МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

МЕЖДУНАРОДНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша

Тезисы докладов

Москва 2018

УДК 512.5, 512.6, 512.7
М18

Международная алгебраическая конференция, посвящённая 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша. Тезисы докладов.
М.: Издательство МГУ, 2018 г. — 286 стр.

Тезисы докладов, представленных на международную алгебраическую конференцию, посвящённую 110-летию со дня рождения профессора А.Г.Куроша.

Издание поддержано грантом РФФИ № 18-01-20016

e-mail: anna.ryabenko@gmail.com

А. В. Селиверстов (Москва)

Распознавание вещественных кубических гиперповерхностей без прямой из особых точек

Пусть проективная кубическая гиперповерхность $\mathcal{F}$ определена над полем вещественных чисел. Гладкая точка $P \in \mathcal{F}$ называется эллиптической, если она служит изолированной вещественной точкой пересечения $\mathcal{F}$ с касательной гиперплоскостью $\mathcal{T}_P$ в этой точке, и соответствующая квадратичная форма положительно определена; это свойство эффективно проверяется.

Теорема 1. Достаточным условием отсутствия вещественной прямой L, состоящей из особых точек гиперповерхности $\mathcal{F}$, служит существование эллиптической точки $P \in \mathcal{F}$.

Доказательство от противного. Предположим, что существует вещественная прямая L, состоящая из особых точек гиперповерхности $\mathcal{F}$. Тогда гиперплоское сечение $\mathcal{T}_P \cap \mathcal{F}$ содержит две вещественные особые точки P и $Q \in \mathcal{T}_P \cap L$. Следовательно, сечение содержит вещественную прямую PQ. Но это противоречит изолированности точки P. Теорема доказана.

Пример 1. Если кубическая гиперповерхность имеет две вещественные компоненты связности, то одна из них ориентируемая и ограничивает выпуклую область. Следовательно, ориентируемая компонента содержит эллиптическую точку. Кроме того, свойство содержать эллиптическую точку устойчиво относительно малых деформаций. Многие кубические поверхности содержат эллиптическую точку. Но достаточное условие в теореме 1 не является необходимым. Конус не содержит эллиптической точки. Также существуют особые кубические гиперповерхности, отличные от конуса, у которых гессиан тождественно равен нулю [1]. Диагональная поверхность Клебша гладкая, но она не содержит эллиптической точки. Зонтик Уитни, заданный формой $x_1^2x_3 - x_2^2x_0$, служит примером линейчатой поверхности, содержащей прямую из особых точек. Эта прямая задана уравнениями $x_1 = x_2 = 0$. Зонтик Уитни не содержит эллиптической точки.

Рассмотрим кубическую гиперповерхность $\mathcal{F} \subset \mathbb{RP}^n$ и гиперплоскость $\mathcal{H} \subset \mathbb{RP}^n$, заданные формами $f(x_0, \ldots, x_n)$ и $h(x_0, \ldots, x_n)$, соответственно. Пусть кубическая гиперповерхность $\mathcal{F}_\mathcal{H} \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ задана формой $h^2x_{n+1} + f$. Эта гиперповерхность $\mathcal{F}_\mathcal{H}$ имеет особую точку с однородными координатами $(0 : \cdots : 0 : 1)$.

Теорема 2. Если гиперповерхность $\mathcal{F}$ содержит особую точку $P \in \mathcal{F} \cap \mathcal{H}$ с однородными координатами $(p_0 : \dots : p_n)$, то существует прямая из особых точек на гиперповерхности $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$; эта прямая проходит через точку P. Точки этой прямой имеют координаты $(p_0 : \dots : p_n : x_{n+1})$, где x_{n+1} принимает произвольное значение. Обратно, если особая точка $\check{P} \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ с однородными координатами $(p_0 : \dots : p_{n+1})$ отлична от точки $(0 : \dots : 0 : 1)$, то её проекция $P \in \mathcal{F}$ с однородными координатами $(p_0 : \dots : p_n)$ тоже особая.

Пример 2. Пусть гиперплоскость $\mathcal{H}$ задана формой x_n. Тогда аффинная часть $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ служит графиком многочлена $-f(x_0, \dots, x_{n-1}, 1)$. Если этот многочлен достигает локального минимума в точке $P \notin \mathcal{H}$ и матрица вторых производных этого многочлена положительно определена в точке P, то соответствующая точка $\check{P} \in \mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ эллиптическая.

Пусть кубическая гиперповерхность $\mathcal{F}$ содержит две вещественные компоненты связности, причём ориентируемая компонента не пересекает гиперплоскость $\mathcal{H}$. Внутри области, ограниченной ориентируемой компонентой, некоторый многочлен, определяющий аффинную часть гиперповерхности, достигает минимума. (Этот многочлен определён с точностью до ненулевого множителя.) Тогда гиперповерхность $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ содержит эллиптическую точку.

Напомним задачу разбиения множества. Дано мультимножество положительных целых чисел $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. Можно ли его разбить на два подмножества с равными суммами элементов? Точки с координатами ± 1 называются $(-1,1)$-точками. Обозначим формы $g = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1^3 + \dots + \alpha_n x_n^3$ и $\ell = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Обозначим через $\mathcal{G}$ и $\mathcal{L}$ проективные гиперповерхность и гиперплоскость, заданные формами g и ℓ, соответственно. Тогда задача состоит в распознавании принадлежности хотя бы одной $(-1,1)$-точки гиперплоскости $\mathcal{L}$. Эта задача NP-полна.

Теорема 3. [2, 3] Дано мультимножество положительных целых чисел $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. Существует взаимно однозначное соответствие между особыми точками сечения $\mathcal{G} \cap \mathcal{L}$ и $(-1,1)$-точками, принадлежащими гиперплоскости $\mathcal{L}$.

В случае, когда особыми могут быть только $(-1,1)$-точки, достаточно проверить, содержит ли особую точку одна из двух гиперповерхностей, например, заданных формами $x_0 \pm x_1$. Поэтому следствием теорем 2 и 3 служит такой результат.

Теорема 4. Задача разбиения множества сводится за полиномиальное время к задаче распознавания существования прямой из особых точек на вещественной кубической гиперповерхности.

Иными словами, рассматриваемая задача является NP-трудной, хотя в некоторых случаях отсутствие прямой, состоящей из особых точек, легко проверяется в силу теоремы 1.

Литература. [1] R. Gondim, F. Russo, On cubic hypersurfaces with vanishing hessian, J. Pure App. Algebra, 219:4 (2015), 779–806. [2] И. В. Латкин, А. В. Селиверстов, Вычислительная сложность фрагментов теории поля комплексных чисел, Вестник Карагандинского университета. Математика, 1 (77) (2015), 47–55. [3] A. V. Seliverstov, On cubic hypersurfaces with involutions. International Conference Polynomial Computer Algebra '2016, Санкт-Петербург: Издательство ВВМ, 2016, с. 74–77. https://elibrary.ru/item.asp?id=26437524

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской академии наук

e-mail: slvstv@iitp.ru

А. И. Созутов (Красноярск)

О группах с конечным энгелевым элементом

Элемент a произвольной группы G называется *энгелевым* [[1], стр. 541], если для любого элемента $b \in G$ существует такое зависящее от него натуральное число $n = n(b)$, что выполняется равенство $[...[[b, a], a]..., a] = [b, {}_n a] = 1$. Группы с энгелевыми элементами изучались многими авторами [[1], стр. 540-544]. Элемент a называется *конечным* в группе G, если в G конечны все подгруппы вида $\langle a, a^b \rangle$. Как доказано в [2], существуют двупорожденные бесконечные финитно-аппроксимируемые p-группы, состоящие из конечных энгелевых элементов. В [3] построены примеры двупорожденных бесконечных простых непримарных групп ограниченного четного периода, в которых каждая диэдральная подгруппа является 2-группой, т.е. каждая инволюция является конечным ограниченным энгелевым элементом. Согласно теореме Бэра [[4], стр. 17-18] энгелев элемент конечной группы G содержится в ее подгруппе Фиттинга $F(G)$, что также следует из результата, более известного в теории конечных групп как теорема Бэра-Сузуки:

Пусть D — класс сопряженности конечной группы G, состоящий из p-элементов. Если $\langle x, y \rangle$ является p-группой для всех $x, y \in D$, то
$D \subseteq O_p(G)$, [5][теорема 226].