DOI:10.53921/itas2025_67

К проблеме А. Тарского об упрощении описаний

Кановей В. Г.[1] , Любецкий В. А.[1]

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, 127051, г.Москва, Б. Каретный пер., д.19, стр.1,
kanovei@iitp.ru , lyubetsk@iitp.ru

Аннотация Альфред Тарский [1] (1948) рассмотрел определимость множества всех объектов данного типа в стандартной теоретико-типовой структуре, определимых формулами с ограничениями на типы переменных. Поставленные им проблемы в этой области оставались открытыми до недавнего времени. Об их решении в наших работах [2,3], и о продолжении этих исследований, рассказывается в этой заметке. Главным результатом настоящего исследования является решение одной из проблем Тарского [1]. Именно, нами установлено, что гипотеза $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{D}_2$ выполняется в построенной нами модели, где $\mathbf{D}_k$ есть множество всех объектов типа k, определимых формулами теории типов.

Ключевые слова: Теория типов, определимость, теория множеств ZFC, генерическое расширение.

1 Введение

Вопросы определимости и способов описания математических объектов поднимались в ходе дискуссий об основаниях математики, теории множеств и аксиоме выбора в начале двадцатого века. См., например, знаменитые Sinq lettres [4], написанные Бэром, Борелем, Адамаром и Лебегом. Позже, с развитием математической логики, Альфред Тарский [5] показал, что понятие «быть определимым», и, в более общем плане, понятие истинности, может быть тщательно анализировано только после предварительного определения конкретного формального контекста, в котором оно рассматривается.

Теория определимости Тарского была применена и получила дальнейшее развитие в классических работах Клини [6,7] и в более поздних исследованиях, таких как Аддисон [8], Чегельски [9], Коссак [10] среди многих других статей. С более широкой точки зрения, современные теоретико-множественные исследования определимости характеризуются следующим определением Янниса Московакиса [11, стр. xiv]:

> [...] *the central problem of* [...] *definability theory in general* [is] *to find and study the characteristic properties of definable objects.*

Различные аспекты определимости находятся в центре внимания современных исследований моделей теории множеств, в частности тех, которые связаны с самым широким контекстом универсума множеств или классов [12] или даже *мультиверсума* как одного из современных направлений исследований моделей теории множеств [13], или с конкретными моделями теории множеств, как, например, недавнее всестороннее исследование модели Сакса в [14].

2 Проблемы Тарского

Конкретные виды определимости, относящиеся к теоретико-типовой определимости, рассмотрены Тарским в его работе [1]. Напомним, что:

тип $0 = \omega$ — натуральные числа,

тип $1 = \mathcal{P}(\omega)$ — множества натуральных чисел, кратко МНЧ,

тип $2 = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\omega)) = \mathcal{P}^2(\omega)$,

— и так далее. Так определяется иерархия типов.

Далее, если $m, p < \omega$, то через $\mathbf{D}_m^p$ обозначается множество всех объектов X типа m, определимых (описываемых) беспараметрическими теоретико-типовыми формулами φ типа p (т.е. все переменные относятся к типам $\leq p$). Также вводится множество $\mathbf{D}_m = \bigcup_p \mathbf{D}_m^p$ — всех объектов типа m, определимых беспараметрическими формулами любого типа.

Изучение свойств определимости множеств $\mathbf{D}_m^p$ в обязательном случае $m \leq p+1$ (иначе $\mathbf{D}_m^p$ пусто), Тарский отметил, что $\mathbf{D}_m^p \in \mathbf{D}_{m+1}^{p+1}$, но $\mathbf{D}_m^p \notin \mathbf{D}_m^{p+1}$, во всех случаях, за исключением $p = 1$, $m \geq 1$. Это привело Тарского к следующим вопросам, оставленным в статье [1] в качестве основных нерешенных проблем.

Проблема 1. Пусть $p \geq 1$. Верно ли, что $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$?

Проблема 2. Верно ли, что $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{D}_2$?

Тарский заметил в [1], ссылаясь на работы Геделя о конструктивности, что положительное решение, т.е. прямое доказательство $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{D}_2$ или $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$, является "очень маловероятным". Фактически, если *аксиома конструктивности* $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ выполнена, то по Гёделю имеется полное упорядочение $\leq_{\mathbf{L}}$ множества $\mathcal{P}(\omega)$ в классе $\mathbf{D}_1^1$ (точнее, в проективном классе Δ_2^1), а потому предложения $\mathbf{D}_1 \notin \mathbf{D}_2$ и $\mathbf{D}_1^p \notin \mathbf{D}_2^p$ для всех p также выполнены через определимый выбор наименьших элементов в смысле $\leq_{\mathbf{L}}$. Таким образом, **отрицательное** решение проблем 1 и 2 достигается в конструктивной модели $\mathbf{L}$ теории множеств.

Что же касается **положительного** решения проблем, то, соответственно, требуется построить модель теории множеств ZFC, в которой выполнено предложение $\mathbf{D}_1 \in \mathbf{D}_2$ (для проблемы 2), или же $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$ для заданного $p \geq 1$ (для проблемы 1). Современная теория множеств использует *метод вынуждения* [15] для построения таких моделей, а сами они являются *генерическими расширениями* конструктивного универсума $\mathbf{L}$.

Замечание 1. Такие более сильные гипотезы, как $\mathbf{D}_1 = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{L}$ или $\mathbf{D}_1^p = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{L}$, также можно рассматривать в данном контексте, поскольку $\mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{L} \in \mathbf{D}_2^1$, и более того, множество $\mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{L}$ принадлежит эффективному проективному классу Σ_2^1, составляющему малую часть $\mathbf{D}_2^1$, т. е. здесь в рамках $\mathbf{D}_2^1$-описания требуется всего два квантора типа 1 в приставке вида $\exists\forall$, и никаких кванторов более высоких типов.

Таким образом, в итоге получается $\mathbf{D}_1 \in \Sigma_2^1$ или $\mathbf{D}_1^p \in \Sigma_2^1$. Чем достигается значительное снижение сложности описания множеств $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_1^p$ по сравнению с ожидаемыми $\mathbf{D}_2$ и $\mathbf{D}_2^p$, и тем более по сравнению с $\mathbf{D}_2^{p+1}$ по исходной оценке Тарского.

Замечание 2. Можно отметить, что Σ_2^1 — лучшее возможное описание множеств $\mathbf{D}_1$ и $\mathbf{D}_1^p$, поскольку для двойственного класса Π_2^1 мы имеем соотношения $\mathbf{D}_1 \notin \Pi_2^1$ и $\mathbf{D}_1^p \notin \Pi_2^1$ как теоремы теории множеств ZF. В самом деле, если к примеру $\mathbf{D}_1 \in \Pi_2^1$, то дополнительное множество $Z = \mathcal{P}(\omega) \setminus \mathbf{D}_1$ принадлежит Σ_2^1. При этом Z непусто поскольку $\mathbf{D}_1$, очевидно, счетно. Значит, Z содержит Δ_2^1 элемент $z \in Z$ по теореме о базисе [11]. Но тогда заведомо $z \in \mathbf{D}_1$, противоречие.

3 Решение проблем

Прежде всего заметим следующее. Если немного изменить определение $\mathbf{D}_m^p$ оговоркой, что только *связанные* переменные в φ должны иметь тип $\le m$ в определении $\mathbf{D}_m^p$, то случай $m = 0$ (кванторы только по натуральным числам, т. е. *арифметическая определимость*) становится значимым и при $p = 2$. Аддисон [16] (см. также [17, Раздел 23.2]) установил, что при такой модификации мы имеем $\mathbf{D}_1^0 \notin \mathbf{D}_2^0$, т. е. проблема 1 решается отрицательно при $m = 0$. Другими словами, множество всех арифметических МНЧ не поддается арифметическому определению.

Большой интерес также вызывал случай $m = 1$: кванторы только по МНЧ, т. е. *аналитическая определимость* в арифметике второго порядка или в дескриптивной теории множеств. Проблема о выполнении соотношения $\mathbf{D}_1^1 \in \mathbf{D}_2^1$ (случай $m = 1$ в проблеме 1) была отдельно поставлена в обзоре Матиаса [18]. Как мы уже упоминали, отрицательное решение (т. е. $\mathbf{D}_1^1 \notin \mathbf{D}_2^1$) следует из аксиомы конструктивности, т. е. выполнено в конструктивной модели $\mathbf{L}$. Возможность положительного решения, даже в усиленной форме $\mathbf{D}_1^1 = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{L} \in \Sigma_2^1 \subseteq \mathbf{D}_2^1$, была установлена последством модели теории множеств, построенной в [19].

Наконец, недавно в нашей работах [2,3] было получено исчерпывающее решение первой проблемы Тарского в следующих двух теоремах.

Теорема 1 (доказана в [2]). *Пусть $m \ge 1$. Существует модель теории множеств* ZFC*, в которой выполнено предложение $\mathbf{D}_m^1 = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{L} \in \mathbf{D}_m^2$, другими словами, проблема 1 решается положительно для этого m.*

А поскольку *отрицательное* решение проблемы 1 также достигается в конструктивной модели (см. раздел 2), отсюда делается вывод, что при любом $m \geq 1$ гипотезу Тарского $\mathbf{D}^1_m \in \mathbf{D}^2_m$ нельзя ни доказать, ни опровергнуть средствами теории множеств ZFC. Следующая теорема из [3] дает еще более сильный результат: гипотезы Тарского $\mathbf{D}^1_m \in \mathbf{D}^2_m$ не только независимы от ZFC по отдельности, но и взаимно независимы в том смысле, что любая элементарно непротиворечивая комбинация этих гипотез и их отрицаний достигается в подходящей модели теории множеств ZFC.

Теорема 2 (доказана в [3]). *Пусть U — алгоритмически разрешимое множество натуральных чисел. Имеется модель теории множеств, в которой верно, что для каждого $m \geq 1$: $\mathbf{D}^1_m \in \mathbf{D}^2_m$, если и только если $m \in U$.*

Наконец, нами доказывается следующая теорема, из которой следует, что, подобно проблеме 1, проблема 2 имеет положительное решение в подходящей теории множеств ZFC.

Теорема 3. *Существует модель теории множеств* ZFC, *в которой выполнено предложение $\mathbf{D}_1 = \mathcal{P}(\omega) \cap \mathbf{L} \in \Sigma^1_2$, т. е. проблема 2 решается положительно, причем в более сильной форме с существенно упрощенным определением для $\mathbf{D}_1$, см. замечание 1.*

4 Структура доказательств

Доказательства теорем 1, 2, 3 используют *метод вынуждения*, или *форсинг*. Эта техника современной теории множеств реализуется следующим образом, см. подробнее [15].

1. В роли исходной модели теории множеств ZFC берется класс $\mathbf{L}$ всех множеств, конструктивных по Гёделю.
2. В зависимости от поставленной задачи, выбирается частично упорядоченное множество $Q \in \mathbf{L}$ с порядком $\leq\, = \,\leq_Q$, которое называется *множеством вынуждающих условий*, или собственно *форсингом*.
3. Каждое множество $D \subseteq Q$, удовлетворяющее $\forall q \in Q \, \exists d \in D \, (q \leq d)$, называется *плотным в* Q.
4. Множество $G \subseteq Q$ называется *P-генерическим над* $\mathbf{L}$, если оно удовлетворяет таким условиям:
   1) $\forall r \in G \, \forall q \in Q \, (q \leq r \Longrightarrow q \in G)$, и
   2) $\forall q, q' \in G \, \exists r \in G \, (q \leq r \wedge q' \leq r)$
   (т. е. явлется *фильтром* в смысле обратного порядка), и 3) имеет непустое пересечение с любым множеством $D \subseteq Q$, $D \in \mathbf{L}$, плотным в Q.
5. В этом случае определяется *Q-генерическое расширение* $\mathbf{L}[G]$ универсума $\mathbf{L}$, которое является моделью аксиом теории множеств ZFC.

6. Если при этом та гипотеза H теории множеств, для которой это построение с форсингом Q и генерической моделью $\mathbf{L}[G]$ выполнено, оказалась истинной в $\mathbf{L}[G]$, то, для тех кто интересуется вопросами логики и формального вывода, делается заключение, что гипотеза H *не противоречит* аксиомам теории множеств ZFC.
7. Для решения вопроса существования Q-генерических множеств $G \subseteq Q$, допускается, что расширение $\mathbf{L}[G]$ может быть *булевозначным*, т. е. истинность в нем принимает значения в определенной полной булевой алгебре $B \in \mathbf{L}$, связанной с данным форсингом Q. (В некотором сходстве с теорией нечетких множеств.) Эта булевозначность кстати не влияет на логическую справедливость заключения о непротиворечивости данной гипотезы H как в п. 6.

Главная же трудность здесь состоит в том, чтобы, задавшись теоретико-множественной гипотезой H, построить в $\mathbf{L}$ такой форсинг Q, что H истинна в Q-генерических расширениях. Нам удалось преодолеть эту трудность в ходе доказательств теорем 1, 2, 3. В частности, *для доказательства теоремы 1*, для каждого индекса $p \geq 1$ нами построен такой форсинг $Q_p \in \mathbf{L}$, что в каждом Q_p-генерическом расширении $\mathbf{L}[G]$ универсума $\mathbf{L}$ истинна гипотеза Тарского $\mathbf{D}_1^p \in \mathbf{D}_2^p$. В этом и состоит доказательство теоремы 1.

Главной особенностью и сложностью построения этого форсинга Q_p в $\mathbf{L}$ является точное обеспечение требуемой степени его неоднородности как частично упорядоченного множества. Именно, форсинг Q_p должен быть достаточно неоднородным для того, чтобы сделать определимым, в Q_p-генерических расширениях, любое множество натуральных чисел $x \in \mathbf{L}$, и в то же самое время достаточно однородным для того, чтобы не допустить нежелательного диагонального пересчета всех этих множеств в одну бесконечную определимую последовательность.

Для доказательства теорем 2 и 3 нами использованы еще более сложные форсинги, являющиеся комбинациями Q_p для различных индексов $p \geq 1$.

5 Некоторые дальнейшие результаты

В продолжение этого направления исследований, в наших работах последних лет получен ряд других результатов в связи с определимостью и непротиворечивостью в теории множеств и арифметике второго порядка. Среди них — следующие направления и результаты.

1. Теоремами о базисе называются теоремы о том, что всякое определимое некоторым типом определимости непустое множество содержит определимый элемент. Обычным достаточным условием для такого результата является существование определимого полного упорядочения базовой области — тогда искомый элемент выбирает просто как наименьший в смысле этого упорядочения. Нами установлено в [20], что это достаточное условие не является необходимым для аналитически определимых множеств вещественных чисел в подходящих моделях.

2. Проведены исследования по *нетипичным по Расселу*, или *размыто определимым* множествам, т. е. таким, которые принадлежат какому-то счетному определимому множеству, в [21].
3. Построена модель арифметики Пеано второго порядка, в которой выполнена свёртка без параметров, но не выполнена полная схема свёртки (говорящая о том, что для любой формулы $\varphi(x)$ совокупность $\{n \in \omega : \varphi(n)\}$ является легитивным множеством, [22].
4. Доказана равнонепротиворечивость арифметики второго порядка PA_2 с аксиомой выбора и PA_2^- без аксиомы выбора, и их обеих — с теорией множеств ZFC^- без аксиомы степени, пока только в препринте [23].

Финансирование Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-44-00099, https://rscf.ru/project/24-44-00099/ .

Список литературы

1. Tarski, A.: A problem concerning the notion of definability, J. Symb. Log. **13**, 107–111 (1948).
2. Kanovei, V., Lyubetsky V.: On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski, Mathematics **8** (12), Article No 2214 (2020).
3. Kanovei, V., Lyubetsky V.: On the 'definability of definable' problem of Alfred Tarski, Part II. Transactions of the American Mathematical Society, **375** (12), 8651–8686 (2022).
4. Hadamard J., Baire R., Lebesgue H., Borel E.: Cinq lettres sur la théorie des ensembles, Bull. Soc. Math. Fr. **33**, 261–273 (1905).
5. Tarski, A.: Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, Studia philos. **1**, 261–401 (1935).
6. Kleene, S. C.: Arithmetical predicates and function quantifiers, Transactions of the American Mathematical Society, **79**, 312–340 (1955).
7. Kleene, S. C.: Recursive functionals and quantifiers of finite types, Transactions of the American Mathematical Society, **91**, 1–52 (1959).
8. Addison, J. W.: Tarski's theory of definability: common themes in descriptive set theory, recursive function theory, classical pure logic, and finite-universe logic, Annals of Pure and Applied Logic, **126**, 77–92 (2004).
9. Cegielski, P.: Definability, decidability, complexity, Annals of Mathematics and Artificial Intelligence, **16**, 311–341 (1996).
10. Kossak, R.: Undefinability of truth and nonstandard models, Ann. Pure Appl. Logic, **126** (1-3), 115–123 (2004).
11. Moschovakis, Y. N.: Descriptive set theory, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford (1980).
12. Antos, C., Friedman S.-D.: Hyperclass forcing in Morse-Kelley class theory, J. Symb. Log. **82** (2), 549–575 (2017).
13. Antos, C., Friedman, S.-D., Honzik, R., Ternullo C.: The hyperuniverse project and maximality, Birkhäuser, Cham (2018).
14. Enayat, A., Kanovei, V.: An unpublished theorem of Solovay on OD partitions of reals into two non-OD parts, revisited, J. Math. Log., **21** (3), 1–22 (2021).
15. Kunen K.: Set theory, College Publications, London (2011).

16. Addison J. W.: The undefinability of the definable, Notices of AMS, **12** (3), 347–348 (1965).
17. Boolos G. S., Burgess J. P., Jeffrey R. C.: Computability and logic, Cambridge University Press, Cambridge (2007)
18. Mathias, A. R. D.: Surrealist landscape with figures (a survey of recent results in set theory), Period. Math. Hung., **10**, 109–175 (1979).
19. Кановей В. Г.: Множество всех аналитически определимых множеств натуральных чисел может быть аналитически определимо. Изв. АН СССР, сер. матем., **43** (6), 1259–1293 (1979).
20. Kanovei, V., Lyubetsky V.: The full basis theorem does not imply analytic wellordering, Ann. Pure Appl. Logic **172** (4), 1–46 (2021).
21. Kanovei, V., Lyubetsky V.: A generic model in which the Russell-nontypical sets satisfy ZFC strictly between HOD and the universe, Mathematics, **10** (3), 1–16 (2022).
22. Kanovei, V., Lyubetsky V.: Parameterfree comprehension does not imply full comprehension in second order Peano arithmetic. Studia Logica, **113**, 109–124 (2025).
23. Kanovei, V., Lyubetsky V.: Notes on the equiconsistency of ZFC without the Power Set axiom and 2nd order PA, arXiv: 2507.11643 [math.LO], 1–29 (2025), DOI: 10.48550/arXiv.2507.11643.