УДК 512.64

Селиверстов А.В. [1], *Любецкий В.А.* [1]
[1] Институт проблем передачи информации РАН

О квадратичных формах ранга n-2, равных единице на большом множестве вершин n-мерного куба

В работе рассмотрены свойства вещественных квадратичных форм, которые принимают значение единица на достаточно большом множестве вершин многомерного куба с центром в начале координат (т.е. недиагональные элементы соответствующей матрицы определены этим множеством вершин) и не разделяют вершины куба (например, если значения формы не меньше единицы на каждой вершине куба). Показано, что для любого допустимого множества вершин куба ранг таких квадратичных форм может быть на две единицы меньше размерности. В общем случае поиск вершины куба, минимизирующей значение квадратичной формы, является трудной вычислительной задачей, имеющей принципиально важное значение во многих задачах дискретной минимизации. Их прикладное значение хорошо известно. Диагональную матрицу обозначим $\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)$.

Будем рассматривать взаимное расположение ±1-куба и квадрики, заданной уравнением $X^T AX = 1$. Здесь A – симметричная матрица порядка n, X – столбец переменных. Очевидно, что матрицы A и

$$B = \frac{1}{1+d_1+\ldots+d_n}(A+\mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n))$$

задают квадратичные формы, принимающие значение единица в одних и тех же вершинах ±1-куба. Более того, эти формы принимают значения строго больше единицы в одних и тех же вершинах ±1-куба. Соответствующие квадратичные формы будем называть ±1-*эквивалентными*.

Квадратичная форма называется *жёсткой*, если она определена множеством вершин ±1-куба, где значение квадрики равно единице, однозначно с точностью до ±1-эквивалентности.

Лемма. *Пусть* $n \geq 3$. *Если квадратичная форма жёсткая, то на каждой из* $2n$ *сторон* n*-мерного куба форма принимает значение единица в не менее* $\frac{n(n-1)}{2}$ *вершинах;*

более того, аффинная оболочка этих вершин имеет размерность $n-1$*, то есть включает целиком сторону куба.*

Доказательство. Заметим, что значения квадратичной формы в вершинах V и $-V$ совпадают. Поэтому значения формы определяются её значениями в вершинах, лежащих на одной произвольно выбранной стороне куба. В силу жёсткости, коэффициенты формы должны удовлетворять $\frac{n(n-1)}{2}$ линейно независимым соотношениям, каждое из которых соответствует вершине выбранной стороны куба. Следовательно, число таких вершин не меньше $\frac{n(n-1)}{2}$. Если бы эти вершины лежали в аффинном подпространстве размерности $n-2$, то среди соответствующих соотношений на коэффициенты формы было бы не более $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ линейно независимых. □

Квадратичная форма *разделяет* вершины куба, если найдутся такие две вершины, что в одной из них значение формы строго больше единицы, а в другой – строго меньше.

Очевидно, замена формы на $\pm$-эквивалентную сохраняет свойство разделения вершин $\pm$-куба.

Теорема 1. *Если квадратичная форма* $X^T AX$ *жёсткая и не разделяет вершины* $\pm$*-куба размерности* $n \geq 3$*, то она* $\pm$*-эквивалентна квадратичной форме ранга не больше* $n-2$.

Доказательство. Пусть матрица A перестановочно подобна трёхдиагональной матрице. Для любой матрицы перестановки P квадратичная форма $X^T(P^T AP)X$ жёсткая и не разделяет вершины. Без ограничения общности достаточно рассмотреть случай, когда матрица A трёхдиагональная, а её элемент A_{12} строго положительный. Очевидно, элементы $A_{1k}=0$ при всех индексах $k \geq 3$. В силу жёсткости формы по лемме найдутся две вершины $\pm$-куба V и W, для которых значение формы $V^T AV = W^T AW = 1$, первые координаты различны: $V_1 = 1$ и $W_1 = -1$, а вторые координаты совпадают: $V_2 = W_2 = 1$. Пусть вершины V' и W' отличаются от V \$V\$ и \$W\$ соответственно только знаком первой координаты: $V_1' = -1$, $W_1' = 1$. Тогда значения формы в этих вершинах удовлетворяют строгим неравенствам $V'^T AV' < V^T AV$ и $W'^T AW' > W^T AW$. Следовательно, форма разделяет вершины V' и W'. Противоречие.

Итак, в силу теоремы Фидлера найдутся числа $d_1, \ldots, d_n$, для которых матрица

$A+\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$ имеет ранг не больше $n-2$. Поэтому матрица

$$B=\frac{1}{1+d_1+\dots+d_n}(A+\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)),$$

чья форма $\pm$-эквивалентна форме X^TAX, также имеет ранг не больше чем $n-2$. □

Теорема 1 непосредственно не может быть обобщена на случай поля без естественного линейного упорядочения. Косвенным подтверждением возможности значительно снизить ранг комплексной матрицы, меняя главную диагональ, служит такой факт: если разрешить подставлять на главную диагональ матрицы произвольные комплексные числа, можно получить матрицу, у которой только лишь одно собственное значение (с учётом кратности) отличается от нуля. Но комплексная симметричная матрица может оказаться недиагонализуемой; тогда число ненулевых собственных значений меньше ранга. Именно так бывает для неразложимых трёхдиагональных симметричных матриц. Сформулируем теорему.

Теорема 2. *Для любой квадратной комплексной матрицы* A *порядка* $n\geq 2$ *существуют такие комплексные числа* $d_1,\dots,d_n$, *что нуль является* $(n-1)$*-кратным собственным значением для матрицы* $A+\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)$.

Доказательство. Рассмотрим семейство матриц вида

$$\{uA+\mathrm{diag}(d_1,\dots,d_n)\,|\,u,d_1,\dots,d_n\in\mathbb{C}\}$$

Каждой такой матрице сопоставим характеристический полином

$$x^n+F_{n-1}x^{n-1}+\dots+F_1x+F_0=\det(-uA+\mathrm{diag}(x-d_1,\dots,x-d_n)),$$

коэффициенты которого F_k являются формами от параметров $u,d_1,\dots d_n$. В частности,

$$F_{n-1}=-d_1-\dots-d_n-u\,\mathrm{tr}\,A.$$

Согласно теореме Гильберта, любые $n\geq 2$ формы над $\mathbb{C}$ от $n+1$ переменной имеют общий нуль, отличный от начала координат. В частности, система уравнений $F_{n-1}-u=0, F_{n-2}=0,\dots,F_1=0$ имеет ненулевое решение $\breve{u},\breve{d}_1,\dots,\breve{d}_n$.

Предположим, что $\breve{u}=0$. Тогда $F_0(\breve{u},\breve{d}_1,\dots,\breve{d}_n)=\dots=F_{n-1}(\breve{u},\breve{d}_1,\dots,\breve{d}_n)=0$. Поэтому характеристический полином матрицы $\mathrm{diag}(\breve{d}_1,\dots,\breve{d}_n)$ равен x^n. Это означает, что все числа $\breve{d}_1=\dots=\breve{d}_n=0$. Но решение $\breve{u},\breve{d}_1,\dots,\breve{d}_n$ ненулевое. Противоречие доказывает, что система имеет решение при $u\neq 0$. Из однородности следует, что есть решение при $u=1$. Соответствующие ему значения $d_1,\dots,d_n$ удовлетворяют требованию теоремы. □