АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СОВЕТА МИНИСТРОВ СССР
ПО НАУКЕ И ТЕХНИКЕ
ВСЕСОЮЗНЫЙ ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ
И ТЕХНИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И НЕКЛАССИЧЕСКИМ ЛОГИКАМ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1976

В. А. ЛЮБЕЦКИЙ

СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ И A_2-МНОЖЕСТВА

Дескриптивная теория множеств развивалась под влиянием идеи: найти простые и естественные в своей постановке проблемы, которые были бы «очень трудными» для решения и даже неразрешимыми. В теории чисел много трудных для решения и в то же время простых по постановке задач; однако, по-видимому, и сейчас существует уверенность в том, что все они могут быть решены в обычном смысле. Первые неразрешимые задачи возникли в общей теории множеств; среди них находится континуум-проблема: верно ли, что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Однако вопрос о том, в какой мере континуум — проблема удовлетворяет исходным требованиям неясен, так как ее постановка проста и естественна только в рамках теоретико-множественных абстракций, которые сами по себе создают много других трудностей. В дескриптивной теории множеств искали подходящие объекты и проблемы в области анализа: известно, что борелевские ($\underset{\sim}{\Delta}_1^1$) и проективные ($\underset{\sim}{\Sigma}_n^1$) множества возникают совершенно естественно, все что есть у них от теоретико-множественных концепций — это понятие произвольного действительного числа и, в части суждений о таких множествах, — использование классической логики (в частности, классическое, неэффективное понимание квантора существования). В качестве свойств дескриптивная теория множеств выбрала такие характерные для анализа свойства, как измеримость, свойство Бэра, наличие совершенного ядра. Эти множества и свойства (особенно два последних) не часто встречаются в конкретных вопросах анализа; тем не менее они вполне соответствуют духу анализа. Итак, дескриптивная теория множеств нашла свои неразрешимые проблемы:

I существует несчетное множество типа $\underset{\sim}{\Pi}^1_1$, не содержащее совершенного ядра;

II существует неизмеримое, по Лебегу, множество типа $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ (II^0 существует неизмеримое, по Лебегу, множество типа $\underset{\sim}{\Delta}^1_2$);

III существует множество типа $\underset{\sim}{\Sigma}^1_2$ без свойства Бэра (III^0 существует множество типа $\underset{\sim}{\Delta}^1_2$ без свойства Бэра). Их неразрешимость была доказана в работах [1], [2]. Пусть L_x — класс конструктивных по Гёделю множеств относительно некоторого x, а L^+_x — множество конструктивных по Гёделю чисел относительно числа x. Число — это элемент ω^ω, множество чисел с топологией произведения составляет континуум $\mathscr{R}$. К. Гёдель указал для множества L^+ вполне упорядочение $\prec$ типа Δ^1_2 в L (там верно $L^+=R$) и типа Σ^1_2 в произвольной модели, [3]. С помощью этого вполне упорядочения обычные построения дают в L проективные множества без совершенного ядра, неизмеримые, без свойства Бэра. В работе [1] тот же результат получается без использования геделевского упорядочения и наоборот с помощью метода, изложенного там, таковое может быть получено [4]; с другой стороны, легко построить модель $\mathfrak{N}$, в которой множества L^+_x являются счетными для любого числа x (результат А. Леви), тогда $\mathfrak{N}\models$«$\neg$I и $\neg$II». Доказательство этих утверждений в модели Леви в силу некоторых ее особенностей не проще, чем доказательство гораздо более сильных утверждений. Совсем простое доказательство неразрешимости I, II, III, использующее другую модель, дано в пункте 3. Его содержание не зависит от следующего за этим пунктом 2. Еще один глубокий результат дескриптивной теории множеств состоит в установлении эквивалентности «L^+_x несчетно» $\equiv$ «существует $\underset{x}{\Pi^1_1}$ несчетное и без совершенного ядра». Доказательство слева направо может быть проведено или с помощью некоторой модификации метода П. С. Новикова [4], или с помощью геделевского упорядочения, это не удивительно, так как оба метода в сущности эквивалентны. Доказательство в другую сторону содержится в работе [5].

Эквивалентности такого типа представляются нам весьма интересными, их левая часть дает каноническую форму для дескриптивных проблем, далее мы получим ряд таких эквивалентностей:

$$«L_x^+ \text{ несчетно}» \equiv \mathrm{I}_x, \tag{1}$$

$$«\bar{\mathscr{R}}_x \text{ не меры нуля}» \equiv \mathrm{II}_x, \tag{2}$$

$$«\mathscr{T}_x \text{ не первой категории}» \equiv \mathrm{III}_x. \tag{3}$$

Здесь I_x, II_x, III_x — обычные утверждения, в которых фигурируют $\underset{x}{\Pi}{}_1^1$, $\underset{x}{\Sigma}{}_2^1$, $\underset{x}{\Sigma}{}_2^1$, а L_x^+, $\bar{\mathscr{R}}_x$, $\mathscr{T}_x$ — конкретные единообразно определяемые $\underset{x}{\Sigma}{}_2^1$-множества. Можно считать, что таким образом осуществляется лузиновская «постановка проблемы в резольвенту», т. е. приведение различных проблем к единообразной форме. Мы предполагаем, что такое приведение возможно для широкого класса дескриптивных проблем.

Пусть Δ идеал в алгебре B борелевских множеств континуума $\mathscr{R}$, $\Delta \subseteq B$. Множество X, $X \subseteq \mathscr{R}$ назовем Δ-измеримым, если существует борелевское множество B_p, $B_p \in B$ и $X \Delta B_p \subseteq B_q$, где $B_q \in \Delta$. Измеримость, по Лебегу, соответствует идеалу Δ_1, составленному из множеств лебеговской меры нуль, свойство Бэра — идеалу Δ_2, составленному из множеств первой категории.

Далее мы определим терм $\mathscr{R}_{x\Delta}$, который задает множество чисел неслучайных относительно числа x и идеала Δ. Причем $\bar{\mathscr{R}}_{x\Delta_1}$ совпадает с $\bar{\mathscr{R}}_x$, а $\bar{\mathscr{R}}_{x\Delta_2}$ совпадает с $\mathscr{T}_x$. При весьма общих условиях на идеал Δ мы докажем: «$\bar{\mathscr{R}}_{x\Delta}$ не из идеала Δ» $\equiv$ «существует Δ-неизмеримое $\underset{x}{\Sigma}{}_2^1$-множество» [6], [9].

Вернемся к неразрешимым проблемам. Н. Н. Лузин высказал гипотезу о неразрешимости I, II, III и полагал, что возможная причина этого явления состоит в том, что термин «существует» понимается в них теоретико-множественным образом. Он предложил эффективные варианты этих проблем: верно ли, что $\tilde{\mathrm{I}}$: существует такая формула $\varphi(x)$ языка ZF, что множество $\{x | \varphi(x)\}$ есть несчетное множество без совершенного подмножества — анологично формулируются проблемы $\widetilde{\mathrm{II}}$, $\widetilde{\mathrm{III}}$, $\widetilde{\mathrm{II}}{}^0$, $\widetilde{\mathrm{III}}{}^0$. Конечно, формулировки Лузина не были столь точными, ту же мысль он выражал на современном ему, более философском языке. Как на одну из глубоких задач Н. Н. Лузин указывал на необходимость выяснения взаимоотношений между эффективными и неэффективными постановками, например, верно ли, что II $\to \widetilde{\mathrm{II}}$. Эффективные постановки также оказались неразрешимыми.

Обозначим § любое из предложений I, II, III, а $\S_i$ i-ое счету по счету среди них $i=1, 2, 3$; аналогично $\tilde{\S}$ любое из предложений $\tilde{\mathrm{I}}$, $\widetilde{\mathrm{II}}$, $\widetilde{\mathrm{III}}$, а $\tilde{\S}_i$ i-ое по счету среди них. Если в формулировку проблемы $\tilde{\S}$ добавить условие, что $\{x|\varphi(x)\}$ типа $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_2$, то неразрешимость эффективных постановок легко следует из неразрешимости неэффективных: когда в L доказываются I, II, III, то соответствующие множества явно описываются с помощью вполне упорядочения $\prec$, а оно в свою очередь задается явной формулой. Однако такая добавка только в случае неэффективной постановки выглядит естественной: она сужает класс, в котором ищется объект, от многообразия, составленного из всех множеств, до класса $\underset{\sim}{\Sigma}{}^1_2$-множеств. В случае эффективной постановки ищется формула $\varphi(x)$ и представляется неестественным накладывать ограничения на вид этой формулы: любая формула достаточно хороша. Неразрешимость $\tilde{\S}$ была установлена в [2], там доказано, что в модели Леви $\mathfrak{N}$ любая формула $\varphi(x, c_1, \ldots, c_n)$ даже содержащая в качестве констант $c_1, \ldots, c_n$ любые ординалы и числа, определяет множество счетное или с совершенным ядром, измеримое по Лебегу и обладающие свойством Бэра. Любое проективное множество задается формулой, содержащей число в качестве константы, поэтому в модели Леви все проективные множества обладают упомянутыми свойствами. Это не позволяет использовать модель Леви для сравнения § и $\tilde{\S}$. В связи с эффективной постановкой можно добавить такой результат, [6]: один и тот же терм L^+ в различных простых моделях задает Σ^1_2-множество с различными свойствами. В модели $\mathfrak{M}(r)$, $r \in \mathscr{R}$ множество L^+ неизмеримое по Лебегу, но со свойством Бэра; в $\mathfrak{M}(g)$, $g \in \mathscr{T}$ оно без свойства Бэра, но измеримое; в $\mathfrak{M}(\{g_\alpha\}_{\alpha<\omega_2})\mathfrak{M}$ — коэновская модель, в которой нарушается континуум—гипотеза — оно несчетное и без совершенного ядра, хотя измеримое и обладает свойством Бэра, а в L оно обладает всеми хорошими свойствами (там L^+ весь континуум).

Итак, неэффективные § и эффективные постановки $\tilde{\S}$ оказались неразрешимыми. Очередная задача могла бы состоять в обнаружении широкого класса неразрешимых проблем дескриптивной теории множеств.

В этой работе излагаются доказательства результатов о взаимоотношениях $\S_i$ и $\tilde{\S}_i$. Рассматриваются всевозможные связи между ними. Эти результаты были получены автором давно, [6]—[9] и доказаны в том числе в диссертации [10]. Аналогичное полное исследование проблем типа I, II, III для $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ и $\underset{\sim}{\Sigma}^1_{n+1}$ множеств (в общем случае для $\underset{\sim}{\Pi}^1_n$ и $\underset{\sim}{\Sigma}^1_m$) представляется интересной и трудной задачей.

В пункте 2 указывается оригинальный метод доказательства этих результатов, который не использует таких обычных понятий коэновского метода, как вынуждение, генерический фильтр и т. п. По-видимому он может быть применен для доказательства неразрешимости любых проблем обычного типа, сформулированных в языке дескриптивной теории множеств, метод основан на понятии случайного числа.

2. Пусть $\mathfrak{M}$ рекурсивно-замкнутое множество действительных чисел[1], содержащее число x_0, а $\mathfrak{M}_1$ — некоторая алгебра (относительно обычных операций $\cup$, $\cap$, $\urcorner$) подмножеств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 \subseteq 2^{\mathfrak{M}}$.

Пусть далее Δ-идеал в σ-алгебре B борелевских множеств, а $\mathfrak{B}$ — фактор-алгебра B/Δ. Обозначим $\Delta_{\mathfrak{M}} = \{B_p \in \Delta \mid p \in \mathfrak{M}\}$, $B_{\mathfrak{M}} = \{B_p \mid p \in \mathfrak{M}\}$, $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}} = B_{\mathfrak{M}}/\Delta_{\mathfrak{M}}$, здесь B_p — борелевское множество с кодом p. Семейство $\{b_\alpha\}$-элементов $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}$ можно задавать (многими способами) в виде семейства $\{B_p\}$, где B_p какой-то представитель из класса b_α, а последнее в виде семейства $\{p_\alpha\}$, где p_α — какой-то код борелевского множества B_p. Потребуем, чтобы (1) $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}$ была полна (замкнута) относительно объединения (и пересечения) семейств ее элементов, определяемых множествами из $\mathfrak{M}_1$. Пусть $R(x, \underset{\sim}{y}, \underset{\sim}{z}, i, x_0)$ произвольный разрешимый предикат с параметром x_0, остальные переменные свободные и пробегают x, $\underset{\sim}{y}$, $\underset{\sim}{z}$ по $\mathfrak{M}$, а i по ω. Потребуем, чтобы $\mathfrak{M}_1$ обеспечивало существование в булевой алгебре $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}$ $\bigcap\limits_y X_y$ и $\bigcup\limits_y X_y$.

---

[1] Будем считать, что $\mathfrak{M}$ состоит только из тех чисел, которые являются кодами непрерывных функций, обозначим $\underset{\sim}{x}$, $\underset{\sim}{y}$ переменные, пробегающие $\mathfrak{M}$, а $\underset{\sim}{x}'z$, $\underset{\sim}{y}'z$ соответствующие функции.

Эти пересечения и объединения обозначим ${}^{\mathfrak{B}}\bigcap$, ${}^{\mathfrak{B}}\bigcup$ в отличие от настоящих пересечения и объединения, конечно, $X_{\mathrm{y}} = {}^{\mathfrak{B}}\bigcap_{\mathrm{z}} R_{\mathrm{yz}}$ и $X = {}^{\mathfrak{B}}\bigcup_{\mathrm{y}} X_{\mathrm{y}}$ определены с точностью до элемента [2] Δ.

Пусть $\mathfrak{M}_x$ равно $\{\underline{y}`x \mid \underline{y} \in \mathfrak{M}\}$, потребуем, чтобы (2) любая $\sum_{2x}^{1}$-формула была абсолютна к $\mathfrak{M}_x$ по крайней мере для случайного относительно $\mathfrak{M}$ числа x. Можно было взять за $\mathfrak{M}$ множество $L_{x_0}^{+}$, за $\mathfrak{M}_1$ — семейство конструктивных из x_0 множеств чисел, $\mathfrak{M}_1 = 2^{\mathfrak{M}} \cap L_{x_0}$, тогда первая часть (1) и условие (2) выполнены. Если предикат $B_p \in \Delta$ абсолютен к L и B/Δ — полная булева алгебра, то выполнена и вторая часть условия (1). В частности, можно взять за $\mathfrak{M}$ множество $L_{x_0}^{+}$, за Δ идеал множеств меры нуль (по любой абсолютной мере) или первой категории (в любой абсолютной топологии), в этом случае о $\mathfrak{M}_1$ можно не упоминать.

Определение 1. Число r назовем Δ-случайным относительно $\mathfrak{M}$, если 1) не существует такого B_p, $p \in \mathfrak{M}$, $B_p \in \Delta$, что $x \in B_p$ и 2) если x принадлежит ${}^{\mathfrak{B}}\bigcup_{\alpha} \{B_\alpha\}$, то существует слагаемое B_α и $x \in B_\alpha$. Из 2) следует: если $x \in B_\alpha$ для всех α, то $x \in {}^{\mathfrak{B}}\bigcap_{\alpha} \{B_\alpha\}$. Для некоторых булевых алгебр $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}$ свойство 2 вытекает из свойства 1. Слагаемые в сумме ${}^{\mathfrak{B}}\bigcup_{\alpha} \{B_\alpha\}$ можно так выбрать, что они будут почти дизъюнктны, среди них только небольшая часть не из идеала Δ, но сумма именно этой части слагаемых содержит r (по свойству 1), последняя сумма совпадает с настоящим объединением ${}^{\mathfrak{B}}\bigcup = \bigcup$. В некоторых интересных случаях свойство 2 не следует из 1.

Если предполагается только свойство 1 и это обстоятельство может быть не ясно из контекста, то будем употреблять термин слабо Δ-случайные числа. Если некоторый идеал Δ подразумевается, то будем Δ опускать и говорить о случайных числах. Пусть Δ_1, Δ_2 соответственно идеалы из множеств лебеговской меры нуль и первой категории. Числа Δ_2-случайные были опре-

[2] Более строго, X_{y} — какой-то представитель класса $[X_{\mathrm{y}}]^{\mathfrak{B}}$ и $[X_{\mathrm{y}}]^{\mathfrak{B}} = {}^{\mathfrak{B}}\bigcap_{\mathrm{z}} [R_{\mathrm{yz}}]^{\mathfrak{B}}$.

делены П. Коэном [11] в иной форме, числа Δ_1-случайные — Р. Соловеем [2], оба определения относились к случаю, когда $\mathfrak{M}$ есть континуум счетной модели ZFC.

Теорема 1. Если множество Δ-случайных чисел $\mathscr{R}_{\mathfrak{M}\Delta}$ имеет дополнение[3] в Δ, то все $\sum\limits_{x_0}{}^1_2$-множества Δ-измеримы, т. е. отличаются от некоторого борелевского множества на элемент Δ.

Доказательство. Напомним, что $\mathfrak{M}_x$ состоит из значений непрерывных функций с кодами из $\mathfrak{M}$ на числе x. Очевидно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_x$, $x \in \mathfrak{M}_x$ и $\mathfrak{M}_x$ рекурсивно замкнуто. Если, например, $\mathfrak{M}$ содержит код всякого счетного ординала, то $\mathfrak{M}_x$ также содержит код всякого счетного ординала и по теореме Шёнфилда все $\sum\limits_{x_0}{}^1_2$-формулы абсолютны к $\mathfrak{M}_x$. Однако такое условие на $\mathfrak{M}$ не всегда удобно, так как оно означает несчетность $\mathfrak{M}$. Для доказательства рассмотрим

Определение 2. Пусть X определяется какой-то $\sum\limits_{x_0}{}^1_2$-формулой:

$$x \in X \equiv \exists y \forall z \exists i R(x, y, z, i, x_0);$$

используя абсолютность этой формулы к $\mathfrak{M}_x$, имеем

$$\exists y \forall z \exists i R \equiv \mathfrak{M}_x \models \exists y \forall z \exists i R \equiv \mathfrak{M}_x \models \exists \mathrm{y} \forall \mathrm{z} \exists i R(\underline{x}`x, \ \underline{y}`x, \ \underline{z}`x),$$

где $\underline{x}$ — код тождественной функции, $\underline{x} \in \mathfrak{M}$, $\underline{x}`x = x$ и $\underline{x}_0$ — код константной функции, $\underline{x}_0 \in \mathfrak{M}$, $\underline{x}_0`x = x_0$. Как и в условии (1), пусть $R_{\mathrm{yz}} = \{x \mid \exists i R(\underline{x}`x, \ \underline{y}`x, \ \underline{z}`x, \ i, \ \underline{x}_0`x)\}$, $X_{\mathrm{y}} = \bigcap\limits_{\mathrm{z}} R_{\mathrm{yz}}$, $X = \bigcup\limits_{\mathrm{y}} X_{\mathrm{y}}$, конечно, пока ни из чего не следует, что $X_{\mathbf{y}}$ и X измеримы. Положим $X_{\mathrm{y}}^{\wedge} = {}^{\mathfrak{B}}\bigcap\limits_{\mathrm{z}} R_{\mathrm{yz}}$ и $X^{\wedge} = {}^{\mathfrak{B}}\bigcup\limits_{\mathrm{y}} X_{\mathbf{y}}^{\wedge}$, эти $X_{\mathbf{y}}^{\wedge}$ и $X^{\wedge}$ — борелевские множества по условию (1). Однако[4] $X_{\mathrm{y}}^{\wedge} \Delta X_{\mathbf{y}} \subseteq \bar{\mathscr{R}}_{\mathfrak{M}\Delta}$ и $X^{\wedge} \Delta X \subseteq \bar{\mathscr{R}}_{\mathfrak{M}\Delta}$, откуда и следует измеримость X. Эти включения вытекают в одну сторону из свойства 2 определения 1 и в другую сторону — просто из определения ${}^{\mathfrak{B}}\bigcap$, ${}^{\mathfrak{B}}\bigcup$.

Следствие 1. Если существует Δ-неизмеримое (где Δ есть σ-идеал) $\sum\limits_{x_0}{}^1_2$-множество, то существует и несчетное множество без совер-

---

[3] Точнее, $\mathscr{R}_{\mathfrak{M}\Delta} \subseteq B_p$ и $B_p \in \Delta$.

[4] Все соотношения, включающие $X_{\mathrm{y}}^{\wedge}$ и $X^{\wedge}$, нужно понимать в том смысле, что они верны для любого бурелевского множества из, строго говоря, классов $X_{\mathrm{y}}^{\wedge}$ и $X^{\wedge}$.

шенного подмножества типа $\underset{x_0}{\Pi_1^1}$. В частности, $ZFC \vdash II \to I$ и $ZFC \vdash III \to I$.

Доказательство. Из условия следует, что $\bar{\mathscr{R}}_{\mathfrak{M}\Delta}$ не принадлежит Δ, пусть для удобства $\mathfrak{M} = L^+_{x_0}$, тогда $L^+_{x_0}$ несчетное множество (иначе, используя тот факт, что Δ есть σ-идеал, мы заключаем $\bar{\mathscr{R}}_{\mathfrak{M}\Delta} \in \Delta$). В пункте 1 указано, что несчетность $L^+_{x_0}$ влечет заключение следствия 1.

Следствие 2. Для любой проективной формулы $\varphi(x)$

$$\mathfrak{M}_x \models \varphi(x) \equiv \mathfrak{M} \models {}^{\mathfrak{B}}\varphi(x)$$

для всех случайных относительно $\mathfrak{M}$ чисел x; здесь ${}^{\mathfrak{B}}\varphi$ получается из φ релятивизацией кванторов к $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}$ так же, как и в доказательстве теоремы 1: $\exists$ это $\bigcup$, оно заменяется на ${}^{\mathfrak{B}}\bigcup$; $\forall$ это $\bigcap$, оно заменяется на ${}^{\mathfrak{B}}\bigcap$. Очевидное доказательство протекает индукцией по длине φ. При исследовании некоторых проблем дескриптивной теории множеств бывает необходимо расширить исходную модель $\mathfrak{M}$ не одним числом x, а последовательностью чисел $\mathbf{\bar{x}} = \{x_\alpha\}_{\alpha<\nu}$ или более сложным объектом. В этих случаях указанный метод может быть применен: пусть $\mathscr{R}^\nu$ — произведение континуумов $\mathscr{R}$ в числе ν, в $\mathscr{R}^\nu$ имеются борелевские множества и их алгебра B^ν, на ней точно так же может быть рассмотрены идеал Δ, фактор-алгебра B^ν/Δ и т. д. Единственное изменение на этом пути может коснуться способа кодирования элементов $\mathfrak{M}_{\mathbf{\bar{x}}}$. Пусть $\mathfrak{M} = L^+_{x_0}$ и Δ есть σ-идеал счетного типа (т. е. не существует несчетного дизъюнктного семейства борелевских множеств, не входящих в Δ), предикат $B_p \in \Delta$ типа $\underset{x_0}{\Sigma_2^1}$. В случае $\mathfrak{M} = L^+_{x_0}$ будем обозначать $\mathscr{R}_{\mathfrak{M}\Delta}$ через $\mathscr{R}_{x_0\Delta}$. Эти условия предполагаются в теоремах 2, 3.

Теорема 2. В ZFC выводимо $\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta} \bar{\in} \Delta \equiv$ «существует Δ-неизмеримое $\underset{y_0}{\Sigma_2^1}$-множество», где x_0 и y_0 равноконструктивны.

Доказательство. В одну сторону теорема есть частный случай теоремы 1.

Пусть $\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta} \bar{\in} \Delta$. Если $\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta}$ Δ-неизмеримо, то оно само является искомым $\underset{x_0}{\Sigma_2^1}$-множеством. Действительно, при наших условиях на $\mathfrak{M}$, Δ в определении случайного числа можно опустить условие 2.

Пусть $L^{+0}_{x_0} = \{p \in L^+_{x_0} \mid B_p \in \Delta\}$, это $\underset{x_0}{\Sigma^1_2}$-множество, T униформное $\underset{x_0}{\Pi^1_1}$-множество на «плоскости» $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$, проекция которого дает $L^{+0}_{x_0}$, а Re — решето для T. Заметим, что $T \subseteq L^+_{x_0}$ (это означает, что свертки элементов T суть конструктивные из x_0 числа, вообще точки «плоскости» $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$ мы представляем себе как числа). Действительно, формула $\varphi(x) = \exists vy\,(v \in T.\ v = \langle y,\ x\rangle)$ — типа $\underset{x_0}{\Sigma^1_2}$, она истинна для любого x, $x \in L^{+0}_{x_0}$, следовательно, верно $L^+_{x_0} \models \varphi(x)$, но отсюда $v \in T.\ v = \langle y',\ x\rangle.\ y' \in L^+_{x_0}$. Используя униформность T, получаем $\tau_x \cap T = y'$, где τ_x — перпендикуляр к оси, на которой лежит $L^{+0}_{x_0}$ в точке x. Множество $L^+_{x_0}$ вполне упорядочено отношением $\prec$ типа Σ^1_2, в частности T вполне упорядочено ими. Выберем с помощью $\prec$ по одной точки из каждой конституанты Re, получим T', $T' \subseteq T$, T' типа $\underset{x_0}{\Sigma^1_2}$. Последнее следует из того, что

$$x \in T' \equiv x \in T.\ \forall x_1 \prec x \neg (\tau_{x_1} \cap \mathrm{Re}\ \mathrm{Isom}\ \tau_x \cap \mathrm{Re})$$

и x_1, x пробегают $L^+_{x_0}$, второй конъюнктивный член (обозначим его $\psi(x)$) типа $\underset{x_0}{\Pi^1_2}$ и абсолютен к $L^+_{x_0}$, в $L^+_{x_0}$ формула $\psi(x)$ типа $\underset{x_0}{\Delta^1_2}$, (действительно, там $\prec$ типа Δ^1_2, а $\{x_1 \mid x_1 < x\}$ счетно и квантор $\forall x_1 \prec x$ не повышает типа), итак $L \models \psi(x) \equiv$ «$\underset{x_0}{\Sigma^1_2}(x)$-формула», поскольку левая и правая часть этой эквивалентности абсолютны к L, то $x \in T.\ \psi(x) \equiv x \in T.$ «$\underset{x_0}{\Sigma^1_2}$-формула» и T' типа $\underset{x_0}{\Sigma^1_2}$ (на самом деле типа $\underset{x_0}{\Delta^1_2}$).

Если T содержит ядро P_y (где y — код совершенного множества P_y), то все числа конструктивны из x_0, и весь континуум вполне упорядочен отношением $\prec$, тогда искомое Δ-неизмеримое множество легко построить (например, так же как и для более сложного случая, когда T не содержит ядра). Действительно, если $P_y \subseteq T$, то можно считать, что $y \in L^+_{x_0}$ (предикат $P_y \subseteq T$ с переменной y типа $\underset{x_0}{\Pi^1_1}$, предикат $\exists y\,(P_y \subseteq T)$ типа $\underset{x_0}{\Sigma^1_2}$, он абсолютен и потому $L^+_{x_0} \models \exists y\,(P_y \subseteq T)$). Если P_y плотно на каком-то интервале, то весь он состоит из точек $L^+_{x_0}$, $P_y \subseteq T \subseteq L^+_{x_0}$ и континуум R совпадает с $L^+_{x_0}$. Если P_y нигде не плотное множество, то пусть f — порядковый изоморфизм системы интервалов смежных к P_y и множества рациональных чисел Q. Мы считаем, что интервал — это пара его концов, в этом смысле система смежных интервалов принадлежит L, и f находится в L. Всякое число z абсолютным образом определяется по f и числу x из P_y. Пусть $z = \sup Q'$, где Q' — множество рациональных чисел, Q'' — система интервалов, соответствующая Q', в смысле f, $f``Q'' = Q'$, положим $\sup Q'' = x$ (точнее здесь Q'' — множество правых концов интервалов из Q''), $x \in P_y$. Очевидно

$$z = \sup \{u \mid \exists l \ (l \text{ — смежный интервал } P_y.\ l < x.\ u = f(l))\}.$$

Итак, $z \in L^+_{x_0}$.

Если T не содержит ядра, то все его конституанты счетны. Всего различных конституант у Re и T — несчетное число, иначе $L^+_{x_0}$ и $L^{+0}_{x_0}$ были бы счетными. В частности, T' — несчетное множество. Положим u пробегает T' и r множество всех рациональных чисел Q, пусть

$$K''_{ur} = \{z \mid z \in T'.\ \tau^r_z \cap \mathrm{Re}\,\mathrm{Isom}\,\tau_u \cap \mathrm{Re}\},$$

$$K'_{ur} = \{z \mid \exists z_1 \in K''_{ur} (\tau_z \cap \mathrm{Re}\,\mathrm{Isom}\,\tau_{z_1} \cap \mathrm{Re})\},$$

$$K_{ur} = \{x \mid \exists z \in K'_{ur} (z \in B_{(z)_1}.\ \forall z' (z' \underset{\mathrm{Re}}{<} z \to x \bar{\in} B_{(z')_1}))\};$$

здесь τ^r_z — отрезок перпендикуляра в точке z до числа r, $(z)_1$ — первая координата точки z (ведь точка z лежит на «плоскости» $\mathscr{R} \times \mathscr{R}$), $\underset{\mathrm{Re}}{\prec}$ — отношение частичного порядка между точками T: точки из меньших в смысле Re конституант находятся в отношении $\prec$ с точками из больших конституант, точки одной конституанты несравнимы. Легко видеть, что K''_{ur} типа $\underset{u, x_0}{\Delta^1_2}$, а K'_{ur} и K_{ur} типа $\underset{u, x_0}{\Sigma^1_2}$.

Множество K'_{ur} содержит или не содержит конституанты целиком. При $u_1 \neq u_2$ множества $K_{u_1 r}$ и $K_{u_2 r}$ не пересекаются. Действительно, если $v \in K_{u_1 r} \cap K_{u_2 r}$, то пусть z_1, z_2 элементы $K'_{u_1 r}$ и $K'_{u_2 r}$ соответствующие v. Если z_1 и z_2 из одной конституанты T, то оба $K'_{u_1 r}$ и $K'_{u_2 r}$ содержат z_1 и z_2, по определению K'_{ur} существуют t_1, t_2 соответственно из $K''_{u_1 r}$, $K''_{u_2 r}$ и $\tau_{t_1} \cap \mathrm{Re}\,\mathrm{Isom}\,\tau_{z_1} \cap \mathrm{Re}$ и

$\tau_{t_2} \cap \mathrm{Re\,Isom}\,\tau_{z_1} \cap \mathrm{Re}$, следовательно, $\tau_{t_1} \cap \mathrm{Re\,Isom}\,\tau_{t_2} \cap \mathrm{Re}$, t_1 и t_2 из одной конституанты T и принадлежат T', отсюда $t_1 = t_2$ и $t_1 \in K''_{u_1 r} \cap K''_{u_2 r}$.

Наконец, по определению K''_{ur} $\tau^r_{t_1} \cap \mathrm{Re\,Isom}\,\tau_{u_1} \cap \mathrm{Re}$ и $\tau^r_{t_1} \cap \cap \mathrm{Re\,Isom}\,\tau^1_{u_2} \cap \mathrm{Re}$, откуда u_1 и u_2 из одной конституанты T и, следовательно, равны. Противоречие. Если z_1 и z_2 из разных конституант, то, например, $z_1 \underset{\mathrm{Re}}{\prec} z_2$ и по определению K_{ur} множество $K_{u_2 r}$ не может содержать v. Противоречие. Допустим все множества K_{ur} Δ-измеримы.

Пусть X' — какое-нибудь борелевское множество, отличающееся от Δ-измеримого X на элемент идеала Δ.

Множество $\left(\bigcup_r K_{ur}\right)'$ не принадлежит идеалу Δ. Действительно, множество $\bigcup K_{ur}$ отличается от $\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta}$ на объединение тех B_p, $B_p \in \Delta$, у которых коды соответствуют точкам T из счетного числа младших конституант. Для всякого u найдется такое r, что K'_{ur} не из идеала Δ. Назовем такое K_{ur} отмеченным. Существует такое r_0, что среди K_{ur_0}, и $u \in T'$ несчетное число отмеченных. Заменим каждое отмеченное K_{ur_0} на K'_{ur_0}, все они не из идеала Δ, дизъюнктны и их несчетное число. Это противоречит условию на идеал Δ. Положим $y_0 = \langle u_0, x_0 \rangle$, где u_0 соответствует Δ-неизмеримому K_{ur}.

Следствие 1. В ZFC выводимо

$\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta_1} \bar{\in} \Delta_1 \equiv$ II-«существует неизмеримое по Лабегу $\underset{y_0}{\Sigma^1_2}$-множество»,

$\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta_2} \bar{\in} \Delta_2 \equiv$ III-«существует $\underset{y_0}{\Sigma^1_2}$-множество без свойства Бэра».

Здесь x_0 равноконструктивно с y_0, Δ_1 — идеал множеств лебеговской меры нуль, Δ_2 — идеал множеств первой категории. Для доказательства достаточно заметить, что Δ_1, Δ_2 σ-идеалы счетного **типа.**

Теорема 3. В ZFC выводимо

$\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta} = R \equiv$ «существует Δ-неизмеримое $\underset{x_0}{\Delta^1_2}$-множество».

Доказательство. Пусть X есть Δ-неизмеримое $\underset{x_0}{\Delta^1_2}$-множество. Конституанты X и его дополнения $\neg X$ разбивают континуум $\mathscr{R}$ на ω_1 борелевских множеств, причем некоторые их коды рекурсивны относительно x_0 и любого кода α счетного ординала α.

Множество $L^+_{x_0}$ несчетно, так как иначе по теореме 1 не могло бы существовать такое X. Следовательно, всякий счетный ординал имеет конструктивный из x_0 код α. Поскольку идеал Δ счетного типа, то среди конституант только счетное число не принадлежит Δ, конституанта X, не входящие в Δ, составляют борелевское множество B_p, у которого код p конструктивен из x_0. Конституанты $\neg X$, не входящие в Δ, составляют борелевское множество B_q, где $q \in L^+_{x_0}$. Борелевское множество $B_s = \mathscr{R} - B_p - B_q$ не принадлежит Δ и его код s из $L^+_{x_0}$, оно разбивается конституантами X и $\neg X$, не вошедшими в B_p и B_q, на ω_1 борелевских множеств из идеала Δ. Следовательно, B_s не содержит случайных относительно $L^+_{x_0}$ чисел. Однако легко видеть, что случайные числа распределены равномерно; если $\mathscr{R}_{x_0\Delta}$ содержит хотя бы одно такое число, то любое борелевское множество B_s, $s \in L^+_{x_0}$, не принадлежащее идеалу Δ, содержит случайное число (рассмотрим борелевское отображение f, $f \in L_{x_0}$, сохраняющее идеал Δ, $f^{-1}{}``\Delta = \Delta$ и переводящее окрестность r в B_s, число $f`r$ случайное).

Итак, $\mathscr{R}_{x_0\Delta}$ пусто.

Пусть $\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta} = R$, тогда повторим конструкцию из доказательства теоремы 2, получим Δ-неизмеримое $\sum^1_2{}_{y_0}$-множество K_{ur}. Докажем, что на самом деле это K_{ur} типа $\Delta^1_2{}_{y_0}$. Действительно,

$$\neg K_{ur} = \neg \mathscr{R}_{x_0\Delta} - K_{ur} = \{x \mid \exists z \in (T - K'_{ur}) \cdot x \in B_{(z)_1} \cdot \forall z' \, (z' \underset{\mathrm{Re}}{<} z \rightarrow \rightarrow x \in B_{(z')_1})\}.$$

Множество $T - K'_{ur}$ равно $\{z \mid \exists z_1 \in (T' - K''_{ur}) \, \tau_z \cap \mathrm{Re} \, \mathrm{Isom} \, \tau_z \cap \mathrm{Re}\}$ и $T' - K''_{ur}$ типа $\Delta^1_2{}_{y_0}$ (так как K''_{ur} типа $\Delta^1_2{}_{y_0}$). Следовательно, $T - K'_{ur}$ типа $\sum^1_2{}_{y_0}$ и $\neg K_{ur}$ того же типа.

Следствие 1. В ZFC выводимо.

$\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta_1} = R \equiv \mathrm{II}^0$ «существует неизмеримое по Лебегу $\Delta^1_2{}_{y_0}$-множество».

$\bar{\mathscr{R}}_{x_0\Delta_2} = R \equiv \mathrm{III}^0$ «существует $\Delta^1_2{}_{y_0}$-множество без свойства Бэра».

Здесь x_0 и y_0 равноконструктивны. Заметим, что имеет место следующее утверждение: если $\sum^1_2{}_{y_0}$-множество Δ-неизмеримо и x_0 равноконструктивно с y_0, то существует Δ-неизмеримое $\sum\limits_{x_0}{}^1_2$-множество. Поэтому в теоремах 2, 3 и их следствиях можно положить $y_0=x_0$. Конструкция множеств K_{ur} может быть использована каждый раз, когда имеется некоторое построение из отдельных точек с помощью трансфинитных процессов до ω_1. Вместо отдельных точек берутся множества K_{ur}, вместо ординалов — числа из T', причем получается заведомо проективное множество. Таким образом, может быть построено Δ-неизмеримое множество и для идеала не счетного типа, нужно постулировать какое-либо другое свойство Δ достаточное для образования Δ-неизмеримого множества (например, инвариантность относительно сдвига и т. п.).

3. Рассмотрим взаимоотношения предложений I, II, III между собой. В пункте 2 показано, что

$$\mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{II} \to \mathrm{I} \text{ и } \mathrm{ZFC} \vdash \mathrm{III} \to \mathrm{I}.$$

Никакие иные импликации не могут быть доказаны в ZFC, как принято считать, отсюда вытекает, что все они не имеют места. Сначала мы докажем это для предложений I, II°, III°, где II° формула языка ZF, утверждающая *существование неизмеримого множества типа* B_2 (типа Δ^1_2), а III° — аналогичная формула, утверждающая *существование множества типа* B_2, *не обладающего свойством Бэра*. Обобщим определение 1 (соответствующим образом обобщается и определение 2).

Определение 3. Пусть ν ординал и $\mathbf{R}=\mathrm{R}^\nu$ произведение прямых R в числе ν с обычной топологией произведения, алгеброй борелевских множеств B^ν и мерой произведения μ^ν на ней. Борелевское множество B^ν_p из этой алгебры кодируется последовательностью чисел $p=p^\nu$ длины ν. Его проекции на различные оси α, $1 \leqslant \alpha < \nu$ отличны от всей оси R только для счетного их числа. Некоторая неопределенность связана с ν-й осью: иногда мы ее не включаем в R^ν и α остается строго меньше ν; в других случаях удобнее включать ν-ую ось в R^ν и тогда α пробегает все оси до ν-й включительно — в дальнейшем из контекста будет ясно, какой случай имеет место. Также мы будем опускать индекс ν в тех случаях, когда размерность пространства подразумевается.

В алгебре B^ν может быть задан идеал Δ, мы интересуемся теми его элементами B_p, коды которых принадлежат некоторому множеству $\mathfrak{M}$, $p \in \mathfrak{M}$. Допуская некоторую вольность, можно считать, что Δ состоит только из таких множеств B_p. Под $\mathfrak{M}$ можно понимать, как и в определении 1, некоторое рекурсивно-замкнутое множество кодов, но в дальнейшем мы принимаем за $\mathfrak{M}$ счетную модель ZFC вида L^α, $\alpha < \omega_1$. Так же, как были определены слабо Δ-случайные над $\mathfrak{M}$ числа, определим теперь Δ-случайные последовательности чисел $\{x_\alpha\}_{\alpha<\nu}$, как те, которые избегают множеств B_p, $B_p \in \Delta$ и $p \in \mathfrak{M}$. Мы опустим здесь слово «слабо», так как аналог условия 2 из определения 1 нигде не будет нужен.

Мы будем часто использовать две очевидные леммы.

Лемма 1. Если Δ σ — идеал и $\mathfrak{M}$ счетно, то всякое множество, не меры нуль (т. е. не накрывающееся никаким элементом идеала Δ) содержит Δ-случайное число.

Лемма 2. Если $\mathfrak{M}(\{x_\alpha\}_{\alpha<\nu}) = \mathfrak{N}$ модель ZFC и $\{x_\alpha\}$ последовательность чисел (или других наследственно счетных объектов), то в $\mathfrak{N}$ любое число x конструктивно из отрезка $\{x_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ и $\alpha_0 < \omega_1^{\mathfrak{N}}$. Кроме того $\mathfrak{N} \models x = F(\{x_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}, \beta)$, где F — геделевская функция, а β счетный в $\mathfrak{N}$ ординал.

Доказательство. Пусть в $\mathfrak{N}$ множество X содержит множества ω, β, x и все их наследство, множества $\mathscr{x} = \{x_\alpha\}_{\alpha<\nu}$ и ν (но не обязательно все их наследство) и замкнуто с помощью сколемовских функций таким образом, что $X \models$ «x конструктивно из $\mathscr{x}$ на шаге β» и X счетно, и, наконец, к X абсолютно суждение «$\mathscr{x}$ конструктивно из z», где z — любой объект из X. Это множество X не транзитивное, но существует транзитивное множество X_1, которое ε-изоморфно X. При этом ε-изоморфизме ω, β, x и x_α переходят в себя (так как все их наследство содержится в X). Множество $\mathscr{x}$ переходит в последовательность чисел $\{x_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$, а ν — в α_0. Тогда в $X_1 \models x = F(\{x_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}, \beta)$, и это обстоятельство абсолютно.

Теорема 4. Если ZF непротиворечивая теория, то в теории ZFC невыводимы утверждения а) $\mathrm{I} \to \mathrm{II}^0$, $\mathrm{I} \to \mathrm{III}^0$ и б) $\mathrm{I}, \mathrm{II}^0 \to \mathrm{III}^0$ и $\mathrm{I}, \mathrm{III}^0 \to \mathrm{II}^0$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = L^\alpha$, $\alpha < \omega_1$ некоторая счетная модель ZFC, а $\mathbf{R} = R^{\omega_1^{\mathfrak{M}}}$ есть тихоновское произведение бэровских прямых R в числе $\omega_1^{\mathfrak{M}}$, в $\mathbf{R}$ определена алгебра борелевских множеств и мера на ней. Рассмотрим семейство борелевских множеств B_p, коды которых принадлежат $\mathfrak{M}$, $p \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \models$ «$B_p \subseteq \mathbf{R}$ и мера B_p есть нуль». Пусть $\{r_\alpha\}$ — случайная последовательность, $1 \leqslant \alpha < \omega_1^{\mathfrak{M}}$, относительно этого семейства, определение 3. Положим $\mathfrak{M}(\{r_\alpha\}) = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$; это и есть искомая модель ZFC. Множество $\mathfrak{N}$, как обычно, может быть получено в виде $\mathfrak{M}(G)$, где G есть $\mathfrak{M}$ — генерический фильтр: пусть $\mathfrak{P}$ семейство борелевских множеств B_p, коды которых принадлежат «$\mathfrak{M}$, $p \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} \models$ $B_p \subseteq \mathbf{R}$ и мера B_p положительная»; это $\mathfrak{P}$ не принадлежит $\mathfrak{M}$, но в $\mathfrak{M}$ имеется двойник[5] $\mathfrak{P}'$ изоморфный $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}' = \{B_p^{\mathfrak{M}} \mid B_p \in \mathfrak{P}\}$, будем $\mathfrak{P}'$ также обозначать $\mathfrak{P}$. Пусть $G = \{B_p \in \mathfrak{P} \mid \{r_\alpha\} \in B_p\}$, это G есть $\mathfrak{M}$ — генерический фильтр на $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{M}(\{r_\alpha\}) = \mathfrak{M}(G)$ Множество «вынуждающих условий» $\mathfrak{P}$ удовлетворяет условию: дизъюнктное семейство элементов $\mathfrak{P}$ не более чем счетно — отсюда следует, что кардиналы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}(G)$ совпадают, в частности, $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{N}}$ и $\mathfrak{N} \models$ «L^+ несчетно». Отсюда согласно теореме, которая упоминалась в пункте 1 следует, что $\mathfrak{N} \models \mathrm{I}$, [4], [5].

Покажем, что $\mathfrak{N} \models \neg \mathrm{II}^0$. Допустим противное, пусть $\mathfrak{N} \models$ «X неизмеримое множество, X типа $\underset{x}{\Delta_2^1}$ и $x \in R$». Можно считать, что верхняя мера X единица, а нижняя — нуль (в противном случае вычтем из X, борелевское множество, мера которого равна нижней мере X). Само X и его дополнение $\neg X$ типа $\underset{x}{\Sigma_2^1}$, они разбиваются на конституанты B_α, $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{N}}$, каждое B_α борелевское множество меры нуль, итак $\mathfrak{N} \models R = \bigcup_\alpha B_\alpha$. Хорошо известна в сущности классическая лемма о том, что некоторый код любой конституанты B_α рекурсивен из кода x самого X и любого кода ординала α, [5]. По лемме 2 x конструктивно из некоторого счетного отрезка $\{r_\alpha\}$, пусть это $\{r_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ и $\alpha_0 < \omega_1^{\mathfrak{N}}$. Тогда $x \in \mathfrak{M}(\{r_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}) = \mathfrak{M}_1$ и коды всех конституант B_α принадлежат $\mathfrak{M}_1$ (очевидно, всякий ординал до $\omega_1^{\mathfrak{N}}$ имеет код в $\mathfrak{M}$ и тем более в $\mathfrak{M}_1$). Следовательно, в $\mathfrak{N}$ не может быть чисел случайных относительно $\mathfrak{M}_1$ (точнее относительно семейства борелевских множеств меры нуль с кодами из $\mathfrak{M}_1$). С другой стороны, мы покажем, что r_{α_0} (и все r_α, $\alpha \geqslant \alpha_0$) случайные относительно $\mathfrak{M}_1$ числа. Это приведет к противоречию.

---

[5] Здесь $B_p^{\mathfrak{M}}$ обозначает объект, являющийся в $\mathfrak{M}$ борелевским множеством с кодом p.

Ординал α_0 счетен и в $\mathfrak{M}$, пусть R^{α_0} — произведение бэровских прямых в числе α_0, это R^{α_0} счетномерное подпространство **R.** В $\mathfrak{M}$ существует гомеоморфизм между R^{α_0} и R, например, это обычная свертка матрицы в последовательность. Тогда свертка случайной относительно $\mathfrak{M}$ последовательности $\{r_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ дает число r, равноконструктивное ей и также случайное над $\mathfrak{M}$. Заметим, что пара $\langle r, r_{\alpha_0}\rangle$ случайна над $\mathfrak{M}$, т. е. избегает любых плоских борелевских множеств меры нуль с кодами из $\mathfrak{M}$. Действительно, в $\mathfrak{M}$ существует гомеоморфизм пространства $R^{\alpha_0}\times R$ на $R\times R$ (по первой координате — свертка, а по второй-тождественный). Он переводит $\langle\{r_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}, r_{\alpha_0}\rangle$ в $\langle r, r_{\alpha_0}\rangle$ и сохраняет случайность над $\mathfrak{M}$. Допустим $\mathfrak{N}\models$ «$r_{\alpha_0}\in B_p$ и $p=F(r, \beta)$ и B_p — меры нуль», здесь β — счетный ординал и F — геделевская функция. Тогда $\mathfrak{M}(\langle r, r_{\alpha_0}\rangle)\models$ «$r_{\alpha_0}\in B_p$ и $p=F(r, \beta)$ и B_p — меры нуль», но отсюда следует, что существует X борелевское подмножество $R\times R$ положительной меры с кодом из $\mathfrak{M}$ и $X\Vdash$ «$\mathbf{r}_{\alpha_0}\in B_{F(\mathbf{r}, \beta)}$ и $B_{F(\mathbf{r}, \beta)}$ меры нуль», здесь $\mathbf{r}_{\alpha_0}$, $\mathbf{r}$ ярлыки для r_{α_0} и r. Заметим, что почти все точки множества $R\times R$ случайные относительно $\mathfrak{M}$. Очевидно, существует такое r', что $X\cap\tau_{r'}$ положительной меры и для почти всех его точек r'' пара $\langle r', r''\rangle$ является случайной над $\mathfrak{M}$ (мера $X\cap\mathscr{R}_{\mathfrak{M}}$ равна мере X). Будем расширять $\mathfrak{M}$ всевозможными такими парами $\langle r', r''\rangle$, тогда $\mathfrak{M}(\langle r', r''\rangle)\models r''\in B_{F(r', \beta)}$ (так как $\langle r', r''\rangle\in X$ и X вынуждает это обстоятельство) и, следовательно, $r''\in B_{F(r', \beta)}$; но $F(r', \beta)$ равно независимо от r'' одному и тому же числу p', значит $B_{p'}$ «положительной меры, а с другой стороны $X\Vdash$ «$B_{F(\mathbf{r}, \beta)}$ меры нуль и следовательно, $B_{p'}$ меры нуль.

Противоречие.

Итак, указанная модель обладает теми свойствами «L^+ несчетно» и «r_β случайно относительно $\{r_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$, $\alpha_0\leqslant\beta$», которые обеспечивают $\mathfrak{N}\models$ I и $\mathfrak{N}\models\neg$ II⁰. Покажем, что кроме того в $\mathfrak{N}$ имеется B_2 без свойства Бэра, т. е. $\mathfrak{N}\models$ III⁰. Тем самым будет доказана невыводимость в ZFC утверждения I, III⁰ → II⁰.

Мы уже замечали, что в $\mathfrak{N}$ любое число x конструктивно из счетного отрезка последовательности $\{r_\alpha\}_{\alpha<\nu}$, т. е. из некоторого $\{r_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$, $\alpha_0<\omega_1^{\mathfrak{N}}=\omega_1^{\mathfrak{M}}$ и, что такое $\{r_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ равноконструктивно со случайным над $\mathfrak{M}$ числом r, следовательно, $x\in L_r^+$. Генерическое число не может быть конструктивно из случайного числа так же, как и случайное число не может быть конструктивно из генерического числа (это будет доказано на стр. 119). Отсюда следует, что все числа в $\mathfrak{N}$ негенерические и по следствию к теореме 3 пункта 2 $\mathfrak{N}$ существует Δ_2-неизмеримое B_2. Докажем упомянутое утверждение: допустим g генерическое над $\mathfrak{M}$ число, а r случайное над $\mathfrak{M}$ число и $g = F(r, \alpha)$. Тогда $\mathfrak{M}(r) \models$ «$g = F(r, \alpha)$ и g генерическое над $\mathfrak{M}$ число». Существует B_p, $r \in B_p$, борелевское множество положительной меры с кодом из $\mathfrak{M}$, которое вынуждает это предложение. Почти все числа являются случайными над $\mathfrak{M}$. Рассмотрим $F(r', \alpha)$ как функцию от r', определенную на B_p. Ясно, что множество X значений этой функции не может быть нигде не плотным множеством, так как оно типа $\sum\limits_{p,\alpha}^{1}{}_{1}$ и $g \in X$ (замкнем X, получится нигде неплотное борелевское множество с кодом из $\mathfrak{M}$, накрывающее генерическое над $\mathfrak{M}$ число g). Следующее построение проведем в $\mathfrak{M}$.

Если существует x, $x \in X$ и мера прообраза x относительно $g = F(r, \alpha)$ положительная, то возьмем этот праобраз за B_q, $B_q \subseteq B_p$. Если такого x не существует, то во всяком интервале содержится достаточно короткий подинтервал, прообраз которого имеет меру меньшую любого наперед заданного числа. Тогда пусть l_0 — интервал, содержащий X, выберем на нем плотную дизъюнктную систему интервалов $\{l_n\}$, прообраз которой имеет меру меньшую $\frac{1}{2}\mu(B_p)$, $f^{-1}{}``\bigcup\limits_n l_n \subseteq B_p$ (для этого, выбирая $l_n$, нужно в достаточной степени уменьшить его длину). Положим $B_q = B_p - f^{-1}{}``\bigcup\limits_n l_n$. Это B_q положительной меры и, очевидно, $f``B_q$ нигде не плотное множество.

Выберем в B_q произвольное случайное число r_0. В $\mathfrak{M}(r_0)$ истинно «$F(r_0, \alpha)$ генерическое число», так как B_q вынуждает это. Следовательно, $F(r_0, \alpha)$ — генерическое над $\mathfrak{M}$ число, но с другой стороны, $F(r_0, \alpha)$ накрывается нигде не плотным множеством $l_0 - \bigcup\limits_n l_n$ с кодом из $\mathfrak{M}$. Противоречие.

Осталось доказать те утверждения из теоремы 3, в которых меняются местами II^0 и III^0. Для этого расширим исходную модель $\mathfrak{M} = L^\alpha$, $\alpha < \omega_1 \Delta_2$-случайной (генерической) относительно $\mathfrak{M}$

последовательностью $\{g_\alpha\}_{\alpha<\omega_1^{\mathfrak{M}}}$, определения 1, 2. Получается модель $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}(\{g_\alpha\})$, в которой кардинальный ряд сохраняется, в частности $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{N}_1}$ и $\mathfrak{N} \models$ «L^+ несчетно», а следовательно $\mathfrak{N} \models$ I, далее дословно повторяя предыдущие рассуждения и меняя при этом местами идеалы Δ_1 и Δ_2, генерическое на случайное, получим $\mathfrak{N} \models \neg \mathrm{III}_0$ и $\mathfrak{N} \models \mathrm{II}^0$. Теорема 3 доказана. Заметим, что фактически доказано более сильное утверждение, во-первых, в $\mathfrak{N}$ существуют Π_1^1 — множество с рекурсивным кодом без совершенного ядра и одновременно Δ_2^1 — множество с таким же кодом без свойства Бэра, во-вторых, вместо меры Лебега и свойства Бэра можно было взять, как и в пункте 2, любую меру, топологию или в общем случае σ — идеал Δ в алгебре борелевских множеств, ограниченный рядом очевидных условий.

Сейчас мы покажем, что в $\mathfrak{N}$ множество L^+ неизмеримое по Лебегу (в $\mathfrak{N}_1$ оно же без свойства Бэра), отсюда следует, что в $\mathfrak{N}$ множество L^+ собственно типа $\sum_2^1$, в $\mathfrak{N}$ существует неизмеримое $\sum_2^1$-множество с рекурсивным кодом и случайные числа в $\mathfrak{N}$ образуют неизмеримое Π_2^1-множество с нижней мерой нуль, а верхней — единица.

Теорема 5. Если ZF непротиворечивая теория, то в теории ZFC не выводимы утверждения.

I, $\mathrm{II}^0 \to \mathrm{II}$ и I, $\mathrm{III}^0 \to \mathrm{III}$.

Доказательство. В модели $\mathfrak{N}$ имеют место I и II^0, покажем, что L^+ (множество типа $\sum_2^1$ с рекурсивным кодом) неизмеримо в $\mathfrak{N}$. Для этого заметим, что если L^+ измеримо, то его мера либо нуль, либо L^+ содержит все числа.

Лемма 3. Если Δ — идеал счетного типа, то либо L^+ — счетное множество, либо одно из множеств вида $L^+ + x = \{z \mid \exists y \in L^+ (z = y + x)\}$ Δ-неизмеримо, либо $L^+ \in \Delta$, либо L^+ содержит все числа.

Доказательство. Напомним, что идеал счетного типа, характеризуется тем свойством, что не существует несчетного почти дизъюнктного (т. е. пересечения разрешаются только по элементам идеала) семейства его элементов. Обозначение $X \in \Delta$ в отношении неборелевских множеств означает, что существует B, $X \subseteq B$ и $B \in \Delta$. Допустим все множества вида $L^+ + kx$ — Δ-измеримы, здесь

x — неконструктивное число, а k — произвольное конструктивное число. Если L^+ — несчетное множество, то $\{L^+ + k \cdot x\}$ образует дизъюнктное семейство множеств. Действительно, если $z \in (L^+ + k'x) \cap L^+ + k''x$, то $z = y_1 + k' \cdot x = y_2 + k'' \cdot x$ и $x = \frac{y_2 - y_1}{k' - k''}$. Поскольку все эти множества измеримы и не принадлежат Δ, постольку существуют B_k, $(L^+ + k \cdot x) \Delta B_k \in \Delta$ и B_k почти дизъюнктны, и $B_k \bar{\in} \Delta$. Противоречие. Заметим очевидное следствие: множество L^+ без свойства Бэра или L^+ первой категории, или L^+ содержит все числа. Конечно, все тоже относится и к множествам вида L^+_x. Если Δ-неизмеримость L^+ характеризуется числовой функцией, то она носит крайний характер: нижние меры L^+ и $R - L^+$ суть нули.

Вернемся к доказательству теоремы.

Множество L^+ в $\mathfrak{N}$, очевидно, не содержит случайного числа r, и если L^+ в $\mathfrak{N}$ измеримо, то $\mathfrak{N} \models L^+ \subseteq O_p \cdot \mu O_p < \frac{1}{2}$.

Код p конструктивен из $\{r_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$, $\alpha_0 < \omega_1^{\mathfrak{N}} = \omega_1^{\mathfrak{M}}$. Последовательность $\{r_\alpha\}_{\alpha < \alpha_0}$ случайна над $\mathfrak{M}$, и поэтому свертка r случайное над $\mathfrak{M}$ число, тогда $\mathfrak{N} \models$ «$L^+ \subseteq O_{F(r,\alpha)} \cdot \mu O_{F(r,\alpha)} < \frac{1}{2}$. α — счетный ординал», это $\Pi^1_{2\,r,\alpha}$ — суждение, и оно истинно в $\mathfrak{M}(r) = \mathfrak{M}_1$.

Итак, α — счетный ординал и $\mathfrak{M}_1 \models L^+ \subseteq O_{F(r,\alpha)}$, следовательно, это предложение вынуждается некоторым B_q, $q \in \mathfrak{M}$, $\mu B_q > 0$. Рассмотрим в $\mathfrak{M}$ множество $X = \left\{x \mid x \in B_q \cdot \mu O_{F(x,\alpha)} \geqslant \frac{1}{2}\right\}$, X — борелевское множество, $X \subseteq B_q$. Если X положительной меры, то существует случайное над $\mathfrak{M}$ число r', $r' \in X$. Рассмотрим $\mathfrak{M}(r')$; в нем верно $\forall x \in X\ \mu O_{F(x,\alpha)} = \frac{1}{2}$ $\left(\text{так как это } \Pi^1_{1\,\alpha} \text{ — суждение и оно верно в } \mathfrak{M}\right)$, с другой стороны, в $\mathfrak{M}(r')$ верно $r' \in X$, $\mu O_{F(r',\alpha)} < \frac{1}{2}$ (так как это вынуждается B_q и X). Противоречие. Если X — меры нуль, то $X_1 = B_q - X$ — положительной меры, в $\mathfrak{M}$ множество $X_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x \in X_1 \cdot y \bar{\in} O_{F(x,\alpha)}\} \subseteq R^2$ — положительной меры. По теореме Фубини существует такое y_0, что $\mu(\tau_{y_0} \cap X_2) > 0$, пусть $B_s \subseteq \text{пр}_x(\tau_{y_0} \cap X_2) \subseteq X_1 \subseteq B_q$. Существует случайное над $\mathfrak{M}$ число r', принадлежащее B_s. В $\mathfrak{M}(r')$ верно $y_0 \bar{\in} O_{F(r',\alpha)}$ $\left(\text{так как } \Pi^1_{1\,y_0,s} \text{ — суждение } \forall x \in B_s\ y_0 \bar{\in} O_{F(x,\alpha)} \text{ верно в } \mathfrak{M}\right)$, а с другой стороны, в $\mathfrak{M}(r')$ верно $L^+ \subseteq O_{F(r',\alpha)}$ (так как это вынуждается B_q и B_s). Это доказательство можно провести и непосредственно для модели $\mathfrak{N}$, рассматривая вместо борелевских множеств в R, борелевские множества в $\mathbf{R}$.

Прежде чем переходить к построению моделей, в которых верно 1, $\neg$ II, и I, $\neg$ III покажем, что оно требует привлечение каких-то новых понятий.

Теорема 6. Если Δ есть σ — идеал счетного типа в алгебре B^ν ($\nu \geqslant 1$ и $\nu \in \mathfrak{M}$), предикат. $B_p \in \Delta$ типа Δ_1^1, и для любого борелевского множества, обладающего свойством $B_q = \mathrm{np}_{\leqslant\nu} X \,\overline{\in}\, \Delta$ и $\forall x \in B_q \tau_x \cap X \,\overline{\in}\, \Delta$, верно $\exists y_0 (\tau_{y_0} \cap X \,\overline{\in}\, \Delta)$, тогда в модели $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\{x_\alpha\}_{\alpha<\nu})$ существует $\sum_2^1$-множество с рекурсивным кодом и Δ-неизмеримое, это множество L^+.

Доказательство. Допустим L^+ Δ — измеримое в $\mathfrak{N}$, по лемме 3 $\mathfrak{N} \models L^+ \in \Delta$, тогда в $\mathfrak{N}$ множество L^+ накрывается B_p, $B_p \in \Delta$, и его код по лемме 2 конструктивен из $x = \{x_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ и $\alpha_0 < \omega_1^{\mathfrak{N}}$. Поскольку Δ счетного типа, то $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{N}}$ и, следовательно, $\mathfrak{N} \models p = F(x, \beta)$ и α_0, $\beta < \omega_1^{\mathfrak{M}}$. Тогда в $\mathfrak{M}$ существует B_q, $B_q \,\overline{\in}\, \Delta$ и $B_q \models L^+ \subseteq B_{F(\mathrm{x},\beta)} \cdot B_{F(\mathrm{x},\beta)} \in \Delta$, где x — ярлык для x.

Рассмотрим в $\mathfrak{M}$ борелевское множество

$$X = \{x \in B_q \cdot y \,\overline{\in}\, B_{F(x,\beta)} \cdot B_{F(x,\beta)} \in \Delta\},\ X \subseteq B_q.$$

Если $X_1 = \mathrm{np}\, X \in \Delta$, то $(B_q - X_1) \,\overline{\in}\, \Delta$ и содержит Δ — случайное число x'. Тогда в $\mathfrak{M}(x')$ верно $B_{F(x',\beta)} \in \Delta$ (это вынуждается) и в то же время в $\mathfrak{M}(x')$ верно $B_{F(x',\beta)} \,\overline{\in}\, \Delta$, так как $x' \in B_q - X_1$ и $\mathfrak{M} \models \forall x (x \in B_q - X_1 \rightarrow B_{F(x,\beta)} \,\overline{\in}\, \Delta)$, а это последнее суждение абсолютно и подымается в $\mathfrak{M}(x')$. Противоречие. Если $X_1 \,\overline{\in}\, \Delta$, то оно само содержит Δ-случайное число. Далее X есть фубиниевское, т. е. $\mathrm{np}\, X \,\overline{\in}\, \Delta$ и для всякого x из $\mathrm{np}\, X$ множество $\tau_x \cap X \,\overline{\in}\, \Delta$, следовательно, существует y_0 и $\tau_{y_0} \cap X \,\overline{\in}\, \Delta$, пусть $B_s = \mathrm{np}\, \tau_{y_0} \cap X$, $B_s \,\overline{\in}\, \Delta$. Выберем в нем Δ — случайное число x', тогда в $\mathfrak{M}(x') \models y_0 \in B_{F(x',\beta)}$ (это вынуждается), и в то же время в $\mathfrak{M}(x') \models y_0 \,\overline{\in}\, B_{F(x',\beta)}$, так как $x' \in B_S$ и $\mathfrak{M} \models \forall x \in B_S (y_0 \,\overline{\in}\, B_{F(x,\beta)})$. Противоречие.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{P}_n^\nu$ совокупность борелевских множеств B_p с кодами из $\mathfrak{M}$ меры $> \frac{1}{n}$ в пространстве $\mathbf{R} = R^\nu$ и удовлетворяющих еще одному дополнительному условию, которое мы укажем ниже. Упорядочим это $\mathfrak{P}_n^\nu$ по включению. Фильтры на $\mathfrak{P}_n^\nu$ будем обозначать G^ν. Назовем число p $\frac{1}{n}$-случайным, если борелевское множество B_p, $B_p \subseteq R$ является пересечением генерического над $\mathfrak{M}$ фильтра G^1 на множестве условий $\mathfrak{P}_n^1$. Назовем последовательность чисел $\{p_\alpha\}_{\alpha<\nu}$ $\frac{1}{n}$-случайной над $\mathfrak{M}$, если всякое B_{p_α} есть проекция на ось α пересечения генерического над $\mathfrak{M}$ фильтра G^ν на множестве условий $\mathfrak{P}_n^\nu$. Далее под $\mathfrak{M}$ понимается некоторая счетная модель ZFC вида L^α, $\alpha<\omega_1$, хотя, как и в пункте 2, можно считать, что $\mathfrak{M}$ рекурсивно-замкнутое множество кодов для борелевских множеств из алгебры B^ν. Будем обозначать $\mathfrak{P}_n$ множество $\mathfrak{P}_n^\nu$ для $\nu=\omega_1^{\mathfrak{M}}$ и также опускать индекс ν у множеств $\mathfrak{P}_n^\nu$, B^ν, μ^ν, G^ν в тех случаях, когда размерность пространства R^ν ясна из контекста.

Проекция множества X из $\mathfrak{P}_n$ на любое подпространство $\mathbf{R}$ имеет очевидно меру $>\frac{1}{n}$, пусть $\text{пр}_{<\alpha} X$, $\text{пр}_{\leqslant\alpha} X$ проекция на пространство, натянутое на оси до α-ой (соответственно — до α-ой включительно), тогда $\mu\,\text{пр}_{<\alpha} X>\frac{1}{n}$, $\mu\,\text{пр}_{\leqslant\alpha} X>\frac{1}{n}$. Дополнительное условие, которое предполагается выполненным для элементов $\mathfrak{P}_n^\nu$ состоит в том, что одномерные перпендикуляры вдоль α-ой оси к точкам множества $\text{пр}_{<\alpha}X$ пересекаются с $\text{пр}_{\leqslant\alpha}X$ (и в частности с X) по множествам линейной меры $>\frac{1}{n}$. Фильтр $G^\alpha=\text{пр}_{\leqslant\alpha}G^\nu$, составленный из проекций элементов G^ν, является генерическим над $\mathfrak{M}$ на множестве условий $\mathfrak{P}_n^\alpha$. Достаточно рассмотреть в $\mathfrak{M}$ проекцию $\text{пр}_{\leqslant\alpha}: \mathfrak{P}_n^\nu \to \mathfrak{P}_n^\alpha$, она сохраняет порядок $\subseteq$.

Дополнительное условие стандартным образом обеспечивает то обстоятельство, что $\text{пр}_\alpha G^\alpha=\text{пр}_\alpha G^\nu$ есть генерический фильтр над $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}(\{p_\beta\}_{\beta<\alpha})$ на множестве условий $\mathfrak{P}_n^1$. Множества P_{p_α} меры $\frac{1}{n}$ и состоят из случайных над $\mathfrak{M}$ точек. Действительно, если B_p — множество меры нуль, $p\in\mathfrak{M}$, то накроем B_p в $\mathfrak{M}$ последовательностью открытых множеств $O_{\mathfrak{M}}$ сколь угодно малой меры. По любому элементу B_q множества $\mathfrak{P}_n^\alpha$ найдем его более информативный элемент, проекция которого на ось α не пересекается с B_p. Для этого вычтем из $(\tau_x \cap B_q)$, где $x\in\text{пр}_{<\alpha}B_q$, такое открытое множество $O_{\mathfrak{M}}$, что на перпендикуляре останется множество меры $> \frac{1}{n}$. Полученное множество по теореме Фубини имеет меру $> \frac{1}{n}$. Эти множества составят плотное подмножество $\mathfrak{P}_n^{\alpha}$. Поскольку проекция $\mathrm{pr}_{\alpha} G$ генеричная над $\mathfrak{M}_1$, постольку числа из $P_{p_{\alpha}}$ случайные над $\mathfrak{M}(\{p_{\beta}\}_{\beta<\alpha})$. Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\{p_{\alpha}\})$.

Теорема 7. Если теория ZF непротиворечивая, то в теории ZFC невыводимы утверждения:

а) $\mathrm{I} \to \mathrm{II}$, $\mathrm{I} \to \mathrm{III}$,

б) $\mathrm{I}, \mathrm{II} \to \mathrm{III}$, $\mathrm{I}, \mathrm{III} \to \mathrm{II}$.

Доказательство. Рассмотрим модель $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}\left(\{p_{\alpha}\}_{\alpha<\omega_1^{\mathfrak{M}}}\right)$. Легко видеть, что множество условий $\mathfrak{P}_n$ не содержит несчетного дизъюнктивного подмножества, следовательно, кардинальные ряды $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ совпадают, в частности, $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{N}}$ и $\mathfrak{N} \models$ «L^+ несчетно». Отсюда следует, что $\mathfrak{N} \models \mathrm{I}$. Покажем, что $\mathfrak{N} \models \urcorner\, \mathrm{II}$.

Пусть X — неизмеримое (нижняя мера нуль) $\sum_{2}^{1}$-множество в $\mathfrak{N}$. Как мы уже раз отмечали, x конструктивно из отрезка $\{p_{\beta}\}_{\beta<\alpha}$ и $\alpha < \omega_1^{\mathfrak{N}} = \omega_1^{\mathfrak{M}}$. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}(\{p_{\beta}\}_{\beta<\alpha})$, все числа из $P_{p_{\alpha}}$ случайные над $\mathfrak{M}_1$ и $\mu P_{p_{\alpha}} > 0$, следовательно, почти все числа в $\mathfrak{N}$ случайные над $\mathfrak{M}_1$. Множество X содержит такое число r, оно попадает в некоторую конституанту этого X, все они меры нуль, и коды их содержатся в $\mathfrak{M}_1$. Противоречие.

Для построения модели, соответствующей пункту б) теоремы 6, нужно аналогичным образом рассмотреть совокупность борелевских множеств второй категории в пространстве $\mathbf{R} = R^{\nu}$, удовлетворяющих следующему дополнительному условию: любое счетное подмножество, которое может быть накрыто некоторым $\underset{\sim}{\Pi}_2^0$-множеством, не содержащим других точек того же множества, является Δ_2^0-множеством.

4. Разумно различать по крайней мере два сорта кванторов существования: один сорт кванторов $\exists X$ выражает традиционное, подчиняющееся обычным логическими аксиомам, неэффективное существование, а другой сорт кванторов $\tilde{\exists} X$ — эффектив-

ное существование. Таким образом, $\tilde{\exists} X\, \varphi(X)$ означает, что существует такая формула $\psi(x)$ языка ZF (или терм в языке ZF пополненном ι-термами), что верно $\varphi(\{x \mid \psi(x)\})$. Если в качестве $\varphi(X)$ рассматривать формулы языка дескриптивной теории множеств, то для исследования вопросов эффективного существования может быть применен метод пункта 2. Однако язык ZF позволяет описывать такие объекты, которые не могут эффективно существовать в языке дескриптивной теории множеств. Другая трудность, связанная с рассмотрением квантора $\tilde{\exists} X$ [в формальных теориях заключается в том что утверждение $\tilde{\exists} X\, \varphi(X)$ не выразимо в теории ZFC из-за отсутствия в ней понятия «истины», это обстоятельство можно преодолеть, или выражая смысл $\tilde{\exists} X\, \varphi(X)$ на синтаксическом уровне (как мы и делаем в следующей теореме), или заметив, что понятие истины, отнесенное к континууму и его подмножествам, все-таки выразимо в теории ZFC.

Теорема 8. Если теория ZF непротиворечива, то ни для какой формулы $\varphi(x)$ языка ZF в теории ZFC не выводимо предложение $\S_i \to$ «$\{x \mid \varphi(x)\}$ обладает свойством $\S_i$». Здесь «X обладает свойством $\S_i$» означает, например, для $i = 2$, что X неизмеримое множество.

Теорема 9. Если ZF непротиворечивая теория, то в ZFC не выводимы утверждения

$$\tilde{\S}_i \to \tilde{\S}_j \text{ для } i \neq j.$$

Для доказательства теоремы 8 в той части, которая утверждает $\mathrm{ZFC} \nvdash \S_2 \to \tilde{\S}_2$, рассмотрим $\mathfrak{M}$ счетную модель ZFC вида L^ν, $\nu < \omega_1$.

Пусть $\nu_1 = \omega_1^{\mathfrak{M}}$ и $\nu_2 = \omega_2^{\mathfrak{M}}$.

Определение 5. «Континуум» R_{ν_1} в отличие от обычного континуума R состоит из всевозможных отображений ω в ν_1 с обычной топологией произведения и алгеброй борелевских множеств. Пусть $\mathbf{R} = R_{\nu_1}^{\nu_2}$ произведение «континуумов» R_{ν_1} с топологией произведения и алгеброй борелевских множеств. Пусть Δ_2 — идеал множеств первой категории в этой алгебре. Назовем последовательность $\{h_\alpha\}_{\alpha < \nu_2}$ Δ_2-случайной (генерической) относительно $\mathfrak{M}$, если она избегает всех множеств первой категории B_p с кодом p из $\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}(\{h_\alpha\}_{\alpha < \nu_2})$, где $\{h_\alpha\}$ — такая Δ_2-случайная последовательность. Заметим, что каждое h_α очевидно равноконструктивно с числом $\bar{h}_\alpha$ из «настоящего» континуума, которое является кодом ν_1. В этом смысле последовательность $\{h_\alpha\}_{\alpha<\nu_2}$ можно рассматривать как обычную последовательность чисел $\{\bar{h}_\alpha\}_{\alpha<\nu_2}$, рассмотрение таких особых «чисел», как h_α, связано со специфическим характером случайности чисел $\bar{h}_\alpha$. Поскольку в этой работе нет оснований делать различия между равноконструктивными объектами, можно отождествить h_α и $\bar{h}_\alpha$.

Покажем, что в $\mathfrak{N}$ существует неизмеримое $\underset{x}{\Delta^1_2}$-множество, где x — любой член последовательности $\{\bar{h}_\alpha\}_{\alpha<\nu_2}$. Для этого по теореме 1 достаточно показать, что в $\mathfrak{N}$ почти все числа неслучайные относительно $\mathfrak{M}(x)$. Положим, например, $x=\bar{h}_1$, и пусть далее α меняется, начиная с двух. Последовательность $\{h_\alpha\}_{2\leqslant\alpha<\nu_2}$ Δ_2 — случайная (генерическая) над $\mathfrak{M}(h_1)=\mathfrak{M}(x)$. В $\mathfrak{N}$ все равноконструктивны с Δ_2-случайными (генерическими) относительно $\mathfrak{M}(x)$ числами g_α, эти g_α не совпадают с $\bar{h}_\alpha$. Число x позволяет установить в $\mathfrak{M}(x)$ взаимно-однозначное соответствие между ν_1 и ω, и изоморфизм R_{ν_1} и R, а также изоморфизм $\mathbf{R}=R^{\nu_2}_{\nu_1}$ и R^{ν_2}, где ν_2 теперь совпадает с $\omega_1^{\mathfrak{M}(x)}$. При этом изоморфизме h_α переходят в g_α, а $\{h_\alpha\}_{2\leqslant\alpha<\nu_2}$ в $\{g_\alpha\}_{2\leqslant\alpha<\nu_2}$. Последовательность $\{g_\alpha\}_{2\leqslant\alpha<\nu_2}$ Δ_2 — случайная (генерическая) над $\mathfrak{M}(x)$, так как такова последовательность $\{h_\alpha\}$. По лемме 2 в $\mathfrak{N}$ любое число y конструктивно из счетного отрезка $\{g_\alpha\}_{\alpha<\alpha_0}$ и $\alpha_0<\omega_1^{\mathfrak{N}}=\omega_1^{\mathfrak{M}(x)}=\nu_2$. Свертка этой счетной последовательности, число $\bar{g}$ является Δ_2-случайным (генерическим) над $\mathfrak{M}(x)$ числом. Действительно, достаточно рассмотреть в $\mathfrak{M}(x)$ борелевский изоморфизм между R^{α_0} и R, сохраняющий свойство «быть множеством первой категории». Однако никакое Δ_1-случайное над $\mathfrak{M}(x)$ число y не может быть конструктивно из Δ_2-случайного (генерического) над $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}(x)$ числа $\bar{g}$.

Допустим противное: $\mathfrak{M}_1(\bar{g})\models$ «y Δ_1-случайное над $\mathfrak{M}_1$ число». Мы рассматриваем утверждение о Δ_1-случайности в $\mathfrak{M}_1(\bar{g})$, а не в $\mathfrak{N}$ потому, что оно абсолютно, типа $\underset{y,\,\bar{h}_1,\,\bar{g}}{\Pi^1_2}$. Следовательно, это утверждение вынуждается некоторым интервалом l_0. Тогда найдется такая плотная дизъюнктная система интервалов l^1_n, что $l^1\Vdash p^1_n<$

$< F(g) < q_n^1$, где F — геделевская функция и $F(g) = y$ (в F еще входят $\bar{h}_1$ и счетные в $\mathfrak{M}_1(g)$ и $\mathfrak{M}_1$ ординалы), а (p_n^1, q_n^1) — интервалы с рациональными концами и открытое множество $\bigcup\limits_n \{(p_n^1, q_n^1)\}$ длины $\leqslant \varepsilon_1$. Выберем ε_m, $\varepsilon_m \to 0$, и для каждого из них проведем указанное построение плотной дизъюнктной в l_0 системы интервалов (p_n^m, q_n^m) и такой, что

$$l_n \Vdash p_n^m < F(g) < q_n^m \text{ и } \mu \bigcup_n \{(p_n^m, q_n^m)\} \leqslant \varepsilon_m.$$

Тогда $\bigcup\limits_n l_n^m \Vdash F(g) \in \bigcup\limits_n (p_n^m, q_n^m)$ и $\bigcap\limits_m \bigcup\limits_n l_n^m \Vdash F(g) \in \bigcap\limits_m \bigcup\limits_n (p_n^m, q_n^m)$. Важно, что семейства $\{l_n^m\}$ и $\{(p_n^m, q_n^m)\}$ принадлежат $\mathfrak{M}_1$ (и, следовательно, их объединения и пересечения являются борелевскими множествами с кодами из $\mathfrak{M}_1$), и множества $\bigcup\limits_n l_n^m$, $\bigcap\limits_m \bigcup\limits_n l_n^m$ плотные в l_0 множества типа G_δ (это обеспечивает тот факт, что они не первой категории).

Пусть $B_p = \bigcap\limits_m \bigcup\limits_n l_n^m$, это B_p-борелевское множество не первой категории с кодом из $\mathfrak{M}_1$. Выберем в B_p какое-нибудь Δ_2-случайное число g', $g' \in B_p$. В $\mathfrak{M}_1(g')$ верно, что $F(g')$ Δ_1-случайное число над $\mathfrak{M}_1$ (это вынуждается l_0 и B_p), а с другой стороны, в $\mathfrak{M}_1(g')$ верно, что $F(g')$ входит в $B_q = \bigcap\limits_m \bigcup\limits_n (p_n^m, q_n^m)$ (так как это обстоятельство также вынуждается B_p). Борелевское множество B_q с кодом q из $\mathfrak{M}_1$ меры нуль. Противоречие.

Осталось показать, что $\mathfrak{N} \models \neg \S_2$. Для этого следует рассмотреть произвольную формулу $\varphi(x)$ языка ZF и показать, что $\mathfrak{N} \Vdash$ «$\{x \mid \varphi(x)\}$ измеримое». Для этого достаточно по формуле $\varphi(x)$ найти такую замкнутую формулу ψ (слабая абсолютность), что $\mathfrak{N} \models \forall x \in \mathscr{R}_{\mathfrak{M}\Delta_1} \times$ $\times (\varphi(x) \equiv \mathfrak{M}(x) \models \psi)$. После этого с помощью следствия 2 к теореме 1 (используя при этом и доказательство самой теоремы 1) получаем, что в $\mathfrak{N}$ множество $\{x \mid \varphi(x)\}$ измеримое. Слабая абсолютность произвольной формулы $\varphi(x)$ в модели $\mathfrak{N}$ следует из того, что эта модель, как и модель Леви, о которой говорилось в пункте 1, обладает однородным континуумом: это означает, что для всякого x, $x \in \mathscr{R}_{\mathfrak{M}\Delta_1}$ модель $\mathfrak{N}$ является расширением $\mathfrak{M}(x)$ с помощью последовательности $\{h_\alpha\}_{\alpha < \nu_2}$ (зависящей от выбора x) Δ_2-случайной относительно $\mathfrak{M}(x)$. Доказательство этого последнего утверждения для модели $\mathfrak{N}$ протекает точно так же, как и для модели Леви, [12], стр. 89 или [2]. Теорема 8 доказана.

Дескриптивные проблемы не зависят от аксиом теории множеств $V=L$, континуум-гипотезы CH или GCH и аксиомы выбора AC; эти последние также не зависят от дескриптивных утверждений [4].

Результаты, изложенные в этой работе (за исключением теоремы 7) получаются с помощью расширения исходного множества $\mathfrak{M}$ последовательностью $\{x_\alpha\}_{\alpha<\nu}$ (или одним числом x, $\nu=1$) случайной над $\mathfrak{M}$ относительно некоторого идеала Δ в алгебре борелевских множеств B пространства вида $R_{\nu_1}^{\nu_2}$ (обычно $\nu_1=\omega$) или все то же самое можно получить методом, указанным в пункте 2, заменяя квантор $\forall$ на операцию $\bigcap$, а ее на операцию ${}^{\mathfrak{B}}\bigcap$, где $\mathfrak{B}=B/\Delta$. Некоторые результаты (например, теорема 7), требуют иной конструкции, связанной с идеалом Δ: нужно рассмотреть «фильтр». $\Phi=B-\Delta$ и числа (или последовательности числа), определяемые им, как множеством вынуждающих условий. Такие числа и последовательности можно называть Δ-генерическими.

Этой конструкции также можно придать геометрический характер.

Если за Δ_3 взять идеал из тех счетных множеств, коды которых принадлежат $\mathfrak{M}$, то полученные Δ_3-генерические числа не могут быть охарактеризованы как Δ-случайные числа ни для какого идеала Δ. Модель $\mathfrak{M}(x)$, где x Δ_3 — генерическое число, имеет ровно две степени конструктивности и обладает рядом других интересных свойств.

Автор благодарит В. Г. Кановея за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новиков П. С.* О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. — «Труды математического института имени В. А. Стеклова», 1951, т. XXXVIII, с. 279.
2. *Solovay R.* A model of set theory in wich every set of reals is Lebesgue measurable. — «Ann. Math.», 1970, vol. 92, № 1.
3. *Addison J.* Some consequences of axiom of constructibility. — «Fund. Math.», 1959, vol. 46, p. 337.

4. *Любецкий В. А.* Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел. — «ДАН СССР», 1968, т. 182, № 4.
5. *Solovay R.* The cardinality of Σ_2^1 sets. — Iu: Foundations of Mathematics». Berlin, 1969.
6. *Любецкий В. А.* Тезисы доклада на конференции по алгебре и логике. Иваново, 1970.
7. *Любецкий В. А.* Тезисы доклада на Всесоюзном симпозиуме по математической логике. Алма-Ата, 1969.
8. *Любецкий В. А.* Независимость некоторых предложений дескриптивной теории множеств от теории множеств Цермело—Френкеля. — «Вестник МГУ», 1971, № 2.
9. *Любецкий В. А.* Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчетного множества, не содержащего совершенного подмножества типа CA. — «ДАН СССР», 1970, т. 195, № 3.
10. *Любецкий В. А.* Измеримость и наличие совершенного ядра у проективных множеств. Канд. дис. М., 1971.
11. *Коэн П.* Теория множеств и континуум—гипотеза. М., 1969.
12. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М., 1973.