УДК 512.555.2

А. В. Селиверстов

Линейно упорядоченные тела

В статье рассмотрена история создания линейно упорядоченных некоммутативных тел в связи с развитием геометрии. Вероятно, впервые такое тело было найдено в 1936 году Вальтером Вагнером для решения задачи об основаниях геометрии, сформулированной в 1922 году Максом Деном. Вагнер защитил диссертацию в 1937 году.

Ключевые слова: тело, линейный порядок, плоскость, основания геометрии, история математики.

A. V. Seliverstov

Linearly ordered skew fields

The article explores the history of the creation of linear ordered skew fields and the connection with the development of geometry. Probably, the first such skew field was discovered in 1936 by Walter Wagner to solve a problem formulated in 1922 by Max Dehn who asked about foundations of geometry. Wagner defended his dissertation in 1937.

Key words: skew field, linear order, plane, foundations of geometry, history of mathematics.

Телом называется ассоциативное кольцо с делением. Коммутативное тело называется полем. Наиболее известный пример некоммутативного тела – тело кватернионов – построил Уильям Гамильтон (William Rowan Hamilton, 1805–1865) в 1843 году [Конвей и Смит, 2009]. В России в XIX веке кватернионы и их обобщения изучал, в частности, Федор Эдуардович Молин (Theodor Georg Andreas Molien, 1861–1941) [Александров и Крылов, 2011]. Однако тело кватернионов не может быть линейно упорядочено.

Пример некоммутативного линейно упорядоченного тела можно найти в книге [Нечаев, 1975], однако без какой-либо исторической справки. Вероятно, впервые такое тело было найдено в 1936 году Вальтером Вагнером (Walter Wagner) для решения задачи, сформулированной в 1922 году Максом Деном (Max Wilhelm Dehn, 1878–1952) [Dehn, 1922]. Это была задача об основаниях геометрии, привлекавших внимание многих авторов в XIX веке и в начале XX века. Краткое упоминание можно найти в статье [Cerroni, 2004]. Статья Вагнера [Wagner, 1937] поступила в редакцию журнала *Mathematische Annalen* 26 июня 1936 года.

Напомним предысторию этой задачи. В 1891 году Герман Винер (Hermann Ludwig Gustav Wiener, 1857–1939) из Галле (Halle) сообщил о независимости теоремы Дезарга (на плоскости) от некоторых аксиом плоскости [Wiener, 1891]. Точнее, такова поздняя интерпретация его результата в работах [Moulton, 1902] и [Васильев, 1923]. Винер не указывает никакой системы аксиом в привычном виде, а использует лишь набор допустимых операций. Вероятно, это была первая попытка обосновать нетривиальность теорем Паппа (Паскаля) и Дезарга.

Следующий шаг сделал Давид Гильберт в 1899 году в книге *Grundlagen der Geometrie*. В ней построен пример недезарговой плоскости, удовлетворяющей группам аксиом сочетания (инцидентности) на плоскости, порядка, параллельности и непрерывности. Другой результат Гильберта состоит в возможности сопоставить дезарговой плоскости тело, элементы которого будут координатами. Коммутативность умножения, когда тело будет полем, эквивалентна выполнимости теоремы Паппа. Книга *Основания геометрии* Гильберта в переводе на русский публикуется в 1923 году в Петрограде книгоиздательством «Сеятель» Е.В. Высоцкого. Перевод сделан с 5-го издания. Русское издание включает большую (24 стр.) вступительную статью Александра Васильевича Васильева (1853–1929), в которой рассмотрена история аксиоматического подхода в геометрии [Васильев, 1923]. В частности, отмечается важность работы Винера.

Изящный пример недезарговой плоскости нашёл американский астроном Форест Рэй Моултон (Forest Ray Moulton, 1872–1952), который представил свою работу 2 января 1902 года [Moulton, 1902]. В этой работе Моултон ссылается на Винера [Wiener, 1891] и Гильберта.

В 1937 году Вальтер Вагнер (Walter Wagner) из Касселя (Kassel) защитил диссертацию Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme [Wagner, 1937] во Франкфуртском университет имени Иоганна Вольфганга Гёте (Goethe-Universität Frankfurt am Main) под руководством Макса Дена и Карла Зигеля (Carl Ludwig Siegel, 1896–1981). Вагнер использует аксиоматику Гильберта и линейно упорядоченные некоммутативные тела. Координаты над телом обеспечивают выполнимость теоремы Дезарга, а некоммутативность препятствует выполнимости теорем Паппа и Паскаля. Ниже дан перевод фрагмента из введения к работе [Wagner, 1937]. Здесь теорема Паппа названа теоремой Паскаля, как было и в предыдущих работах Винера и Гильберта. Эту особенность также отмечает Васильев [Васильев, 1923].

«Важное центральное положение, которое теорема Паскаля занимает в структуре геометрии, послужило причиной следующего исследования. Если принять плоские и пространственные аксиомы сочетания и аксиомы порядка по версии Гильберта, то теорема Дезарга справедлива в этой геометрии. Теорему Паскаля можно доказать, добавив либо аксиомы конгруэнтности, либо аксиому Архимеда. Однако в обоих случаях добавленные аксиомы охватывают больше, чем необходимо для доказательства теоремы Паскаля. Это приводит к вопросу о том, существуют ли теоремы инцидентности между теоремами Дезарга и Паскаля, т.е. теоремы, которые не следуют из теоремы Дезарга и не влекут за собой теорему Паскаля. Эта задача решается с помощью алгебраических методов. На основе аксиом сочетания и порядка, по Гильберту, геометрические соотношения можно описать дезарговой числовой системой. В такой числовой системе действуют обычные арифметические правила, лишь не предполагается коммутативности умножения, но выполняются аксиомы порядка.»

Исходный фрагмент по-немецки:

Die wichtige zentrale Stellung, die der Pascalsche Satz im Aufbau der Geometrie hat, war der Anlaß zu der folgenden Untersuchung. Setzen wir die ebenen und räumlichen Axiome der Verknüpfung und die Axiome der Anordnung in der Hilbertschen Fassung voraus, so gilt in dieser Geometrie der Desarguessche Satz. Der Pascalsche Satz läßt sich beweisen, wenn man entweder die Axiome der Kongruenz oder das Archimedische Axiom hinzunimmt. Aber in beiden Fällen umfassen die hinzugenommenen Axiome mehr, als zum Beweise des Pascalsehen Satzes noch notwendig ist. Das führt zu der Frage, ob es Schnittpunktsätze zwischen dem Desarguesschen und dem Pascalschen Satz gibt, d.h. solche Sätze, die nicht aus dem Desarguesschen Satz folgen und den Pascalschen Satz nicht zur Folge haben.

Dieses Problem wird mit algebraischen Methoden in Angriff genommen. Unter Zugrundelegung der Verknüpfungs- und Anordnungsaxiome kann man nach Hilbert durch ein Desarguessches Zahlensystem die geometrischen Beziehungen beschreiben. In einem solchea Zahlensystem gelten die gewöhnlichen Rechenregeln, nur die Vertauschbarkeit der Faktorenreiheafolge wird nicht vorausgesetzt, dagegen sind die Anordnungsaxiome erfüllt.

В 1948 году близкой теме посвящена работа Эмануэля Шпернера (Emanuel Sperner, 1905–1980) [Sperner, 1948], но без ссылки на Вагнера. Отметим, что Вагнер и Шпернер используют разную терминологию: Вагнер пишет о числовой системе (Zahlensystem), а Шпернер пишет про тело (Körper, Schiefkörper), что вполне согласуется с традицией в России. Диссертация Вагнера не упоминается и в недавней статье [Zaka and Peters, 2021].

Автор благодарит Ксаверия Ю. Малышева и Николая Н. Добровольского за обсуждение работы.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

Библиографический список

1. Конвей Дж. Х. О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. / Дж. Х. Конвей, Д. А. Смит. Пер. с англ. С. М. Львовского. М.:

МЦНМО, 2009. 184 с. (Перевод: Conway J. H., Smith D. A. On Quaternions and Octonions. A. K. Peters/CRC Press, 2003. 172 p.)

2. Александров И. А. Ф.Э. Молин – ученый и педагог / И. А. Александров, П. А. Крылов // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. 2011. № 3(15). С. 6–11. http://mi.mathnet.ru/vtgu201

3. Нечаев В. И. Числовые системы. Пособие для студентов пед. ин-тов. М.: Просвещение, 1975. 199 с.

4. Dehn M. Über die Grundlagen der Geometrie und allgemeine Zahlsysteme / M. Dehn // Mathematische Annalen. 1922. V. 85. No. 1. P. 184–194. https://doi.org/10.1007/BF01449618

5. Cerroni C. Non-Desarguian geometries and the foundations of geometry from David Hilbert to Ruth Moufang / C. Cerroni // Historia Mathematica. 2004. V. 31. No. 3. P. 320–336. https://doi.org/10.1016/S0315-0860(03)00049-1

6. Wagner W. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlensysteme / W. Wagner // Mathematische Annalen. 1937. V. 113. P. 528–567. https://doi.org/10.1007/BF01571649

7. Wiener H. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie / H. Wiener // Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 1890/91. V. 1. P. 45–48.

8. Moulton F. R. A simple non-Desarguesian plane geometry / F. R. Moulton // Transactions of the American Mathematical Society. 1902. V. 3. P. 192–195. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1902-1500595-3

9. Васильев А.В. От Евклида до Гильберта / А. В. Васильев // Вступительное слово в книге: Д. Гильберт. Основания геометрии. – Петроград: Сеятель, 1923.

10. Sperner E. Beziehungen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung / E. Sperner // Archiv der Mathematik. 1948. V. 1. No. 2. P. 148–153. https://doi.org/10.1007/BF02039526

11. Zaka O. Ordered line and skew-fields in the Desargues affine plane / O. Zaka, J.F. Peters // Balkan Journal of Geometry and Its Applications. 2021. V. 26. No. 1. P. 141–156. https://doi.org/10.48550/arXiv.1905.03859

Сведения об авторе:

Селиверстов Александр Владиславович,

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук,

ведущий научный сотрудник,

кандидат физико-математических наук.

Seliverstov, Alexandr Vladislavovich,

Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute),

Leading researcher,

Candidate of Physical and Mathematical Sciences.