DOI:10.53921/itas2025_42

Вычисление полных эллиптических интегралов первого и второго рода

Хазиев Г.А.[1]

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН, 127051, г.Москва, Б. Каретный пер., д.19, стр.1 khaziev@iitp.ru

Аннотация Рассмотрены методы вычисления полных эллиптических интегралов первого и второго рода. Быстрый алгоритм вычисления полных эллиптических интегралов первого рода, основанный на вычислении арифметико-геометрического среднего, был известен Гауссу. Для интегралов второго рода новый быстрый алгоритм недавно предложил С.Ф. Адлай. Этот алгоритм отличается от ранее предложенного метода, поскольку итерационная последовательность сходится непосредственно к искомому ответу. Кратко обсуждаются возможные применения этих интегралов.

Ключевые слова: Полный эллиптический интеграл, арифметико-геометрическое среднее, вычислительная сложность.

1 Введение

Известно несколько алгоритмов вычисления полных эллиптических интегралов [1,2,3,4]. Однако разработка новых методов остаётся интересный направлением исследований. Эллиптические интегралы применяются в различных задачах, включая вычисление периода математического маятника [1], вычисление длин дуг кривых [1,5], объёмов тел [6], свойств пористых материалов и плотности упаковки [7,8], а также при моделировании кривых блеска экзопланет [9]. Решения многих краевых задач математической физики выражаются через эллиптические интегралы [10]. Так, потенциал простого слоя равномерно заряженного круглого диска может быть представлен при помощи полного эллиптического интеграла первого рода, [11, стр. 79, 433]. Задачи расчёта магнитного поля витков с током решаются при помощи полных эллиптических интегралов первого и второго родов [11, стр. 79, 80, 441]. Разнообразие практических приложений полных эллиптических интегралов позволяет считать разработку и реализацию эффективных алгоритмов для их вычисления актуальной задачей.

2 Полные эллиптические интегралы первого рода

Обозначим через $\mathrm{AGM}(a, b)$ арифметико-геометрического среднего неотрицательных положительных вещественных чисел a и b. Оно было использовано Гауссом (Johann Carl Friedrich Gauß). Для положительных вещественных чисел a и b значение $\mathrm{AGM}(a,b)$ вычисляется как предел каждой из двух последовательностей $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ и $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, где $a_0 = a$ и $b_0 = b$. Каждый раз выбирается положительное значение корня. Оно обладает свойствами $\mathrm{AGM}(a,b) = \mathrm{AGM}(b,a)$ и $\mathrm{AGM}(a,a) = a$. При $0 < x \le 1$ функция одной переменной $\mathrm{AGM}(1,x)$ ограничена сверху линейной функцией $(x+1)/2$ и быстро приближается к ней при $x \to 1$.

Практическое значение арифметико-геометрического среднего связано, в частности, с возможностью быстрого вычисления периода колебаний маятника [1]. Обозначим длину маятника через ℓ, ускорение свободного падения через g, а угол максимального отклонения маятника от положения устойчивого равновесия через θ. Тогда период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\mathrm{AGM}(1, \cos(\theta/2))}\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

При малых колебаниях $\theta \to 0$ период стремится к величине $2\pi\sqrt{\ell/g}$. Если же максимальный угол θ стремится к π, то период колебаний маятника стремится к бесконечности. В пределе маятник будет бесконечно долго подниматься, приближаясь к вертикальному положению. При этом возможны два симметричных случая в зависимости от того, с какой стороны поднимается маятник. Следовательно, верхнее положение маятника одновременно служит положением неустойчивого равновесия и предельным положением маятника, движущегося в одном из двух возможных направлений.

В общем случае $\mathrm{AGM}(a,b)$ используется для быстрого вычисления полного эллиптического интеграла первого рода

$$I(a,b) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}} = \frac{\pi}{2\mathrm{AGM}(a,b)}.$$

В частном случае $a = b$ значение этого интеграла равно $\frac{\pi}{2a}$, что соответствует значению $\mathrm{AGM}(a,a) = a$. Доказательство этой формулы основано на соотношении, найденном Ланденом (John Landen) [12,13]:

$$I(a,b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right).$$

Для положительных вещественных чисел a и b, которые достаточно близки друг другу, легко показать квадратичную сходимость последовательности приближений к $\mathrm{AGM}(a,b)$. Пусть выполнены неравенства $0 < b < a$. Тогда на каждой итерации вычисления $\mathrm{AGM}(a,b)$ также выполнены неравенства $0 < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n$ и $a_n - b_n \le 2^{-n}(a-b)$, гарантирующие монотонную сходимость. Поскольку функция $\mathrm{AGM}(a,b)$ однородная, достаточно рассмотреть случай, когда на очередной итерации $b_n = 1$ и $a_n = 1+\varepsilon$, где $|\varepsilon| < 1$. На следующей итерации границы интервала, содержащего значение $\mathrm{AGM}(a,b)$, равны $a_{n+1} = 1+\varepsilon/2$ и $b_{n+1} = \sqrt{1+\varepsilon} = 1+\varepsilon/2+O(\varepsilon^2)$. Ширина этого интервала ограничена сверху маленьким числом: $|a_{n+1} - b_{n+1}| =$

$O(\varepsilon^2)$. Следовательно, для произвольно фиксированных положительных вещественных a и b, приближённое вычисление $\mathrm{AGM}(a,b)$ с ошибкой не выше 2^{-k}, где показатель $k \geq 2$, требует выполнения $O(\log_2 k)$ операций сложения, умножения, деления и извлечения квадратного корня над полем вещественных чисел.

Во многих случаях число итераций для достижения разумной точности может быть выбрано фиксированным и маленьким. Это очень удобно, поскольку такие вычисления проводятся очень быстро программой без ветвлений, более того, они могут выполняться маленькой микросхемой. Также известны быстрые алгоритмы для выполнения алгебраических операций [14]. Такие ограничения бывают важны для обработки сигналов в реальном времени, а также для маленьких автономных аппаратов.

3 Полные эллиптические интегралы второго рода

Ещё одно среднее — это модифицированное арифметико-геометрическое среднее MAGM — возникает при вычислении эллиптических интегралов второго рода и длины дуги эллипса с данными полуосями. Чтобы определить $\mathrm{MAGM}(a,b)$, рассмотрим три последовательности чисел:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},$$

$$b_{n+1} = c_n + \sqrt{(a_n - c_n)(b_n - c_n)},$$
$$c_{n+1} = c_n - \sqrt{(a_n - c_n)(b_n - c_n)},$$

где $a_0 = a$, $b_0 = b$ и $c_0 = 0$. Последовательности a_n и b_n монотонные при условии $0 < b < a$. Значение $\mathrm{MAGM}(a,b)$ равно числу, принадлежащему всем интервалам (b_n, a_n). Длины этих интервалов стремятся к нулю, поэтому $\mathrm{MAGM}(a,b)$ равно общему пределу двух последовательностей a_n и b_n. Как и при вычислении AGM(a, b), эти последовательности быстро сходятся при условии, что каждое выражение под знаком квадратного корня равно неотрицательному вещественному числу. Каждый раз выбирается неотрицательное значение корня. Это позволяет для $0 \leq \gamma < 1$ эффективно вычислить значение полного эллиптического интеграла второго рода [1]:

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi \mathrm{MAGM}(1, 1-\gamma^2)}{2\mathrm{AGM}(1, \sqrt{1-\gamma^2})}.$$

Следовательно, длина эллипса равна

$$2\pi \frac{\mathrm{MAGM}(a^2, b^2)}{\mathrm{AGM}(a,b)},$$

где $a > 0$ и $b > 0$ обозначают большую и малую полуоси. При $a = b$ получаем, что длина окружности радиуса a равна $2\pi a$.

Существует другой путь для вычисления полного эллиптического интеграла второго рода [5]. Положим начальные значения $a_0 = \sqrt{1-\gamma^2}$, $b_0 = 1/a_0$, $c_0 = 0$, $r_0 = 1$ и $\rho_1 = 1$. Рассмотрим последовательности

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= \frac{a_n + b_n}{2}, \\
b_{n+1} &= c_n + r_n, \\
c_{n+1} &= c_n - r_n, \\
r_{n+1} &= \sqrt{2(a_{n+1} - c_{n+1})r_n}, \\
\rho_{n+1} &= \rho_n \frac{a_{n-1} - c_n}{a_n - c_n}.
\end{aligned}
$$

Снова полный эллиптический интеграл второго рода принадлежит интервалам, длины которых стремятся к нулю, а границы $\frac{\pi}{2}\rho_n a_n$ и $\frac{\pi}{2}\rho_n a_{n-1}$ легко вычислить на каждой итерации.

$$
\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \gamma^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \lim_{n\to\infty} \rho_n a_n,
$$

где от параметра γ зависит начальное значение a_0.

4 Вычисление числа π

Известно большое разнообразие методов вычисления числа π. Обычно для вычисления используют быстро сходящиеся степенные ряды [15,16,17]. Однако асимптотические оценки скорости сходимости последовательностей частичных сумм линейные. Известны также последовательности, члены которых вычисляются по формулам с вложенными корнями [18]. Метод Гаусса–Эйлера [19] для вычисления числа π сводится к вычислению $\mathrm{AGM}(1, \sqrt{2})$ и $\mathrm{MAGM}(1, 2)$. Здесь соответствующие выражения для приближённый значений AGM и MAGM также содержат вложенные квадратные корни [1].

$$
\pi = \frac{(\mathrm{AGM}(1, \sqrt{2}))^2}{\mathrm{MAGM}(1, 2) - 1}.
$$

Поскольку последовательности выражений с корнями к значениям AGM и MAGM сходятся с квадратичной скоростью, можно ожидать, что этот метод эффективнее, чем методы, основанные на сходимости степенных рядов.

По аналогии с вычислением полных эллиптических интегралов второго рода, существует ещё один путь вычисления числа π. Полагаем начальные члены последовательностей $a_0 = 2$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$, $r_0 = \sqrt{2}$ и $\rho_1 = 1$. И снова определим по индукции $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = c_n + r_n$, $c_{n+1} = c_n - r_n$, $r_{n+1} = \sqrt{2(a_{n+1} - c_{n+1})r_n}$ и

$$
\rho_{n+1} = \rho_n \frac{a_{n-1} - c_n}{a_n - c_n}.
$$

Тогда на каждом шаге выполнены неравенства

$$\pi_- = \frac{2}{\rho_n^2(a_{n-1} - 1)} < \pi < \frac{2}{\rho_n^2(a_n - 1)} = \pi_+,$$

где через π_- и π_+ обозначены нижняя и верхняя границы интервала, содержащего число π. Для $n = 1$ этот интервал широкий $\pi_+ - \pi_- = 2$. Для $n = 2$ получим $\pi_+ - \pi_- < 0.28$, для $n = 3$ интервал заметно уже $\pi_+ - \pi_- < 10^{-3}$, а для $n = 4$ он ещё уже $\pi_+ - \pi_- < 8 \cdot 10^{-9}$.

Финансирование (Acknowledgements) Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

Список литературы

1. Adlaj, S.: An eloquent formula for the perimeter of an ellipse. Notices of the American Mathematical Society **59**(8), 1094–1099 (2012) DOI:10.1090/noti879
2. Borwein, J.M., Borwein, P.B.: The arithmetic-geometric mean and fast computation of elementary functions. SIAM Review **26**(3), 351–366 (1984) DOI:10.1137/1026073
3. Sury, B.: The arithmetico-geometric mean of Gauss. Resonance **5**(8), 72–83 (2000) DOI:10.1007/BF02837938
4. Адлай, С.Ф., Малашонок, Г.И., Малышев, К.Ю., Селиверстов, А.В., Усков, Ф.Г.: Об алгоритмах вычисления полных эллиптических интегралов. Записки научных семинаров ПОМИ **517**, 5–16 (2022)
5. Adlaj, S.: An explicit procedure for calculating the perimeter of an ellipse. 22nd Workshop on Computer Algebra in memory of Professor Vladimir Gerdt, pp. 5–6, Dubna (2021)
6. Lamarche, F., Leroy, C.: Evaluation of the volume of intersection of a sphere with a cylinder by elliptic integrals. Computer Physics Communications **59**(2), 359–369 (1990)
7. Mariani, N.J., Mazza, G.D., Martinez, O.M., Barreto, G.F.: Evaluation of radial voidage profiles in packed beds of low-aspect ratios. The Canadian Journal of Chemical Engineering **78**(6), 1133–1137 (2000) DOI:10.1002/cjce.5450780614
8. Xu, B.-X., Gao, Y., Wang, M.-Z.: Particle packing and the mean theory. Physics Letters A **377**(3-4), 145–147 (2013) DOI:10.1016/j.physleta.2012.11.022
9. Agol, E., Luger, R., Foreman-Mackey, D.: Analytic Planetary Transit Light Curves and Derivatives for Stars with Polynomial Limb Darkening. The Astronomical Journal **159**(3), 123–159 (2020) DOI:10.3847/1538-3881/ab4fee
10. Good, R.H.: Elliptic integrals, the forgotten functions. European Journal of Physics **22**, 119–126 (2001) DOI:10.1088/0143-0807/22/2/303
11. Будак, Б.М., Самарский, А.А., Тихонов, А.Н.: Сборник задач по математической физике. 4-е изд., испр. М.: Физматлит (2004)
12. Landen, J.: An investigation of a general theorem for finding the length of any arc of any conic hyperbola by means of two elliptic arcs, with some other new and useful theorems deduced therefrom. Phil. Trans. **LXV**, 283–289 (1775) DOI:10.1098/rstl.1775.0028

13. Cayley, A.: Note on Landen's theorem. The Proceedings of the London Mathematical Society **XIII**, 47–48 (1882) URL: https://rcin.org.pl/impan/dlibra/publication/181474/edition/152685
14. Гашков, С.Б., Сергеев, И.С.: Умножение. Чебышевский сб. **21**(1), 101–134 (2020). DOI:10.22405/2226-8383-2018-21-1-101-134
15. Chu, W.: Ramanujan-like formulae for π and $1/\pi$ via Gould–Hsu inverse series relations. The Ramanujan Journal **56**, 1007–1027 (2021) DOI:10.1007/s11139-020-00337-z
16. Guillera, J.: A method for proving Ramanujan's series for $1/\pi$. The Ramanujan Journal **52**, 421–431 (2020) DOI:10.1007/s11139-018-0113-9
17. Takahashi, D.: On the computation and verification of π using BBP-type formulas. The Ramanujan Journal **51**, 177–186 (2020) DOI:10.1007/s11139-018-0104-x
18. Edun, B.: Finite and infinite nested square roots convergent to unity. The Ramanujan Journal **51**, 495–500 (2020). DOI:10.1007/s11139-019-00203-7
19. Euler, L.: De miris proprietatibus curvae elasticae sub aequatione $y = \int (xx\,dx)/\sqrt{(1-x^4)}$. Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae **1782**(II), 34–61 (1786)