

ра не определена или лишь спорадически встречается в некоторых таксономических группах цветковых растений, включая asterids.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства науки и образования РФ, грант 14.740.11.0624.

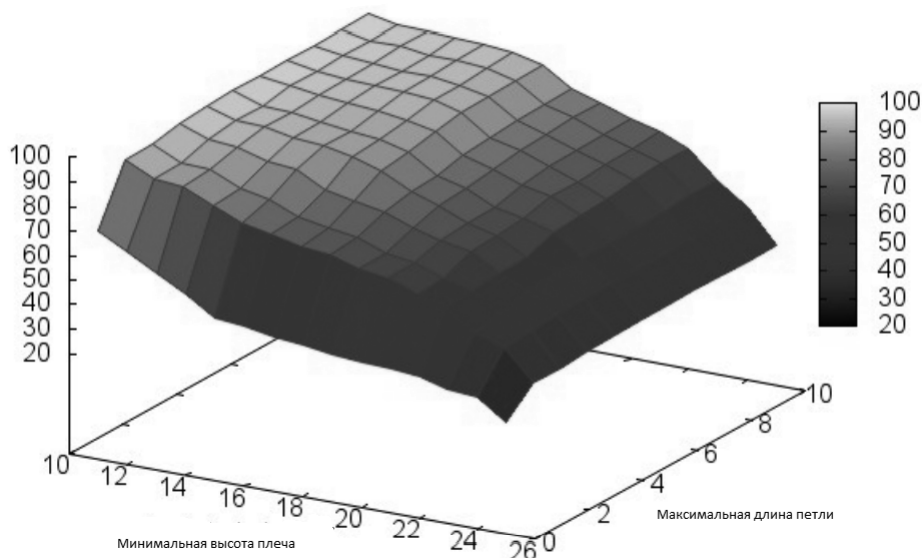


Рис. 1. Распределение найденных шпильек между генами *psbT* и *psbN* в зависимости от двух параметров: длины плеча и длины концевой петли. По третьей оси указана доля шпильек относительно их общего количества. Шпилька искалась в межгенной области вместе с 20 нуклеотидами от края каждой кодирующей области. Допускаются симметричные выпячивания с суммарной длиной от 0 до 3 (с каждой стороны)

УДК 514.172.45

Замечание о фасетах многогранников BQP малой размерности

А.В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН
slvstv@iitp.ru

Поиск минимума квадратичного многочлена на множестве вершин многомерного куба является алгоритмически трудной задачей. Эффективные алгоритмы применимы лишь в частных случаях [1]. Известны также эвристические методы [2, 3]. Эта задача минимизации квадратичного функционала от n переменных сводится к задаче линейного программирования на многограннике BQP $_n$. Эти многогранники введены в [4] как выпуклые оболочки своих вершин – образов вершин куба при отображении Веронезе. Там же дано явное описание большой серии фасет, однако описание всех фасет многогранника фиксированной размерности представляет собой трудную алгоритмическую задачу.

Квадрикой называется множество нулей квадратичного многочлена, может быть неоднородного или приводимого, в аффинном пространстве. В частности, квадриками являются двойная гиперплоскость и две параллельные гиперплоскости. Опорные гиперплоскости к многограннику BQP $_n$ соответствуют пустым квадрикам [5].

Все фасеты многогранников BQP $_n$ при n от двух до шести вычислены нами с помощью программы lrs версии 4.2c [6, 7] (смотри также <http://cgm.cs.mcgill.ca>).

BQP_1 – это отрезок с двумя фасетами; у BQP_2 – четыре фасеты; у BQP_3 – 16 фасет; у BQP_4 – 56 фасет; у BQP_5 – 368 фасет; у BQP_6 – 116764 фасеты. Напомним, что любые две вершины многогранника BQP_n соединены ребром. Две вершины многогранника BQP_n назовём соседними, если они являются образами вершин куба, отличающихся лишь одной координатой. При n от двух до пяти на каждой фасете многогранника лежат соседние вершины. И каждая фасета соответствует квадрике, состоящей из двух параллельных гиперплоскостей. Ситуация меняется при $n = 6$. Многогранник BQP_6 имеет фасеты, у которых нет двух соседних вершин. Более того, при $n = 6$ и во всех больших размерностях каждая вершина принадлежит хотя бы одной фасете, которая не соответствует никакой квадрике ранга один или два.

Поскольку на каждой фасете многогранника BQP_n лежит не менее $n(n+1)/2$ вершин, минимальное расстояние между ними можно оценить сверху, используя границы для кодов низкой плотности [8]. На каждой фасете многогранника BQP_7 найдутся две вершины, для которых расстояние в метрике Хэмминга между прообразами в 7-мерном кубе не превышает двух. Наши вычисления показали, что эту оценку нельзя улучшить. Для достаточно больших n минимальное расстояние между лежащими на квадрике, соответствующей фасете, вершинами куба не превышает $(n+1 - \log 2n)/2$. Однако эту оценку можно уточнить. Пусть начало координат и достаточно много вершин веса три лежат на пустой квадрике $f = 0$, но на вершинах веса один или два значение $f > 0$. Тогда многие из смешанных квадратичных членов f имеют отрицательные коэффициенты. С другой стороны, если на этой квадрике лежит много вершин куба, то среди смешанных коэффициентов f много положительных. Итак, если на пустой квадрике, проходящей через начало координат, лежит много вершин и среди них много вершин веса три, то найдётся и вершина веса один или два.

Литература

1. Береснев В.Л. Дискретные задачи размещения и полиномы от булевых переменных. – Новосибирск: Издательство института математики, 2005. – 408 с.
2. Billionnet A., Elloumi S. Using a mixed integer quadratic programming solver for the unconstrained quadratic 0-1 problem // Mathematical programming. Ser. A. – 2007. – V. 109, N 1. – P. 55-68.
3. Wang Y., Lv Z., Glover F., Hao J-K. Path Relinking for Unconstrained Binary Quadratic Programming // European Journal of Operational Research. – 2012. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2012.07.012>
4. Padberg M. The boolean quadric polytope: some characteristics, facets and relatives // Mathematical programming. – 1989. – V. 45, N 1-3. – P. 139-172.
5. Горбунов К.Ю., Селиверстов А.В., Любецкий В.А., Взаимное расположение параллельных гиперплоскостей, квадратик и вершин многомерного куба // Проблемы передачи информации. – 2012. – Т. 48, N 2. – С. 113-120.
6. Avis D. Computational experience with the reverse search vertex enumeration algorithm // Optimization methods and software. – 1998. – V. 10, N 2. – P. 107-124.
7. Avis D., Fukuda K. A pivoting algorithm for convex hulls and vertex enumeration of arrangements and polyhedra // Discrete and computational geometry. – 1992. – V. 8, N 1. – P. 295-313.
8. Plotkin M. Binary codes with specified minimum distance // IRE Transactions on Information Theory. – 1960. – V. 6, N 4. – P. 445-450.