МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Научно-методический совет по математике МОН РФ

Российская академия естественных наук

Средневолжское математическое общество

Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании

**Международная научно-техническая конференция
(Россия, г. Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.)**

Сборник научных трудов
Часть 1

Ульяновск
УлГТУ
2016

УДК 51(04)
ББК 22 я43
М 75

УДК 51(04)

Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : Международная научно-техническая конференция (Россия, г. Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.) : сборник научных трудов / под общ. ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. П. А. Вельмисова. – Ульяновск : УлГТУ, 2016.

Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании : Международная научно-техническая конференция (Россия, г. Ульяновск, 28–30 апреля 2016 г.) : сборник научных трудов. Ч. 1 / под общ. ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. П. А. Вельмисова. – Ульяновск : УлГТУ, 2016. – 296 с.

В первой части сборника (выпуск 4) представлены статьи, посвященные применению математических методов и математического моделирования в научных исследованиях. Часть работ посвящена проблемам математического образования.

Для специалистов в области прикладной математики, физики, механики, математического образования.

Статьи печатаются в авторской редакции.

ISBN 978-5-9795-1638-7
ISBN 978-5-9795-1639-4 Ч. 1.

учиться практически принимать решения, учиться управлению, через специальные задания, направленные именно на это – формирование умений принимать решения, а также умения практически владеть средствами электронно-вычислительной техники.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1 Вертаев, А. В. Формирование компетенции принятия оптимальных управленческих решений у курсантов вузов внутренних войск МВД России с использованием метода служебно-боевых ситуаций : дис. ... канд. пед. наук: 13.00.08: защищена 25.11.2015. – Санкт-Петербург, 2015. – 300 с.

2 Балдин, К. В., Уткин, В. Б., Воробьев, С. Н. Управленческие решения. – М. : Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2006. – 496 с.

3 Зуб, А. Т. Принятие управленческих решений. Теория и практика: учеб. пособие. – М. : ИД «Форум» : ИНФРА-М, 2010. – 400 с.

УДК 372.851

А. В. Селиверстов (г. Москва)

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКИ

Рассмотрены примеры использования графических методов для иллюстрации задач дискретной математики: разделение секрета, разработка кодов, исправляющих ошибки, оптимизация. Также рассмотрено понятие двойственной кривой. Эти задачи использовались на семинарах для студентов.

***Ключевые слова**: начертательная геометрия, разделение секрета, кодирование, преподавание математики.*

Настоящие заметки посвящены нескольким примерам, иллюстрирующим возможность и важность применения графических методов при обучении студентов, которые не изучают начертательную геометрию как самостоятельный предмет. Эти примеры связаны с задачами, традиционно рассматриваемыми в дискретной математике, но допускающими естественное графическое решение, может быть неоптимальное. Конечно, разбор таких задач не может заменить начертательную геометрию, но позволяет разнообразить учебный процесс или служить темой дополнительных занятий для заинтересованных студентов любой специализации. Интерес к математическому образованию связан с его содержанием, которое нередко остается формальным и оторванным от жизни. С другой стороны, отмечена предпочтительность графических форм предъявления информации по сравнению с вербальной формой [1]. Увы, попытки установить связи между разными направлениями математики нередко вызывают обвинения в наукообразии и эклектичности. Начертательная геометрия иногда воспринимается как вспомогательный метод для архитекторов, конструкторов машин, дизайнеров. Нужно ли существенно расширять этот список приложений? Нужно ли рассматривать абстрактные задачи, близкие начертательной геометрии? Да, нужно и то и другое. Один из путей состоит в поиске связей с различными математическими задачами. Любая тема легче воспринимается, когда она связана с конкретным приложением, иногда шутливым, которое можно кратко пояснить здесь и сейчас. Именно кратко, поскольку времени у преподавателя всегда мало.

При изучении конических сечений таким приложением может быть вычисление траекторий искусственных спутников, астероидов и метеоритов. Пока не все забыли о падении метеорита около Челябинска. Но эту роль может играть и математическая задача о разделении секрета, позволяющая рассматривать обобщение на многомерные квадрики. Впервые эту задачу сформулировал и решил Ади Шамир в 1979 году [2]. И хотя она широко известна, рассмотрим ее с новой точки зрения. Отметим, что предлагаемый метод не претендует на оптимальность для прикладных задач, но предназначен лишь для иллюстрации графического подхода в учебных целях.

Некоторое исходное секретное сообщение надо закодировать и выдать каждому из N участников некоторую информацию о секрете так, чтобы любые $M<N$, собравшись вместе, могли однозначно восстановить исходное сообщение, а никакие (M-1) не могли. Пусть исходное сообщение – это координаты центра окружности, а каждый из участников получает координаты одной точки на этой окружности, у каждого своя точка. Тогда втроем всегда легко найти центр окружности, независимо от положения трех точек. При этом решение легче всего найти графически: в центре окружности пересекаются серединные перпендикуляры к хордам. Однако никакие два участника не могут узнать центр окружности по своим двум точкам. Здесь кворум M=3, общее число участников N>3. (При N=3 задача становится тривиальной.) Естественное изменение решения для увеличения кворума M заключается в замене окружности произвольным коническим сечением. Другой путь – заменить окружность сферой размерности (M-2); при этом кворум может быть сколь угодно большим. Дальнейшее обобщение – разрешить использовать мнимые точки, не принадлежащие вещественной сфере [3]. Так можно исподволь привлечь внимание к графическим методам и одновременно к довольно абстрактному разделу геометрии. Разбор вариантов этой задачи не требовал много времени и обычно проходил в середине или в конце лекции, позволяя слушателям немного отдохнуть от формальных рассуждений. К более сложной форме этой задачи можно возвращаться в свое время, что мы тоже сделаем в этой статье.

Публикация статей о задачах начертательной геометрии с мнимыми решениями свидетельствует о привлекательности этой темы [4, 5].

Некоторые коды, исправляющие ошибки, основаны на той же идее, что и схема разделения секрета. Если кворум для раскрытия секрета равен *M*, а собралось большее число участников, то они могут независимо восстанавливать секретное сообщение разными способами и сравнить результаты. Если они оказались разные, кто-то использовал неправильные сведения или допустил ошибку. В этом случае ответ можно уточнить голосованием. Этот пример тесно связан с прикладными задачами, связанными с работой мобильной связи и компьютерных сетей. Хотя часто коды основаны на вычислениях над конечным полем, общие идеи можно иллюстрировать привычными геометрическими построениями. Более строгое описание дано в [6].

Еще одна тесно связанная с теорией кодирования задача – построение диаграммы Вороного на плоскости. Исходные точки соответствуют дискретному набору возможных передаваемых сообщений, все точки плоскости – принимаемым сообщениям. При декодировании внутренние точки многоугольника Вороного отображаются в одну исходную точку, принадлежащую этому многограннику. На границе декодирование не является однозначным. Обсуждаемая здесь геометрическая задача – показать, что в общей решетке многоугольник Вороного – это шестиугольник. В специальном случае это четырехугольник, получаемый из шестиугольника стягиванием двух противоположных сторон.

Более сложная тема – решение диофантовых уравнений. Решение уравнения от двух переменных легко иллюстрируется рисунком на плоскости. Однако решение уравнений от большего числа переменных обычно вызывает трудности. В частности, рассматривая линейные диофантовы уравнения от трех переменных, полезно уметь строить сечение куба плоскостью общего положения. Меня этому учили в школе, но получается это не у всех студентов. Если секущая плоскость проходит через центр куба, то сечение будет либо шестиугольником, либо параллелограммом. В этом случае геометрическая задача не помогает решить уравнение, но позволяет лучше понять детали, часто ускользающие от внимания.

Графические методы незаменимы при изучении касательных, точек перегиба и огибающих. Они позволяют наглядно решать сложные задачи оптимизации [7].

Следующий пример иллюстрирует понятие двойственной кривой. Задача состоит в том, чтобы, обходя вокруг выпуклого цилиндра (колонны), проверить гладкость боковой поверхности или определить положение угла, если он существует. Ответ вычисляется по последовательности кадров, сделанных фотокамерой в известных точках, однако при этом не используются ни точное положение цилиндра, ни расположение посторонних объектов (текстурированность сцены). Решение основано на том, что если боковая поверхность гладкая, то при последовательных наблюдениях из разных точек никакие три касательные плоскости не пересекаются по одной и той же прямой. Напротив, в особой точке (на углу) пересекается бесконечно много таких плоскостей, соответствующих удачно выбранным ракурсам. Очевидно, что для математика это задача о плоских кривых, а не о телах в трехмерном пространстве. Напомним, что касательная прямая соответствует точке двойственной кривой, а касательные, пересекающиеся в одной точке, – точкам пересечения прямой линии и двойственной кривой. Если кривая имеет особую точку, то множество проходящих через нее прямых параметризуется двойственной прямой. Поэтому для особой алгебраической кривой степени d степень двойственной кривой окажется ниже, чем для гладкой кривой степени d. Об этом и говорит известная формула Плюккера.

Возможно, все написанное покажется достойным не научной публикации, а математического кружка. Впрочем, организация такого кружка – важное и не самое простое дело.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Тестов, В. А. Основные проблемы реализации концепции развития математического образования // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании. – 2014. – № 3. – С. 278–287.

2. Shamir, A. How to share a secret // Communications of the ACM. – 1979. – V. 22, № 11. – P. 612–613. – DOI:10.1145/359168.359176

3. Гирш, А. Г. Построение сферы по точкам // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. – 2015. – Т. 1. – С. 159–168.

4. Гирш, А. Г. Фокусы алгебраических кривых // Геометрия и графика. – 2015. – Т. 3, № 3. – С. 4–17. – DOI: 10.12737/14415.

5. Иванов, Г. С., Дмитриева, И. М. О задачах начертательной геометрии с мнимыми решениями // Геометрия и графика, 2015. – Т. 3, № 2. – С. 3–8. – DOI: 10.12737/12163.

6. Влэдуц, С. Г. Кабатянский, Г. А., Ломаков, В. В. Об исправлении ошибок при искажениях в канале и синдроме // Проблемы передачи информации, 2015. – Т. 51, № 2. – С. 50–56.

7. Сальков, Н. А. Графо-аналитическое решение некоторых частных задач квадратичного программирования // Геометрия и графика, 2014. – Т. 2, № 1. – С. 3–8. – DOI: 10.12737/3842.