

УДК 512.643

СИММЕТРИЧНЫЕ МАТРИЦЫ, ЭЛЕМЕНТАМИ КОТОРЫХ СЛУЖАТ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ

© 2020 г. А. В. Селиверстов

127051 Москва, Б. Каретный пер., 19, стр. 1, ИППИ РАН, Россия

e-mail: slvstv@iitp.ru

Поступила в редакцию 08.07.2019 г.
Переработанный вариант 26.07.2019 г.
Принята к публикации 18.09.2019 г.

Существует большое множество вещественных симметричных матриц, элементами которых служат линейные функции нескольких переменных, причем каждая матрица этого множества знакоопределена в некоторой точке, т.е. после подстановки некоторых числовых значений вместо переменных получается знакоопределенная матрица. В частности, это свойство справедливо для почти всех таких матриц второго порядка, чьи элементы зависят от двух переменных. То же справедливо для почти всех матриц второго порядка, элементы которых зависят от большего числа переменных, когда это число превышает порядок матрицы. Некоторые примеры рассмотрены подробно. Также рассмотрены некоторые несимметричные матрицы. В частности, для почти каждой матрицы, элементами которой служат линейные функции нескольких переменных, определитель этой матрицы положителен в некоторой точке и отрицателен в другой точке. Библ. 29.

Ключевые слова: линейная алгебра, симметричная матрица, полуопределенное программирование, матрица Гессе.

DOI: 10.31857/S0044466920010147

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрены вещественные матрицы, элементами которых служат линейные функции нескольких переменных. Вообще говоря, эти функции неоднородные. Наиболее интересен случай, когда матрица симметричная, а число независимых переменных равно порядку матрицы. Такова, например, матрица вторых производных — матрица Гессе — многочлена третьей степени от нескольких переменных. В частности, она полезна при поиске минимума такого многочлена на компактном множестве [1]. Однако не любая симметричная $n \times n$ матрица, элементы которой зависят от n переменных, получается указанным способом. Например, диагональная 2×2 матрица $\text{diag}(x_2, x_1)$ с обратным порядком переменных не служит матрицей Гессе никакого многочлена от двух переменных x_1 и x_2 .

Рассматриваемые матрицы тесно связаны с 3-тензорами, координатами которых служат числовые коэффициенты в составе матричных элементов. Однако в этой работе рассматриваются такие свойства матриц, которые выполняются при подстановке числовых значений вместо переменных. В частности, будет ли матрица знакоопределенной в некоторой точке? Эти задачи сводятся к задаче о разрешимости системы нелинейных неравенств. Последняя рассматривается во многих работах (см., например, [2]–[4]). Но в типичном случае эта задача имеет высокую вычислительную сложность. С другой стороны, связь этих матриц с 3-тензорами также полезна для оценки вычислительной сложности; многие такие задачи оказываются NP -трудными [5].

Если матрица Гессе многочлена от двух переменных знакоопределена в некоторой точке, то на графике этого многочлена есть эллиптическая точка, в частности, этот график не является линейчатой поверхностью. Это объясняет особый интерес к свойствам матриц Гессе многочленов при моделировании сложных поверхностей для компьютерной графики и систем автоматизированного проектирования [6].

Поиск точки, в которой матрица знакоопределена, тесно связан с задачами полуопределенного программирования — частного случая конического программирования [7]–[10]. С теорией графов связана близкая задача дополнения до симметричной положительно полуопределенной

матрицы, у которой фиксированы элементы на главной диагонали и некоторые другие элементы [11]. Также возможно применение полуопределенного программирования для иных комбинаторных задач [12], хотя для алгоритмически трудных задач известна неаппроксимируемость задачей полуопределенного программирования малого размера [13].

Матрицы специального вида, элементами которых служат линейные функции над различными полями, изучались многими авторами. В работах [14]–[16] рассмотрены несимметричные матрицы, элементами которых служат переменные, среди которых могут быть совпадающие; там исследованы свойство нормальности и ранг таких матриц. В работах [17]–[19] рассмотрены матрицы с аффинно независимыми столбцами, элементами которых служат линейные функции, причем никакая переменная не встречается в двух разных столбцах, при условии выполнения данного ограничения на ранг при любых значениях переменных.

Свойства, выполнимые не всегда, но за исключением подмножества малой меры, например, равной нулю, играют важную роль для создания эвристических алгоритмов [20]–[22].

При обсуждении вычислительной сложности можно предполагать, что рассматриваемые линейные функции определены над конечным расширением поля рациональных чисел, вложенном в поле вещественных чисел. Тогда вычисления можно выполнить в пакетах программ для символьных вычислений [23]. Для проверки знакоопределенности симметричной числовой матрицы удобно использовать LDU -разложение, вычислимое соответствующей командой в пакете MathPartner. Иначе проверка может быть выполнена непосредственным вычислением угловых миноров. Согласно критерию Сильвестра, симметричная матрица A положительно определена тогда и только тогда, когда все ее угловые миноры Δ_k положительные. Тогда матрица $-A$ отрицательно определена, а знаки ее угловых миноров чередуются: угловые миноры Δ_{2k} четного порядка положительные, а угловые миноры Δ_{2k+1} нечетного порядка – отрицательные. Определитель матрицы вычислим за полиномиальное время, верхняя оценка которого зависит от сложности матричного умножения. Верхние оценки сложности умножения рассмотрены, например, в недавно опубликованных работах [24]–[27]. С другой стороны, вычислительная сложность операций умножения и деления над конечным расширением основного поля связана со сложностью алгоритма вычисления наибольшего общего делителя многочленов [28].

Для данного множества матриц, элементы которых зависят от параметров ξ_1, \dots, ξ_m , некоторое свойство $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_m)$ выполнено для почти каждой матрицы этого множества, если существует такой многочлен $p(\xi_1, \dots, \xi_m)$, не равный тождественно нулю, что для каждого набора значений параметров ξ_1, \dots, ξ_m , если свойство $\Phi(\xi_1, \dots, \xi_m)$ не выполнено, то многочлен обращается в нуль $p(\xi_1, \dots, \xi_m) = 0$. Свойство, которое выполнено для почти каждого набора значений параметров, не выполняется лишь на нигде не плотном множестве меры нуль. Например, для симметричных 2×2 матриц

$$\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \xi_3 & \xi_2 \end{pmatrix},$$

у которых тремя элементами служат независимые параметры ξ_1, ξ_2 и ξ_3 , почти каждая матрица невырождена, поскольку на вырожденных матрицах обращается в нуль многочлен $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 \xi_2 - \xi_3^2$. Но в общем случае множество наборов значений, на которых свойство Φ не выполняется, может быть собственным подмножеством множества нулей многочлена p .

Для матриц, элементами которых служат линейные функции от n переменных, набором параметров служит совокупность числовых коэффициентов всех этих функций. В общем случае такая $n \times n$ матрица зависит от $n^2(n+1)$ независимых параметров. Если дополнительно требовать, что эта матрица симметричная, то она зависит лишь от $\frac{1}{2}n(n+1)^2$ независимых параметров.

Через $\text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_n)$ обозначается диагональная матрица, у которой элементами главной диагонали служат ℓ_1, \dots, ℓ_n в указанном порядке. Например, почти каждая 2×2 матрица вида $\text{diag}(\xi_1 x_1 + \xi_3, \xi_2 x_2 + \xi_4)$ не равна тождественно нулевой, поскольку это равносильно отличию от нуля значения многочлена $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2$ от параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3 и ξ_4 . Однако почти каждая такая матрица равна нулевой матрице в некоторой точке, поскольку если значение многочлена $\xi_1^2 + \xi_2^2$ не равно нулю, то координатами этой точки служат числа $x_1 = -\xi_3/\xi_1$ и $x_2 = -\xi_4/\xi_2$.

2. РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Для почти каждой $n \times n$ матрицы A , элементами которой служат линейные функции от n переменных, существует точка, в которой определитель матрицы A положителен, и существует другая точка, в которой определитель матрицы A отрицателен. То же верно для почти каждой симметричной $n \times n$ матрицы рассматриваемого вида.*

Доказательство. В общем случае определитель $\det(A)$ не равен нулю тождественно, но обращается в нуль в некоторой точке. Чтобы найти такую точку, достаточно указать точку P , в которой все элементы первой строки одновременно обращаются в нуль. Точка P служит решением системы n неоднородных линейных алгебраических уравнений от n неизвестных. В общем случае эта система не вырождена и имеет единственное решение. Действительно, для этого достаточно отличия от нуля определителя вспомогательной $n \times n$ матрицы, составленной из коэффициентов при линейных членах тех функций, которые служат элементами первой строки исходной матрицы A . Этот определитель равен многочлену от числовых параметров, определяющих матрицу A . Следовательно, для почти каждой матрицы A он отличен от нуля. Поскольку здесь рассматривается лишь одна строка, это рассуждение не меняется при ограничении на симметричные матрицы.

Аналогичное рассуждение показывает, что для почти каждой матрицы A существует такая прямая L , проходящая через точку P , что в каждой точке прямой L элементы первой строки матрицы A тождественно равны нулю, за исключением первого элемента первой строки. Обозначим через y значение этого элемента. В общем случае, когда y не равен нулю тождественно, значение y определяет точку на прямой L . В частности, нулевое значение $y = 0$ соответствует точке P . Значение определителя матрицы A в точках на прямой L равно $y \det(B)$, где $(n-1) \times (n-1)$ матрица B получается из матрицы A вычеркиванием первой строки и первого столбца. Поскольку матрица B не зависит от элементов первой строки матрицы A , то она не зависит от выбора точки P и прямой L . Поэтому для почти каждой матрицы A с фиксированной первой строкой подматрица B невырождена в точке P . Следовательно, в достаточно малой окрестности точки P на прямой L определитель $\det(B)$ отличен от нуля и не меняет знак. Но в этой окрестности определитель $\det(A) = y \det(B)$ меняет знак в зависимости от знака y . Поэтому в окрестности точки P определитель матрицы A принимает как положительные, так и отрицательные значения. То же самое рассуждение справедливо при ограничении на симметричные матрицы.

Теорема 2. *Для почти всех наборов линейных функций ℓ_0, \dots, ℓ_n от n переменных x_1, \dots, x_n и для любой $n \times n$ матрицы M матрица*

$$\ell_0 M + \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_n)$$

знакоопределена в некоторой точке. В частности, почти каждая симметричная 2×2 матрица, элементами которой служат линейные функции двух переменных, знакоопределена в некоторой точке.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что никакая из линейных функций ℓ_0, \dots, ℓ_n не равна линейной комбинации остальных. В противном случае $(n+1) \times (n+1)$ матрица их коэффициентов вырождена, то есть равен нулю ее определитель — многочлен степени $n+1$ от этих коэффициентов. Более того, можно считать, что эти линейные функции суть $\ell_1 = x_1, \dots, \ell_n = x_n$ и некоторая $\ell_0(x_1, \dots, x_n)$, которая не обращается в нуль в начале координат. Поскольку гиперплоскость $\ell_0 = 0$ не инцидентна началу координат, она содержит либо точку первого ортанта, все координаты которой положительные, либо точку противоположного ортанта, все координаты которой отрицательны. В этой точке матрица $\ell_0 M + \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$ диагональная и знакоопределенная.

Каждая симметричная 2×2 матрица может быть разложена в сумму $\ell_0 J_2 + \text{diag}(\ell_1, \ell_2)$, где J_2 обозначает обменную матрицу

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следующий пример показывает, что распознавание существования точки, в которой матрица из теоремы 2 знакоопределена, не всегда тривиально.

Пример. Рассмотрим зависимость от числового параметра μ матрицу

$$\mu(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен многочлену $\mu x_1^2 + \mu x_2^2 + (1 + 2\mu)x_1 x_2$. Если параметр $\mu > -1/4$ и значения обеих переменных x_1 и x_2 равны положительному числу $x_1 = x_2 > 0$, то матрица положительно определена. Однако если $\mu = -1$, то определитель равен $-(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \leq 0$; в этом случае матрица не может быть знакоопределена ни в одной точке.

Замечание 1. В условиях теоремы 2, если линейные функции ℓ_0, \dots, ℓ_n линейно независимые (то есть никакая из них не равна тождественно линейной комбинации остальных функций с числовыми коэффициентами), то явное вычисление точки, в которой матрица знакоопределена, сводится к решению задачи линейного программирования. Если функции ℓ_0, \dots, ℓ_n заданы над конечным расширением поля рациональных чисел, то все необходимые вычисления, включая проверку линейной независимости функций, выполнимы за полиномиальное время. Теорема 2 справедлива и для матриц, элементами которых служат линейные функции большего числа переменных, чем порядок матриц.

Теорема 3. Для почти всех наборов линейных функций ℓ_1, \dots, ℓ_n от n переменных x_1, \dots, x_n и для любой числовой $n \times n$ матрицы M матрица $M + \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_n)$ положительно определена в некоторой точке и отрицательно определена в некоторой другой точке.

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 2, в общем случае для любого числа α система линейных уравнений $\ell_1 = \alpha, \dots, \ell_n = \alpha$ имеет решение. Для достаточно больших значений числа α в точке, соответствующей решению, получается матрица с диагональным преобладанием. Следовательно, она положительно определена. При отрицательных значениях числа α с достаточно большим абсолютным значением соответствующая числовая матрица отрицательно определена.

Теорема 4. Для всех троек линейных функций ℓ_0, ℓ_1 и ℓ_2 от двух переменных x_1 и x_2 , если $\ell_0(0, 0) \neq 0$, то симметричная 3×3 матрица

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ell_0 & \ell_1 \\ \ell_0 & x_2 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

знакоопределена в некоторой точке.

Доказательство. Покажем, что существуют значения переменных x_1 и x_2 , при которых второй угловой минор $\Delta_2 = x_1 x_2 - \ell_0^2$ положительный. Возможны два случая. Если ℓ_0 не равна тождественно константе, то система двух уравнений $\ell_0 = 0, x_1 = x_2$ имеет ненулевое решение, поскольку $\ell(0, 0) \neq 0$. При этих значениях переменных минор Δ_2 положительный. Если ℓ_0 тождественно равна константе, то Δ_2 положительный при всех достаточно больших значениях переменных x_1 и x_2 .

Если так выбранные значения обеих переменных x_1 и x_2 положительные, то при достаточно больших значениях x_3 определитель матрицы тоже положительный. Согласно критерию Сильвестра, матрица положительно определена. Аналогично, если значения обеих переменных x_1 и x_2 отрицательные, то при отрицательном значении x_3 (достаточно большом по абсолютной величине) определитель матрицы отрицательный; матрица отрицательно определена.

Замечание 2. В теореме 4 условие неоднородности линейной функции ℓ_0 существенно.

Пример 1. Ни в какой точке симметричная 3×3 матрица

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_1 + x_2 & 0 \\ x_1 + x_2 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

не является знакоопределенной, поскольку второй угловой минор, равный $\Delta_2 = -(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2)$, не бывает положительным. Но в точках прямой, заданной уравнениями $x_1 = x_2 = 0$, эта матрица по-

дуопределена. Она положительно полуопределена при $x_3 > 0$ и отрицательно полуопределена при $x_3 < 0$. Для любой матрицы, элементами которой служат однородные линейные функции, все элементы обращаются в нуль в начале координат, то есть матрица полуопределена.

Линейная независимость элементов на главной диагонали матрицы также упрощает поиск точки, в которой матрица полуопределена. Иначе такой точки может не быть даже для диагональных матриц.

Пример 2. Диагональная 3×3 матрица $\text{diag}(x_1, x_1 + 2, -x_1 - 1)$, элементы которой зависят только от одной переменной x_1 , не бывает полуопределена ни в какой точке. Поэтому для любых функций ℓ_0, ℓ_1 и ℓ_2 от любого числа переменных симметричная 3×3 матрица

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ell_0 & \ell_1 \\ \ell_0 & x_1 + 2 & \ell_2 \\ \ell_1 & \ell_2 & -x_1 - 1 \end{pmatrix}$$

тоже не бывает полуопределена ни в какой точке.

С другой стороны, диагональная матрица $\text{diag}(x_1, x_1 + 2, -x_1 - 1)$ служит пределом при $k \rightarrow \infty$ последовательности диагональных матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 + \frac{1}{k}x_2 + 2 & 0 \\ 0 & 0 & -x_1 + \frac{1}{k}x_3 - 1 \end{pmatrix},$$

каждая из которых положительно определена в точке $(1, 0, 3k)$ и отрицательно определена в точке $(-1, -2k, 0)$.

Аналогично, любая постоянная матрица M служит пределом при $k \rightarrow \infty$ последовательности матриц $M + \frac{1}{k} \text{diag}(x_1, \dots, x_1)$, элементы которых зависят от одной переменной, каждая из которых положительно определена в некоторой точке и отрицательно определена в некоторой другой точке.

3. ОБСУЖДЕНИЕ

Задача полуопределенного программирования заключается в оптимизации линейного функционала на пересечении аффинного пространства и выпуклого конуса положительно полуопределенных матриц. Метод внутренней точки часто оказывается эффективным для решения этой задачи, но предполагает знание начальной точки из допустимой области. Полученные результаты позволяют установить существование такой точки для некоторых случаев. Более того, доказательства теорем 2 и 3 конструктивные, то есть в предположении общности из условий этих теорем легко вычислить за полиномиальное число арифметических операций такую точку, в которой матрица знакоопределена. С другой стороны, в общем случае теорема 2 не гарантирует, что существует точка, в которой матрица положительно полуопределена.

Из теоремы 1 следует, что почти каждая матрица, элементами которой служат линейные функции от достаточно большого числа переменных, не может быть знакоопределена в каждой точке. В частности, если такая матрица положительно определена в некоторой точке, то найдется другая точка, в которой она положительно полуопределена, но не определена.

Рассмотрим матрицы Гессе многочленов третьей степени. Для многочленов от двух переменных это симметричные 2×2 матрицы, для которых применима теорема 2. То есть для почти каждого такого многочлена найдется точка, в которой его матрица Гессе знакоопределена. Следовательно, для почти каждого многочлена третьей степени от двух переменных его график содержит эллиптическую точку. В частности, почти никакие из этих поверхностей не являются линейчатыми. Хотя именно линейчатые поверхности играют важную роль для моделирования сложных поверхностей. Если графиком многочлена служит линейчатая поверхность, то матрица Гессе этого многочлена полуопределена в каждой точке. С другой стороны, обезьянье седло служит примером графика многочлена третьей степени, не имеющего эллиптической точки и не являющегося линейчатой поверхностью. В этом случае матрица Гессе соответствующего многочлена становится нулевой в некоторой точке.

В общем случае, для многочленов третьей степени от трех переменных линейная замена переменных приводит матрицу Гессе к виду

$$\text{diag}(y_1, y_2, y_3) + \ell_0(y_1, y_2, y_3)M + C,$$

где $\ell_0(y_1, y_2, y_3)$ – линейная функция, а M и C – симметричные числовые 3×3 матрицы. Это следует из разложимости кубической формы от трех переменных в сумму не более четырех кубов линейных форм [29]. Если матрица C диагональная, то для доказательства существования точки, в которой матрица знакоопределена, применима теорема 2. Если матрица M диагональная, то применима теорема 3. Если функция ℓ_0 зависит лишь от значений переменных y_1 и y_2 , то применима теорема 4.

Для почти всех многочленов вида

$$\ell_1^3(x_1, \dots, x_n) + \dots + \ell_n^3(x_1, \dots, x_n) + (\mu \ell_0(x_1, \dots, x_n) + \lambda)^3,$$

где каждая из линейных функций ℓ_0, \dots, ℓ_n зависит от n переменных, а λ и μ – это некоторые числа, в результате невырожденного линейного преобразования координат получается многочлен, у которого матрица Гессе удовлетворяет условиям одной из теорем 2 или 3. Однако если число переменных n больше двух, то не любой многочлен третьей степени представим в таком виде [29].

Для упрощения обозначений рассмотрим многочлены вида

$$f = x_1^3 + \dots + x_n^3 + \ell^3(x_1, \dots, x_n) + (\mu \ell(x_1, \dots, x_n) + \lambda)^3.$$

Существует линейная функция $m(x_1, \dots, x_n)$, для которой вторые частные производные многочлена f равны

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = 6\delta_{jk}x_k + 6\frac{\partial \ell}{\partial x_j} \frac{\partial \ell}{\partial x_k} m(x_1, \dots, x_n),$$

где $\delta_{kk} = 1$ и если $j \neq k$, то $\delta_{jk} = 0$. Если m – это ненулевая константа, применима теорема 3. Иначе, если $m(0, \dots, 0) \neq 0$, то применима теорема 2. В этих случаях матрица Гессе знакоопределена в некоторой точке. И лишь в случае $m(0, \dots, 0) = 0$ такой точки может не быть. Однако если $m(0, \dots, 0) = 0$, то все элементы матрицы Гессе обращаются в нуль в начале координат. Следовательно, для любого многочлена рассматриваемого вида матрица Гессе полуопределена в некоторой точке.

Автор благодарит рецензента за сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Заботин В.И., Черняев Ю.А.* Метод Ньютона для задачи минимизации выпуклой дважды гладкой функции на предвыпуклом множестве // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 3. С. 340–345. [Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. No. 3. P. 322–327. <https://doi.org/10.1134/S0965542518030144>]
2. *Воробьев Н.Н. (мл.), Григорьев Д.Ю.* Нахождение компонент связности полуалгебраического множества в субэкспоненциальное время // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1991. Т. 192. С. 3–46. [J. Math. Sci. 1994. V. 70. No. 4. P. 1847–1872. <https://doi.org/10.1007/BF02112426>]
3. *Евтушенко Ю.Г., Посыпкин М.А., Рыбак Л.А., Туркин А.В.* Отыскание множеств решений систем нелинейных неравенств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 8. С. 1248–1254. [Comput. Math. Math. Phys. 2017. V. 57. No. 8. P. 1241–1247. <https://doi.org/10.1134/S0965542517080073>]
4. *Safey El Din M., Schost É.* A nearly optimal algorithm for deciding connectivity queries in smooth and bounded real algebraic sets // J. ACM. 2017. V. 63. No. 6. Article 48. <https://doi.org/10.1145/2996450>
5. *Hillar C.J., Lim L.-H.* Most tensor problems are NP-hard // J. ACM. 2013. V. 60. No. 6. Article 45. 39 p. <https://doi.org/10.1145/2512329>
6. *Сальков Н.А.* Общие принципы задания линейчатых поверхностей. Часть 1 // Геометрия и графика. 2018. Т. 6. № 4. С. 20–31. https://doi.org/10.12737/article_5c21f4a06dbb74.56415078
7. *Жадан В.Г.* Прямой метод Ньютона для линейной задачи конического программирования // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58. № 2. С. 220–227. [Comput. Math. Math. Phys. 2018. V. 58. No. 2. P. 207–214. <https://doi.org/10.1134/S0965542518020173>]

8. *Renegar J.* Accelerated first-order methods for hyperbolic programming // *Math. Program. Ser. A.* 2019. V. 173. P. 1–35.
<https://doi.org/10.1007/s10107-017-1203-y>
9. *Lourenço B.F., Kitahara T., Muramatsu M., Tsuchiya T.* An extension of Chubanov’s algorithm to symmetric cones // *Math. Program. Ser. A.* 2019. V. 173. P. 117–149.
<https://doi.org/10.1007/s10107-017-1207-7>
10. *Aravkin A.Y., Burke J.V., Drusvyatskiy D., Friedlander M.P., Roy S.* Level-set methods for convex optimization // *Math. Program. Ser. B.* 2019. V. 174. P. 359–390.
<https://doi.org/10.1007/s10107-018-1351-8>
11. *Laurent M., Varvitsiotis A.* Positive semidefinite matrix completion, universal rigidity and the Strong Arnold Property // *Linear Algebra Appl.* 2014. V. 452. P. 292–317.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.03.015>
12. *Kurpisz A., Leppänen S., Mastrolilli M.* Sum-of-squares hierarchy lower bounds for symmetric formulations // *Math. Program. Ser. A.* 2019.
<https://doi.org/10.1007/s10107-019-01398-9>
13. *Braun G., Pokutta S., Zink D.* Affine reductions for LPs and SDPs // *Math. Program. Ser. A.* 2019. V. 173. P. 281–312.
<https://doi.org/10.1007/s10107-017-1221-9>
14. *Huang Z., Zhan X.* Nonsymmetric normal entry patterns with the maximum number of distinct indeterminates // *Linear Algebra Appl.* 2015. V. 485. P. 359–371.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.08.003>
15. *Van H.H., Quinlan R.* On the maximum rank of completions of entry pattern matrices // *Linear Algebra Appl.* 2017. V. 525. P. 1–19.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.02.035>
16. *Van H.H., Quinlan R.* Almost-nonsingular entry pattern matrices // *Linear Algebra Appl.* 2019. V. 578. P. 334–355.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2019.05.006>
17. *Brualdi R.A., Huang Z., Zhan X.* Singular, nonsingular, and bounded rank completions of ACI-matrices // *Linear Algebra Appl.* 2010. V. 433. P. 1452–1462.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2010.05.018>
18. *McTigue J., Quinlan R.* Partial matrices of constant rank // *Linear Algebra Appl.* 2014. V. 446. P. 177–191.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2013.12.020>
19. *Borobia A., Canogar R.* ACI-matrices of constant rank over arbitrary fields // *Linear Algebra Appl.* 2017. V. 527. P. 232–259.
<https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.04.002>
20. *Никитин А.Ю., Рыбалов А.Н.* О сложности проблемы разрешимости систем уравнений над конечными частичными порядками // *Прикладная дискретная математика.* 2018. № 39. С. 94–98.
<https://doi.org/10.17223/20710410/39/8>
21. *Рыбалов А.Н.* О генерической амплификации рекурсивно перечислимых множеств // *Алгебра и логика.* 2018. Т. 57. № 4. С. 448–455. [Algebra and Logic. 2018. V. 57. No. 4. P. 289–294.
<https://doi.org/10.1007/s10469-018-9500-y>
<https://doi.org/10.17377/alglog.2018.57.403>
22. *Рыбалов А.Н.* О генерической сложности проблемы разрешимости систем диофантовых уравнений в форме Сколема // *Прикладная дискретная математика.* 2017. № 37. С. 100–106.
<https://doi.org/10.17223/20710410/37/8>
23. *Малашонок Г.И.* Система компьютерной алгебры MathPartner // *Программирование.* 2017. № 2. С. 63–71. [Program. Comput. Soft. 2017. V. 43. No. 2. P. 112–118. <https://doi.org/10.1134/S0361768817020086>]
24. *Смирнов А.В.* О билинейной сложности и практических алгоритмах умножения матриц // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2013. Т. 53. № 12. С. 1970–1984. [Comput. Math. Math. Phys. 2013. V. 53. No. 12. P. 1781–1795. <https://doi.org/10.1134/S0965542513120129>
<https://doi.org/10.7868/S0044466913120168>
25. *Смирнов А.В.* Билинейный алгоритм длины 22 для приближенного умножения матриц размеров 2×7 и 7×2 // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 2015. Т. 55. № 4. С. 550–554. [Comput. Math. Math. Phys. 2015. V. 55. No. 4. P. 541–545. <https://doi.org/10.1134/S0965542515040168>
<https://doi.org/10.7868/S0044466915040171>
26. *Пан В.Я.* Быстрое умножение матриц и смежные вопросы алгебры // *Матем. сб.* 2017. Т. 208. № 11. С. 90–138. [Sb. Math. 2017. V. 208. No. 11. P. 1661–1704. <https://doi.org/10.1070/SM8833>
<https://doi.org/10.4213/sm8833>
27. *Cenk M., Hasan M.A.* On the arithmetic complexity of Strassen-like matrix multiplications // *J. Symbolic Comput.* 2017. V. 80. No. 2. P. 484–501.
<https://doi.org/10.1016/j.jsc.2016.07.004>
28. *Dolgov D.A.* Polynomial greatest common divisor as a solution of system of linear equations // *Lobachevskii J. Math.* 2018. V. 39. No. 7. P. 985–991.
<https://doi.org/10.1134/S1995080218070090>
29. *Bernardi A., Blekherman G., Ottaviani G.* On real typical ranks // *Boll. Unione Mat. Ital.* 2018. V. 11. No. 3. P. 293–307.
<https://doi.org/10.1007/s40574-017-0134-0>