индуктивному предположению $\boldsymbol{p} \Vdash \varphi(c)[\underline{G}]$, откуда $\boldsymbol{p} \Vdash \exists x\,\varphi(x)[\underline{G}]$. Обратно, пусть $\boldsymbol{p} \Vdash \exists x\,\varphi(x)[\underline{G}]$. Раз $\mathbb{P}$ есть CCC форсинг, найдется малое имя точки $\mathbf{c}$ (в $\mathbf{L}$), для которого $\boldsymbol{p} \Vdash \varphi(\mathbf{c})[\underline{G}]$. Тогда $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}\varphi(\mathbf{c})$ по индуктивному предположению, значит, $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}\exists x\,\varphi(x)$.

Часть 3. *Шаг $\mathscr{L}\varSigma^1_n \to \mathscr{L}\varPi^1_n$ $(2 \leqslant n \leqslant \mathbb{n} - 2)$.* Пусть φ – замкнутая $\mathscr{L}\varSigma^1_n$-формула, и $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}\varphi^-$. По лемме 25.2, (iv) нет таких мультидеревьев $\boldsymbol{q} \in \mathbb{P}$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$, что $\boldsymbol{q}\operatorname{forc}\varphi$. Отсюда $\boldsymbol{p} \Vdash \varphi^-$ по индуктивному предположению.

Обратно, пусть $\boldsymbol{p} \Vdash \varphi^-$. Найдется такой ординал $\gamma_0 < \omega_1$, что $\boldsymbol{p} \in \mathbb{P}_{\gamma_0} = \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0)$ и φ принадлежит модели $\mathfrak{L}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0)$. Рассмотрим множество U всех таких последовательностей $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, что $\operatorname{dom}\vec{\boldsymbol{\pi}} > \gamma_0$ и существует мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$, удовлетворяющее $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}\operatorname{forc}_{\vec{\boldsymbol{\pi}}}\varphi$. Имеем $U \in \boldsymbol{\Sigma}_{n-1}(\mathrm{HC})$ (с параметрами φ, $\boldsymbol{p}_0$) по лемме 22.5, значит, $U \in \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{n}-3}(\mathrm{HC})$, где $\mathbb{n} \geqslant 4$ согласно общему соглашению 22.1. Следовательно, согласно общему соглашению 15.4 (и п. (iii) теоремы 15.3) найдется такой ординал $\gamma < \omega_1$, что $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma$ блокирует U.

Случай 1. *$\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \in U$.* Пусть $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\boldsymbol{\pi}})$ – соответствующее мультидерево, т. е. в частности $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\gamma > \gamma_0$. Имеем $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}\operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}}\restriction\gamma}\varphi$, так что $\boldsymbol{q} \Vdash \varphi[\underline{G}]$ по индуктивному предположению, что противоречит выбору $\boldsymbol{p}$. Значит, случай 1 невозможен.

Случай 2. *Ни одна последовательность в U не продолжает $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma$.* Можно предполагать, что $\gamma > \gamma_0$. (Если нет, то заменим γ на $\gamma_0{+}1$.) Утверждается, что $\boldsymbol{p}\operatorname{forc}_\gamma\varphi^-$. В самом деле, иначе согласно 3° найдутся такие последовательность

$\vec{\pi} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$ и мультидерево $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\pi})$, что $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \subseteq \vec{\pi}$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\vec{\varphi}} \varphi$. Но тогда $\vec{\pi}$ принадлежит U. Однако $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \subseteq \vec{\pi}$, что противоречит предположению случая 2. Таким образом, $\boldsymbol{p} \operatorname{forc} \varphi^{-}$, что и требовалось.

Теорема 25.3 доказана.

§ 26. Теорема элементарной эквивалентности

Доказательство (теоремы 20.2). Предположим противное. Тогда существует такая $\Pi^1_{\mathbb{n}-2}$-формула $\varphi(r,x)$, с единственным параметром $r \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[G \restriction X]$ и точка $x_0 \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[G]$, что $\varphi(r,x_0)$ истинно в $\mathbf{L}[G]$, но нет таких $x \in 2^\omega \cap \mathbf{L}[G \restriction X]$, что $\varphi(r,x)$ истинно в $\mathbf{L}[G]$. Согласно подходящему варианту леммы 12.1, мы имеем $r = \mathbf{c}_0[G]$, где $\mathbf{c}_0 \subseteq \mathbf{MT}(\mathbb{\Pi} \restriction X) \times \omega \times 2$ – малое $(\mathbb{\Pi} \restriction X)$-полное имя точки. (Обозначения см. § 17.) Также имеется малое $\mathbb{\Pi}$-полное имя точки $\mathbf{c} \subseteq \mathbb{P} \times \omega \times 2$, для которого $x_0 = \mathbf{c}[\underline{G}]$.

По теореме 25.3 найдется такое мультидерево $\boldsymbol{p}_0 \in G$, что

(1) $\boldsymbol{p}_0$ $\mathbb{P}$-вынуждает “$\varphi(\mathbf{c}_0[\underline{G}], \mathbf{c}[\underline{G}]) \wedge \neg \exists x \in \mathbf{L}[\underline{G} \restriction X]\, \varphi(\mathbf{c}_0[\underline{G}], x)$” над $\mathbf{L}$;

(2) $\boldsymbol{p}_0 \operatorname{forc} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c})$, т.е. $\boldsymbol{p}_0 \operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c})$, где $\gamma_0 < \omega_1$ – и можно предполагать, что также выполнено $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0)$.

Коль скоро $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}_0$ – малые имена, найдется ординал $\delta < \omega_1$, для которого

(3) $|\mathbf{c}_0| \subseteq \delta \cap X$, $|\mathbf{c}| \subseteq \delta$ и $|\boldsymbol{p}_0| \subseteq \delta$.

Поскольку $|\vec{\mathbb{\Pi}}| = \omega_1$ согласно следствию 16.2, мы можем увеличить γ_0, если потребуется, чтобы выполнялось

(4) $\delta \subseteq |\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0|$, т.е. если $\eta < \delta$, то $\eta \in |\mathbb{\Pi}_{\alpha'}|$ для какого-то $\alpha' = \alpha'(\eta) < \gamma_0$.

Отсюда мы будем выводить противоречие. Положим $D = \delta \setminus X$.

Рассмотрим множество U всех таких последовательностей $\vec{\pi} \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, что $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0 \subset \vec{\pi}$, откуда $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbf{MT}(\vec{\pi})$ по (2), и существуют $\zeta < \operatorname{dom} \vec{\pi}$ и $\boldsymbol{h} \in \mathrm{PERM}$, для которых

(A) $\mathbf{NID}(\boldsymbol{h}) \cap (\delta \cap X) = \varnothing$, и $\boldsymbol{h}$ отображает D на множество $R \subseteq X \setminus \delta$;

(B) $\gamma_0 \leqslant \zeta < \operatorname{dom} \vec{\pi}$ и $(\boldsymbol{h}\vec{\pi}){\restriction}_{\geqslant \zeta} = \vec{\pi}{\restriction}_{\geqslant \zeta}$, так что $\boldsymbol{h}(\vec{\pi}(\alpha)) = \vec{\pi}(\alpha)$ при $\zeta \leqslant \alpha < \operatorname{dom} \vec{\pi}$.

Рутинная оценка показывает, что U является $\mathbf{\Sigma}_1(\mathrm{HC})$-множеством (параметры $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0$, δ), следовательно, $\mathbf{\Sigma}_{\mathbf{n}-3}(\mathrm{HC})$-множеством, так как $\mathbb{n} \geqslant 4$ согласно общему соглашению 22.1. Значит, согласно 15.4, имеется такой ординал $\gamma < \omega_1$, что $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma$ блокирует U.

Случай 1. $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \in U$, *так что* (A), (B) *выполнены для* $\vec{\pi} = \vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma$, *при помощи каких-то* $\zeta \in [\gamma_0, \gamma)$ *и* $\boldsymbol{h} \in \mathrm{PERM}$. В частности, по (B), $\boldsymbol{h}(\mathbb{\Pi}_\alpha) = \mathbb{\Pi}_\alpha$ при $\zeta \leqslant \alpha < \gamma$. Имеем $\boldsymbol{p}_0 \operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c})$ согласно (2) и лемме 22.3. Пусть $\mathbf{c}' = \boldsymbol{h}\mathbf{c}$, $\boldsymbol{p}_0' = \boldsymbol{h}\boldsymbol{p}_0$. Тогда $\boldsymbol{h}\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_0$, так как $|\mathbf{c}_0| \cap \mathbf{NID}(\boldsymbol{h}) = \varnothing$ по (A). Теорема 24.1 дает $\boldsymbol{p}_0' \operatorname{forc}_{\boldsymbol{h} \cdot (\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}')$. Значит, $\boldsymbol{p}_0' \operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}')$ согласно (B) и теореме 23.1. Но общая область $|\boldsymbol{p}_0| \cap |\boldsymbol{p}_0'|$ не пересекает $\mathbf{NID}(\boldsymbol{h})$ по (A), ибо $|\boldsymbol{p}_0| \subseteq \delta$. Значит, $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{p}_0'$ совместны, так что $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 \cup \boldsymbol{p}_0' \in \mathbf{MT}$ (необязательно $\in \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$) и $\boldsymbol{p} \leqslant \boldsymbol{p}_0'$, поэтому $\boldsymbol{p} \operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}')$.

К сожалению, здесь нельзя сразу применить теорему 25.3 для вывода, что $\boldsymbol{p}$ $\mathbb{P}$-вынуждает $\varphi(\mathbf{c}_0[\underline{G}], \mathbf{c}'[\underline{G}])$ над $\mathbf{L}$, просто по той причине, что $\boldsymbol{p}$ необязательно принадлежит $\mathbb{P}$. Требуется дополнительное рассуждение. Напомним, что $\boldsymbol{p}_0 \in \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0)$, поэтому $\boldsymbol{p}_0' \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{h} \cdot (\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma_0))$. Поскольку $\zeta > \gamma_0$, найдется мультидерево $\boldsymbol{q}_0 \in \mathbf{MT}(\boldsymbol{h} \cdot \mathbb{\Pi}_\zeta)$, удовлетворяющее $|\boldsymbol{q}_0| = |\boldsymbol{p}'_0|$ и $\boldsymbol{q}_0 \leqslant \boldsymbol{p}'_0$. Тогда $\boldsymbol{q}_0 \operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}}\restriction\gamma} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}')$ (так как $\boldsymbol{p}'_0 \operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}}\restriction\gamma} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}')$), и $\boldsymbol{q}_0 \in \mathbf{MT}(\mathbb{\Pi}_\zeta)$, поскольку $\boldsymbol{h} \cdot \mathbb{\Pi}_\zeta = \mathbb{\Pi}_\zeta$. Итак, $\boldsymbol{q}_0 \in \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$. Сверх того, $\boldsymbol{q}_0$ совместно с $\boldsymbol{p}_0$ в $\mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$, поскольку $|\boldsymbol{q}_0| = |\boldsymbol{p}'_0|$ и $\boldsymbol{q}_0 \leqslant \boldsymbol{p}'_0$, и $\boldsymbol{p}'_0$ совпадает с $\boldsymbol{p}_0$ на общей области $|\boldsymbol{p}_0| \cap |\boldsymbol{p}'_0| = \delta \cap X$. Поэтому найдется такое $\boldsymbol{q} \in \mathbf{MT}(\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma)$, что $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{q} \leqslant \boldsymbol{q}_0$. Тогда $\boldsymbol{q} \operatorname{forc}_{\vec{\mathbb{\Pi}}\restriction\gamma} \varphi(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}')$, и мы заключаем, что

(5) $\boldsymbol{q}$ $\mathbb{P}$-вынуждает $\varphi(\mathbf{c}_0[\underline{G}], \mathbf{c}'[\underline{G}])$ над $\mathbf{L}$

по теореме 25.3. Однако по построению $|\mathbf{c}'| \subseteq (\delta \cap X) \cup R \subseteq X$, так что вынуждается $\mathbf{c}'[\underline{G}] \in \mathbf{L}[\underline{G} \restriction X]$. Значит, $\boldsymbol{q}$ $\mathbb{P}$-вынуждает $\exists\, x \in \mathbf{L}[\underline{G} \restriction X]\, \varphi(\mathbf{c}_0[\underline{G}], x)$ над $\mathbf{L}$ по (5), что противоречит (1). Противоречие закрывает случай 1.

Случай 2. *Ни одна последовательность в U не продолжает $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma$.* Можно предполагать, что $\gamma > \gamma_0$. (Иначе заменим γ на $\gamma_0 + 1$.) Выберем любое множество $R \subseteq X \setminus \delta$, удовлетворяющее

$$\operatorname{card} R = \operatorname{card} D \quad \text{и} \quad R \cap \left(\bigcup_{\alpha<\gamma} |\mathbb{\Pi}_\alpha|\right) = \varnothing.$$

Однако $D \subseteq \delta$, так что $D \cap R = \varnothing$, и имеется такая пермутация $\boldsymbol{h} \in \mathrm{PERM}$, $\boldsymbol{h} \colon D \xrightarrow{\text{на}} R$, что $\mathbf{NID}(\boldsymbol{h}) = D \cup R$, значит, (A) выполнено.

Берем любой ординал λ, $\gamma < \lambda < \omega_1$. Наш план состоит в том, чтобы несколько изменить $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \lambda$, чтобы также было выполнено (B) для $\zeta = \gamma$. Изменение заменит R-часть последовательности $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \lambda$ над γ $\boldsymbol{h}$-копией ее D-части. Чтобы выполнить это в деталях, напомним, что $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \lambda = \langle \mathbb{\Pi}_{\alpha} {}_{\alpha<\lambda} \rangle$, где каждое $\mathbb{\Pi}_\alpha$ – малый особый мультифорсинг со счетной областью $d_\alpha = |\mathbb{\Pi}_\alpha| \subseteq \omega_1$. Если $\alpha < \gamma$, то положим $\boldsymbol{\pi}_\alpha = \mathbb{\Pi}_\alpha$. Теперь пусть $\gamma \leqslant \alpha < \lambda$. Тогда $D \subseteq |\mathbb{\Pi}_\alpha|$ по (4). На основе $\mathbb{\Pi}_\alpha$, определим новый мультифорсинг $\boldsymbol{\pi}_\alpha$ так, что

(a) $|\boldsymbol{\pi}_\alpha| = d_\alpha \cup R$ – заметим, что $D \subseteq d_\alpha = |\mathbb{\Pi}_\alpha| \subseteq |\boldsymbol{\pi}_\alpha|$ в этом случае, так как $D \subseteq \delta \subseteq |\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma|$ по (4) (поскольку $\gamma_0 \leqslant \gamma$);

(b) если $\xi \in d_\alpha \setminus R$, то $\boldsymbol{\pi}_\alpha(\xi) = \mathbb{\Pi}_\alpha(\xi)$;

(c) если $\xi \in D$, т. е. $\boldsymbol{h}(\xi) = \eta \in R$, то $\boldsymbol{\pi}_\alpha(\eta) = \mathbb{\Pi}_\alpha(\xi)$.

Мы утверждаем, что $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \langle \boldsymbol{\pi}_{\alpha} {}_{\alpha<\lambda} \rangle \in \overrightarrow{\mathbf{MF}}$, т. е. если $\alpha < \beta < \lambda$, то $\boldsymbol{\pi}_\alpha \sqsubset \boldsymbol{\pi}_\beta$. Другими словами, если $\eta \in |\boldsymbol{\pi}_\alpha|$, то $\boldsymbol{\pi}_\alpha(\eta) \sqsubset \boldsymbol{\pi}_\beta(\eta)$.

Если $\eta \notin R$, то $\boldsymbol{\pi}_\alpha(\eta) = \mathbb{\Pi}_\alpha(\eta)$ по построению. Осталось проверить, что $\boldsymbol{\pi}_\alpha(\eta) \sqsubset \boldsymbol{\pi}_\beta(\eta)$ выполнено при условии, что $\alpha < \beta < \lambda$, $\eta = \boldsymbol{h}(\xi) \in R \cap |\boldsymbol{\pi}_\alpha|$ и $\xi \in D$. Если при этом $\alpha < \gamma$, то $R \cap |\boldsymbol{\pi}_\alpha| = \varnothing$ по выбору R, так что осталось рассмотреть случай $\gamma \leqslant \alpha$. Тогда $\xi, \eta \in |\boldsymbol{\pi}_\alpha|$ по построению, и мы имеем $\boldsymbol{\pi}_\alpha(\eta) = \mathbb{\Pi}_\alpha(\xi)$ и $\boldsymbol{\pi}_\beta(\eta) = \mathbb{\Pi}_\beta(\xi)$. Поэтому $\boldsymbol{\pi}_\alpha(\xi) \sqsubset \boldsymbol{\pi}_\beta(\xi)$, что и требовалось.

Мы утверждаем, что последовательность $\vec{\boldsymbol{\pi}} = \langle \boldsymbol{\pi}_{\alpha} {}_{\alpha<\lambda} \rangle$ удовлетворяет $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \subseteq \vec{\boldsymbol{\pi}}$ и (A), (B). В самом деле, $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \subseteq \vec{\boldsymbol{\pi}}$, так как $\gamma \geqslant \gamma_0$. (A) выполнено по построению. Утверждается, что (B) выполнено для $\zeta = \gamma$, т. е. если $\gamma \leqslant \alpha < \lambda$, то $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\pi}_\alpha = \boldsymbol{\pi}_\alpha$. Действительно, $D \cup R \subseteq |\boldsymbol{\pi}_\alpha|$ по (a), так что $\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{\pi}_\alpha = \boldsymbol{\pi}_\alpha$ следует из (b), (c). Итак, $\vec{\boldsymbol{\pi}} \in U$ и $\vec{\mathbb{\Pi}} \restriction \gamma \subset \vec{\boldsymbol{\pi}}$. Но это противоречит гипотезе случая 2.

Каждый из двух случаев привел к противоречию, что и завершает доказательство теоремы 20.2. Таким образом, теорема 1.2 также доказана.

§ 27. Замечания и проблемы

Можно спросить, что происходит с теоремой отделимости в модели из § 19 на других проективных уровнях $m \neq \mathfrak{n}$. Для более высоких уровней оказывается, что в модели $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_H]$ теоремы 20.1 имеется "хорошее" полное $\varDelta^1_{\mathfrak{n}+1}$-упорядочение точек 2^ω длины ω_1. (Щели в Δ_H не разрешают конструкцию полного упорядочения следствия 18.3 на уровне $\mathfrak{n}$!) Отсюда стандартным рассуждением выводится теорема отделимости для $\mathbf{\Pi}^1_m$ и ее нарушение для $\mathbf{\Sigma}^1_m$, для всех $m > \mathfrak{n}$, в модели $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_H]$. Что же до уровней $3 \leqslant m < \mathfrak{n}$, мы предполагаем, что отделимость также выполнена для $\mathbf{\Pi}^1_m$ и не выполнена для $\mathbf{\Sigma}^1_m$ в $\mathbf{L}[G \restriction \Delta_H]$, но это открытый вопрос.

Через $\mathbb{P}_\mathfrak{n}$ обозначим форсинг $\mathbb{P}$ § 16, определенный для данного $\mathfrak{n} \geqslant 3$. Используя определенную *амальгамацию* всех $\mathbb{P}_\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \geqslant 3$, заданную при помощи сложной конструкции типа произведения, впервые использованной в [18, ч. 1] и [40], можно построить такое генерическое расширение $\mathbf{L}$, в котором теорема отделимости неверна для всех классов $\mathbf{\Sigma}^1_\mathfrak{n}$, $\mathbf{\Pi}^1_\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \geqslant 3$.

Наконец, интересной, и вероятно очень трудной проблемой является построение генерического расширения $\mathbf{L}$, в котором теорема отделимости выполнена для данного класса $\mathbf{\Sigma}^1_\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n} \geqslant 3$, начиная, к примеру, с $\mathbf{\Sigma}^1_3$. Эта проблема открыта с раннего периода истории форсинга, см. [16, проблема 3029]. В этой связи, можно упомянуть недавний препринт Хоффельнера [41] с интересными результатами.

Авторы признательны анонимному рецензенту за ценные замечания и предложения, существенно улучшившие изложение.

Список литературы

1. Н. Н. Лузин, *Лекции об аналитических множествах и их приложениях*, ГИТТЛ, М., 1953, 359 с.; пер. с фр.: N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Collection de monographies sur la theorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1930, xv+328 pp.
2. П. С. Новиков, "О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств", Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его 60-летию, Тр. МИАН СССР, **38**, Изд-во АН СССР, М., 1951, 279–316; англ. пер.: P. S. Novikov, "On the consistency of some propositions of the descriptive theory of sets", Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963, 51–89.
3. В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств", *УМН*, **58**:5(353) (2003), 3–88; англ. пер.: V. G. Kanovei, V. A. Lyubetskii, "On some classical problems of descriptive set theory", *Russian Math. Surveys*, **5** (2003), 839–927.
4. Ya. N. Moschovakis, *Descriptive set theory*, Stud. Logic Found. Math., **100**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1980, xii+637 pp.
5. A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995, xviii+402 pp.
6. Н. Н. Лузин, "Об аналитических множествах": Н. Н. Лузин, *Собрание сочинений*, т. II: *Дескриптивная теория множеств*, Изд-во АН СССР, М., 1958, 380–459; пер. с фр.: N. Lusin, "Sur les ensembles analytiques", *Fund. Math.*, **10** (1927), 1–95.
7. P. Novikoff, "Sur les fonctions implicites mesurables B", *Fund. Math.*, **17** (1931), 8–25.

8. P. Novikoff, “Sur la séparabilité des ensembles projectifs de seconde classe”, *Fund. Math.*, **25** (1935), 459–466.
9. C. Kuratowski, “Sur les théorèmes de séparation dans la théorie des ensembles”, *Fund. Math.*, **26** (1936), 183–191.
10. J. W. Addison, “Some consequences of the axiom of constructibility”, *Fund. Math.*, **46** (1959), 337–357.
11. J. W. Addison, Y. N. Moschovakis, “Some consequences of the axiom of definable determinateness”, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **59**:3 (1968), 708–712.
12. D. A. Martin, “The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **74** (1968), 687–689.
13. J. R. Steel, “Determinateness and the separation property”, *J. Symb. Log.*, **46**:1 (1981), 41–44.
14. J. R. Steel, *The core model iterability problem*, Lecture Notes Logic, **8**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, iv+112 pp.
15. K. Hauser, R.-D. Schindler, “Projective uniformization revisited”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **103**:1-3 (2000), 109–153.
16. A. R. D. Mathias, “Surrealist landscape with figures (a survey of recent results in set theory)”, *Period. Math. Hungar.*, **10**:2-3 (1979), 109–175.
17. R. B. Jensen, R. M. Solovay, “Some applications of almost disjoint sets”, *Mathematical logic and foundations of set theory* (Jerusalem, 1968), North-Holland, Amsterdam, 1970, 84–104.
18. L. Harrington, *The constructible reals can be* (*almost*) *anything*, Handwritten notes, in four parts, 1974, 8 pp., http://logic-library.berkeley.edu/catalog/detail/2135.
19. R. Jensen, “Definable sets of minimal degree”, *Mathematical logic and foundations of set theory* (Jerusalem, 1968), North-Holland, Amsterdam, 1970, 122–128.
20. T. Jech, *Set theory*, 3rd millennium ed., rev. and exp., Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2003, xiv+769 pp.
21. A. Enayat, “On the Leibniz–Mycielski axiom in set theory”, *Fund. Math.*, **181**:3 (2004), 215–231.
22. V. Kanovei, V. Lyubetsky, “A definable E_0-class containing no definable elements”, *Arch. Math. Logic*, **54**:5-6 (2015), 711–723.
23. В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, “Определимое счетное множество, не содержащее определимых элементов”, *Матем. заметки*, **102**:3 (2017), 369–382; англ. пер.: V. G. Kanovei, V. A. Lyubetsky, “A countable definable set containing no definable elements”, *Math. Notes*, **102**:3 (2017), 338–349.
24. M. Golshani, V. Kanovei, V. Lyubetsky, “A Groszek–Laver pair of undistinguishable E_0-classes”, *MLQ Math. Log. Q.*, **63**:1-2 (2017), 19–31.
25. V. Kanovei, V. Lyubetsky, “Counterexamples to countable-section Π^1_2 uniformization and Π^1_3 separation”, *Ann. Pure Appl. Logic*, **167**:3 (2016), 262–283.
26. В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, “Неуниформизуемые множества второго проективного уровня со счетными сечениями в виде классов Витали”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:1 (2018), 65–96; англ. пер.: V. G. Kanovei, V. A. Lyubetsky, “Non-uniformizable sets of second projective level with countable cross-sections in the form of Vitali classes”, *Izv. Math.*, **82**:1 (2018), 61–90.
27. S.-D. Friedman, V. Gitman, V. Kanovei, “A model of second-order arithmetic satisfying AC but not DC”, *J. Math. Log.*, **19**:1 (2019), 1850013, 39 pp.
28. A. Enayat, V. Kanovei, “An unpublished theorem of Solovay on OD partitions of reals into two non-OD parts, revisited”, *J. Math. Log.*, 2020, 1–22, Publ. online.
29. В. Г. Кановей, “О непустоте классов в аксиоматической теории множеств”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:3 (1978), 550–579; англ. пер.: V. G. Kanoveĭ, “On the nonemptiness of classes in axiomatic set theory”, *Math. USSR-Izv.*, **12**:3 (1978), 507–535.

30. V. Kanovei, V. Lyubetsky, "Definable E_0-classes at arbitrary projective levels", *Ann. Pure Appl. Logic*, **169**:9 (2018), 851–871.
31. V. Kanovei, V. Lyubetsky, "Definable minimal collapse functions at arbitrary projective levels", *J. Symb. Log.*, **84**:1 (2019), 266–289.
32. V. Kanovei, V. Lyubetsky, "Non-uniformizable sets with countable cross-sections on a given level of the projective hierarchy", *Fund. Math.*, **245**:2 (2019), 175–215.
33. V. Kanovei, V. Lyubetsky, "On the Δ^1_n problem of Harvey Friedman", *Mathematics*, **8**:9 (2020), 1477, 30 pp.
34. U. Abraham, "A minimal model for $\neg$CH: iteration of Jensen's reals", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **281**:2 (1984), 657–674.
35. J. E. Baumgartner, R. Laver, "Iterated perfect-set forcing", *Ann. Math. Logic*, **17**:3 (1979), 271–288.
36. M. Groszek, T. Jech, "Generalized iteration of forcing", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **324**:1 (1991), 1–26.
37. V. Kanovei, "Non-Glimm–Effros equivalence relations at second projective level", *Fund. Math.*, **154**:1 (1997), 1–35.
38. V. Kanovei, "An Ulm-type classification theorem for equivalence relations in Solovay model", *J. Symb. Log.*, **62**:4 (1997), 1333–1351.
39. V. Kanovei, "On non-wellfounded iterations of the perfect set forcing", *J. Symb. Log.*, **64**:2 (1999), 551–574.
40. В. Г. Кановей, "Множество всех аналитически определимых множеств натуральных чисел может быть аналитически определимым", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **43**:6 (1979), 1259–1293; англ. пер.: V. G. Kanoveĭ, "The set of all analytically definable sets of natural numbers can be defined analytically", *Math. USSR-Izv.*, **15**:3 (1980), 469–500.
41. S. Hoffelner, *The consistency of the $\mathbf{\Sigma}^1_3$-separation property*, arXiv: 1912.11811.

Владимир Григорьевич Кановей
(Vladimir G. Kanovei)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: kanovei@iitp.ru

Поступило в редакцию
28.05.2019
21.07.2020

Василий Александрович Любецкий
(Vassily A. Lyubetsky)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: lyubetsk@iitp.ru