Неразрешимые и разрешимые свойства конституант

Кановей В. Г.

Введение. Происхождение проблем о конституантах

Математики, работающие в области теории множеств, всегда рассматривали как один из наиболее важных вопросов о соотношении двух простейших несчетных мощностей — мощности $\aleph_1$ множества всех не более чем счетных трансфинитов и мощности континуума $\mathfrak{c}$. Внимание специалистов было привлечено, главным образом, к следующим фундаментальным проблемам:

Можно ли построить (с использованием аксиомы выбора или без этой аксиомы) взаимно однозначное соответствие между счетными трансфинитами и (всеми) действительными числами, т. е. доказать континуум — гипотезу Кантора $\mathfrak{c}=\aleph_1$ (Кантор, Гильберт, Лузин)?

Можно ли построить эффективно (т. е. без использования аксиомы выбора — с аксиомой выбора построение в данном случае легко выполняется) множество мощности $\aleph_1$, состоящее из действительных чисел, т. е. эффективно доказать неравенство $\aleph_1\leqslant\mathfrak{c}$ (Лебег, Лузин)?

Эти вопросы, относящиеся не только к теории множеств, но и к основаниям математики в широком смысле, рассматривались многими крупными математиками начала и первой половины XX века. Большой интерес они вызывали, в частности, у Н. Н. Лузина, пытавшегося найти подход к их решению с помощью методов дескриптивной теории множеств. Глубокий анализ этого круга вопросов привел Лузина к замечательной идее аналогии между точками действительной прямой и борелевскими множествами ограниченного ранга, в свете которой была весьма естественной постановка в [1], [2, гл. III], [3]—[7] следующих двух проблем:

Ограниченная (или узкая) проблема континуума: *можно ли эффективно разбить континуум действительных чисел (или бэровское пространство) на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного в совокупности ранга*?

Ограниченная (или узкая) проблема Лебега: *можно ли эффективно построить последовательность из $\aleph_1$ попарно различных борелевских множеств действительной прямой (или бэровского пространства) ограниченного в совокупности ранга*?

Ранг (Лузин употреблял термин: класс) борелевского множества характеризует сложность этого множества в плане борелевского построения, т. е. наименьшую возможную (конечную или счетную трансфинитную) длину построения этого множества из открытых множеств рассматриваемого пространства с помощью операций счетного объединения и дополнения. Точнее говоря, р а н г о м борелевского множества χ называется наименьшее порядковое число ξ такое, что X принадлежит классу Δ_ξ^0 борелевской иерархии. Кстати, классы Δ_ξ^0 (где $1 \leqslant \xi < \omega_1$; через ω_1 обозначается первый несчетный трансфинит) строго возрастают с возрастанием индекса ξ и каждое борелевское множество попадает в один из этих классов (а тогда, следовательно, и во все классы с большими индексами). Все сказанное относится к борелевским множествам любого совершенного польского пространства (так принято называть сепарабельные полные метрические пространства без изолированных точек) — в частности, к множествам действительной прямой и бэровского пространства.

Совокупность, состоящая из борелевских множеств, называется ограниченной по рангу (или совокупностью ограниченного ранга), когда все множества этой совокупности имеют ранг меньше некоторого одного фиксированного трансфинита $\xi_0 < \omega_1$.

К концу 20-х годов специалистам по дескриптивной теории уже были известны способы эффективного построения последовательностей из $\aleph_1$ борелевских множеств, доставляемые разработанной Лузиным операцией решета. Аппліцируя на эти конструкции сформулированные выше проблемы, Лузин поставил серию более специальных проблем о природе конституант, полное решение которых удалось найти лишь многие годы спустя. Этим проблемам и посвящена предлагаемая работа.

§ 1. Постановка проблем о конституантах

Начнем с нескольких определений, связанных с решетами. Прежде всего условимся в качестве основного пространства рассматривать бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$, состоящее из всех функций, определенных на множестве натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, со значениями в ω (т. е. топологическое произведение ω экземпляров натурального ряда). Такой подход введен лузинскими «Лекциями» [2] и принят в современных работах по дескриптивной теории (см., например, книги [17], [18], [19]). В некоторых работах Лузина из числа цитированных выше (например, в [6]) в качестве основного пространства рассматривается действительная прямая $\mathbf{R}$, однако нетрудно показать (чего мы здесь не будем делать), что пространства $\mathcal{N}$ и $\mathbf{R}$ (и вообще все совершенные польские пространства) совершенно равноправны в отношении проблем, о которых пойдет речь ниже.

Операция решета, сыгравшая исключительную роль в развитии дескриптивной теории множеств, была введена Лузиным в 1927 г., а затем усовершенствована им же (в частности, в [2]) и другими специалистами. Мы изложим эту операцию в ее наиболее удобном выриatе, вошедшем в монографии [17], [18] (более подробно о решетах см. [20]). Обозначим через $\mathbf{Q}$ множество всех рациональных точек прямой $\mathbf{R}$. Решетом (для просеивания множеств бэровского пространства $\mathcal{N}$) называется всякое семейство $C = \langle C_q : q \in \mathbf{Q} \rangle$ множеств $C_q \subseteq \mathcal{N}$ любой природы. Множества C_q называются элементами решета C. Решето C условимся называть открытым (или борелевским), когда все его элементы C_q суть открытые (соответственно, борелевские) в $\mathcal{N}$ множества. Вообще, если задан какой-либо класс K множеств пространства $\mathcal{N}$, то решетом класса K договоримся называть всякое решето, каждый элемент которого принадлежит классу K.

Любое решето $C = \langle C_q : q \in \mathbf{Q} \rangle$ определяет разбиение пространства $\mathcal{N}$ на два множества, называемых внутренним (или просеянным) и внешним. К внешнему множеству $[C]$ относятся все точки $\alpha \in \mathcal{N}$, для которых «вертикальное сечение» $C/\alpha = \{q\colon \alpha \in C_q\}$ является вполне упорядоченным в смысле естественного порядка рациональных точек. Остальные точки заключаются во внутреннее множество $[C]_*$.

Каждому порядковому числу $\nu < \omega_1$ сопоставляются множества

$$[C]_\nu = \{\alpha \in [C]\colon \text{порядковый тип } C/\alpha \text{ равен } \nu\};$$

$$[C]_{*\nu} = \{\alpha \in [C]_*\colon \text{порядковый тип наибольшего вполне упорядоченного начального сегмента } C/\alpha \text{ равен } \nu\},$$

называемые соответственно ν-й внешней и ν-й внутренней конституантами. Внешние конституанты попарно не имеют общих точек и дают в объединении внешнее множество $[C]$. Аналогично, внутренние конституанты попарно не пересекаются и дают $[C]_*$ в объединении.

Если решето C борелевское (в частности, это справедливо для открытых решет), то все конституанты $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$ представляют собой борелевские множества (см. [2, гл. III] или [5]). Таким образом, с помощью решет можно строить последовательности из $\aleph_1$ попарно различных борелевских множеств: нужно только добиться, чтобы среди внутренних или внешних конституант, даваемых борелевским решетом, было несчетно много непустых (а тогда и попарно различных) — и искомая последовательность готова. Особый интерес в этой связи вызывали внешние конституанты, поскольку Лузиным был найден [2, гл. III] удобный критерий несчетности числа непустых внешних конституант борелевского решета, заключающийся в требовании *неборелевости внешнего* множества. (Для внутренних конституант такой критерий не выполняется.)

Рассматривая последовательности внешних конституант в связи с проблемами, упомянутыми во введении, Лузин ставит в своих работах [6, п. 1], [7, п. 8] следующую серию из четырех проблем о внешних конституантах.

Проблема I. *Существует ли открытое решето C такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ содержит ровно одну точку?*

Проблема II. *Существует ли открытое решето C такое, что среди конституант $[C]_\nu$ несчетно много непустых и каждая из $[C]_\nu$ содержит не более чем счетное множество точек?*

Проблема III. *Существует ли открытое решето C такое, что среди конституант $[C]_\nu$ несчетно много непустых и все эти конституанты образуют ограниченную по рангу совокупность борелевских множеств?*

Проблема IV. *Существует ли открытое решето C такое, что среди конституант $[C]_\nu$ несчетно много непустых и все конституанты $[C]_\nu$ можно заключить в попарно непересекающиеся борелевские множества ограниченного в совокупности ранга?*

Нумерация этих четырех проблем взята нами из лузинских работ [6], [7], где каждая из проблем напечатана с красной строки с употреблением слова «проблема» и указанного номера. По сути дела, этой нумерацией (идентичной в обеих цитированных работах) Лузин присваивает собственные имена сформулированным проблемам.

Возрастание номера проблемы соответствует убыванию силы требований, предъявляемых проблемой к решету C. В частности, требования, предъявляемые проблемой III, слабее (по крайней мере в нестрогом смысле) требований проблемы II ввиду того, что всякое не более чем счетное множество (вообще, всякое F_σ) принадлежит борелевскому классу Δ_3^0 и имеет вследствие этого ранг не выше, чем 3.

Из четырех сформулированных проблем проблема III в особенности привлекала внимание Лузина, и он обращался к анализу этой проблемы и некоторых ее аспектов в ряде других работ 30-х годов, помимо указанных (в частности, см. [2, гл. III], [3], [4]). В этих работах Лузин поставил еще несколько вопросов о существовании решет с определенными требованиями к рангам конституант. Два из этих вопросов рассматриваются в настоящей статье. Для сохранения единства терминологии и ссылок, мы сформулируем эти вопросы под названиями: проблема IIIа, проблема IIIб, поскольку они в известном смысле являются вариантами проблемы III, хотя несомненно, что Лузин придавал этим вопросам меньшее значение, чем самой проблеме III, и, строго говоря, нет оснований закреплять за этими вопросами статус поименованных лузинских проблем.

Проблема IIIа (см. [3, п. 1]). *Существует ли открытое решето C с несчетным числом непустых конституант $[C]_\nu$ такое, что ранги непустых множеств $[C]_\nu$ не стремятся к ω_1 (это означает, что найдется трансфинит $\xi<\omega_1$, для которого число непустых конституант $[C]_\nu$, имеющих ранги $\leqslant\xi$, несчетно)?*

Проблема IIIб (см. [4, п. 5]). *Существует ли открытое решето C такое, что все конституанты $[C]_\nu$ непусты, а ранги этих конституант не стремятся к трансфиниту ω_1?*

Все шесть сформулированных выше в этом параграфе проблем связаны с проблемой Лебега и ограниченной проблемой Лебега. Напротив, следующая проблема имеет отношение к ограниченной проблеме континуума. Эта проблема поставлена Лузиным в [5, п. 5], где она названа «основной проблемой теории аналитических совокупностей» (без сообщения ей какого-либо номера). За неимением более подходящего варианта нумерации, мы присваиваем здесь этой проблеме номер 0.

Проблема 0. *Существует ли открытое решето C такое, что среди определяемых им конституант $[C]_\nu$* и *$[C]_{*\nu}$ несчетно много непустых (по крайней мере одного типа) и все конституанты $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$ образуют ограниченную по рангу совокупность?*

Лузинские проблемы постоянно фигурировали в качестве важных нерешенных задач в отечественных обзорах классической дескриптивной теории (см., например, [12], [13], [15]). О конституантах в связи с построением несчетных последовательностей борелевских множеств ограниченного ранга говорится в монографии Куратовского [17, с. 495]. К исследованию лузинских проблем обращались П. С. Новиков [10], [11], Л. В. Келдыш [14], А. А. Ляпунов [16], Е. А. Селивановский [34], а позже, в 60-е и 70-е годы — и зарубежные специалисты, в частности, Р. Соловей [27], [28] и Ж. Стерн [30], [31]. Различным философско-математическом и историко-математическим аспектам этих проблем специально посвящена статья [20], и поэтому мы не будем особо останавливаться на этих моментах. Приведем лишь ту информацию из истории исследований проблем о конституантах, которая существенна для последующего изложения.

Лузин [2, гл. III] установил, что проблема II эквивалентна проблеме существования несчетного аналитического дополнения (т. е. $\mathbf{\Pi}_1^1$-множества в современной терминологии), не имеющего совершенных подмножеств, т. е. если существует решето, удовлетворяющее требованиям проблемы II, то существует (в пространстве $\mathcal{N}$) и аналитическое дополнение указанного вида, и обратно.

В работе П. С. Новикова [10] доказано, что проблема II эквивалентна ослабленному варианту проблемы I, где требуется, чтобы каждая конституанта $[C]_\nu$ содержала не более одной точки и при этом чтобы число непустых конституант $[C]_\nu$ было несчетным. В другой статье [11] того же автора был достигнут дальнейший прогресс. Выяснилось, что средствами аксиоматической теории множеств Цермело – Френкеля ZFC с аксиомой выбора (об этой теории см. [19]; принято считать, что теория ZFC формализует все известные способы математических рассуждений) невозможно доказать *отсутствие* несчетных аналитических дополнений, не содержащих совершенных подмножеств, а следовательно, в силу сказанного выше, невозможно решить проблему II в отрицательном направлении, т. е. доказать отсутствие решет требуемого вида.

Этот результат П. С. Новикова был дополнен американским математиком Соловеем, нашедшим (см. [28]), что средствами ZFC невозможно доказать и *существование* несчетных аналитических дополнений без совершенного ядра, а тем самым, невозможно решить проблему II и в положительном направлении. Таким образом, проблема II оказывается неразрешимой: обычными математическими рассуждениями невозможно ни доказать, ни опровергнуть существование решета, удовлетворяющего требованиям этой проблемы. (В скобках отметим, что и многие другие – однако не все, имеются важные исключения, в частности, среди проблем о конституантах – проблемы классической дескриптивной теории оказались неразрешимыми.)

В работе [22] этот результат удалось распространить на проблемы III и IV. Именно, в [22] доказано, что каждая из этих двух проблем эквивалентна проблеме II и, следовательно, неразрешима (две проблемы эквивалентны, если из гипотезы о том, что одна из них имеет положительное решение, следует, что другая также решается положительно). Проблема же 0, как установлено в [22], разрешима, причем в отрицательном направлении, т. е. удается доказать отсутствие решет требуемого вида. В настоящей статье выясняется статус и проблем I, IIIа, IIIб: первая из них подобно проблеме 0, разрешима в отрицательном направлении, а две другие, аналогично проблемам III, IV, эквивалентны проблеме II и неразрешимы.

Все эти результаты о неразрешимости и разрешимости лузинских проблем будут получены в конце следующего параграфа как следствия одной общей теоремы (основной теоремы настоящей статьи).

Вместе с тем ясно, что рассматриваемые лузинские проблемы никоим образом не исчерпывают список возможных вопросов такого же типа о существовании решет с определенными свойствами конституант. Например, аналоги проблем I–IV, сформулированные для внутренних конституант, представляют такой же, в сущности, интерес, как и сами эти проблемы. В формулировки проблем можно вносить некоторые изменения и получать новые варианты (два варианта проблемы III предложил сам Лузин – это проблемы IIIа и IIIб). Наконец, можно рассматривать решета более общего вида, чем открытые. При этом получается довольно длинный список вопросов о существовании решет, включающий и лузинские проблемы. Автором предпринята попытка систематизации и исследования таких вопросов, результатом которой и явилась настоящая статья.

§ 2. Классификация проблем, формулировка основной теоремы и вывод из нее следствий о неразрешимости и разрешимости для лузинских проблем

Каждая из проблем, приведенных в предыдущем параграфе, является проблемой существования решета, удовлетворяющего определенному требованию (точнее, комплексу требований), связанному с классом решета (требуется открытость) и даваемыми им конституантами. Для условного обозначения этих и им подобных требований договоримся использовать пятичленные символы вида $[nij, p]_\tau$ (причем индекс τ фактически может отсутствовать, см. ниже; отсутствие индекса τ мы будем считать специальным значением этого индекса). Поясним смысловую нагрузку, которую несут буквы n, i, j, p, τ.

Буква n указывает на требование, предъявляемое к классу решета. Мы будем рассматривать открытые решета, как в лузинских проблемах из § 1, ставя в соответствие требованию открытости значение $n=0$ буквы n, а также борелевские решета ($n=1$) и решета проективного класса Δ_2^1 ($n=2$). Более сложные проективные решета здесь не рассматриваются.

Индекс τ обозначает тип конституант, к которым относится требование $[nij, p]_\tau$. Отсутствие какого-либо знака на месте τ (т. е. запись вида $[nij, p]$) будет означать, что требование относится только к внешним конституантам (как, например, требования, заключенные в формулировках лузинских проблем I, II, III, IIIa, IIIб и IV из § 1), знак $*$ вместо τ указывает на внутренние конституанты, а знак $+$ вместо τ говорит о том, что рассматриваются конституанты обоих типов (как в постановке проблемы 0).

Индикатор i принимает значения 0 и 1. При $i=1$ подразумевается требование, чтобы все конституанты типа τ были непусты (проблемы I и IIIб) а при $i=0$ — более слабое требование непустоты несчетного числа конституант типа τ (остальные проблемы).

Наконец, о смысле букв j ($j=0$ или 1) и p ($p=$ I, II, III, IV). Требуется, чтобы семейство всех непустых конституант типа τ (при $j=1$), либо чтобы некоторое несчетное подсемейство этого семейства (при $j=0$) обладало, в зависимости значения p, следующим свойством:

при $p=$ I — каждая конституанта из указанного семейства (или подсемейства — в соответствии со значением j) содержит ровно одну точку;

при $p=$ II — каждая конституанта из указанного семейства (или подсемейства) не более чем счетна;

при $p=$ III — указанное семейство (или подсемейство) является совокупностью борелевских множеств ограниченного ранга;

при $p=$ IV — свойство ранг-ограниченной попарной отделимости: найдется порядковое число $\xi<\omega_1$ такое, что любые две различные конституанты из данного семейства (или подсемейства) отделимы друг от друга борелевским множеством ранга $\leqslant\xi$. (Множество Z о т д е л я е т X от Y, когда $X\subseteq Z$, а $Y\cap Z=\varnothing$.)

Таким образом, $j=1$ для проблем I, II, III, IV и 0 и $j=0$ для проблем IIIa и IIIб. Проблема I соответствует значению $p=$ I буквы p, проблема II — значению $p=\text{II}$, проблемы III, IIIа, IIIб и 0 — значению $p=\text{III}$, а соответствующее требование проблемы IV заключено как бы между $p=\text{III}$ и $p=\text{IV}$.

Утверждение о существовании решета, удовлетворяющего комплексу требований $[nij, p]_\tau$, договоримся кратко обозначать через $\exists[nij, p]_\tau$. Всего мы имеем $3\cdot2\cdot2\cdot4\cdot3=144$ различных символа $[nij, p]_\tau$ (при указанных значениях входящих в эти символы букв) и, соответственно, 144 утверждения вида $\exists[nij, p]_\tau$. Эти утверждения с точки зрения их взаимоотношений с системой ZFC, подразделяются на три большие группы, обозначаемые здесь буквами А, Б, В. Разбиение на группы дается следующими таблицами:

Таблица 1

n	ij			
	11	01	10	00
0	В	А	А	А
1	В	А	А	А
2	А	А	А	А

Отсутствие индекса τ (внешние константы), p любое

Таблица 2

n	ij			
	11	01	10	00
0	В	В	А	А
1	В	В	А	А
2	А	А	А	А

$\tau=*$ (внутренние конституанты), p любое

Таблица 3

n	ij			
	11	01	10	00
0	В	В	А	А
1	В	В	А	А
2			А	А

$\tau=+$ (оба типа конституант), p любое

Таблица 4

p	
I или II	Б
III или IV	А

$\tau=+$, $n=2$, $j=1$, i любое

Главной задачей настоящей статьи является доказательство следующей теоремы, определяющей статус утверждений групп А, Б и В в аксиоматической теории множеств ZFC.

О с н о в н а я   т е о р е м а. (а) *Все* 100 *утверждений группы* А *эквивалентны в* ZFC *друг другу и неразрешимы в* ZFC.

(б) *Все четыре утверждения группы* Б *также попарно эквивалентны и неразрешимы в* ZFC, *причем из гипотезы об истинности любого из этих утверждений вытекает истинность всех утверждений группы* А, *но обратное неверно.*

(в) *Все* 40 *утверждений группы* В *ложны в* ZFC, *т. е. из аксиом* ZFC *выводится отсутствие решет нужного вида.*

Покажем, как из основной теоремы можно получить приведенные в § 1 результаты о неразрешимости и разрешимости, касающиеся лузинских проблем. Достаточно разобраться, какие символы соответствуют этим проблемам в нашей системе. Рассмотрим, для образца, проблему I. Легко видеть, что утверждение, содержащееся в формулировке этой проблемы (т. е. утверждение о существовании открытого решета C такого, что каждая конституанта $[C]_\nu$ содержит ровно одну точку), получает здесь символическое обозначение $\exists[0\,1\,1,\ \mathrm{I}]$ и относится, таким образом, к группе В таблицей 1. Следовательно, это утверждение ложно в ZFC согласно пункту (в) основной теоремы, а проблема I имеет поэтому отрицательное решение (т. е. решет нужного вида не существует), как об этом и сказано в конце § 1.

Точно так же, утверждения, содержащиеся в формулировках проблем II, III, IIIа, IIIб, получают обозначения $\exists[001,\ \mathrm{II}]$, $\exists[001,\ \mathrm{III}]$, $\exists[000,\ \mathrm{III}]$ и $\exists[010,\ \mathrm{III}]$ соответственно, относятся к группе А таблицей 1 и являются неразрешимыми и попарно эквивалентными согласно пункту (а) основной теоремы.

Утверждение о существовании решета, содержащееся в формулировке проблемы IV, по своей силе заключено между утверждениями $\exists[001,\ \mathrm{III}]$ и $\exists[001,\ \mathrm{IV}]$, относимыми к группе А таблицей 1. Следовательно, согласно пункту (а) основной теоремы, утверждение проблемы IV эквивалентно всем утверждениям группы А и, в частности, утверждениям, извлекаемым из проблем II, III, IIIа, IIIб, и неразрешимо.

Таким образом, проблемы II, III, IIIа, IIIб, IV эквивалентны одна другой (в смысле, указанном в конце § 1) и неразрешимы.

Наконец, утверждение о существовании решета, удовлетворяющего требованиям проблемы 0, получает символическое обозначение $\exists[001,\ \mathrm{III}]_+$, относится к группе В таблицей 3 и потому является ложным согласно пункту (в) основной теоремы, а сама проблема 0 получает вследствие этого отрицательное решение: решет требуемого вида не существует.

§ 3. Формулировка пяти теорем, из которых следует основная теорема

Конечно, доказывая основную теорему, мы не будем рассматривать по отдельности каждое из утверждений в группах А, Б, В. Вполне достаточно ограничиться минимальными и максимальными (по силе требований, предъявляемых к решету) утверждениями в группах А и Б и минимальными утверждениями в группе В. В частности, поскольку сила требования $[nij,\ p]_\tau$ уменьшается при (независимом) увеличении n от 0 до 2, уменьшении i от 1 до 0, уменьшении j от 1 до 0 и увеличении p от I до IV, то в группе А можно оставить только минимальные утверждения $\exists[200,\ \mathrm{IV}]$, $\exists[200,\ \mathrm{IV}]_*$ и $\exists[200,\ \mathrm{IV}]_+$ и максимальные утверждения $\exists[001,\ \mathrm{I}]$, $\exists[010,\ \mathrm{I}]$, $\exists[211,\ \mathrm{I}]$, $\exists[010,\ \mathrm{I}]_*$, $\exists[211,\ \mathrm{I}]_*$, $\exists[010,\ \mathrm{I}]_+$ и $\exists[211,\ \mathrm{III}]_+$, в группе Б — минимальное утверждение $\exists[201,\ \mathrm{II}]_+$ и максимальное $\exists[211,\ \mathrm{I}]_+$, и, наконец, в групе В — минимальные утверждения $\exists[111,\ \mathrm{IV}]$, $\exists[101,\ \mathrm{IV}]_*$ и $\exists[101,\ \mathrm{IV}]_+$.

Чтобы было удобнее рассматривать эти оставленные утверждения, мы используем следующие два предложения (не связанные с решетами и конституантами, но хорошо изученные методами аксиоматической теории множеств (см., например, [19, добавление, § 3])):

$$\exists\pi\in\mathcal{N}\,(\omega_1^{L[\pi]}=\omega_1),\quad \exists\,\pi\in\mathcal{N}\,(\mathcal{N}\subseteq L\,[\pi]).$$

В этих предложениях, как обычно, через $\omega_1^{L[\pi]}$ обозначен первый несчетный трансфинит в классе $L[\pi]$ всех множеств, конструктивных относительно π.

Оба эти предложения не противоречат аксиомам *ZFC*, поскольку вытекают из (непротиворечивой, см. [19, гл. 5]) аксиомы конструктивности. Их отрицания также не противоречат *ZFC*: это доказано Леви [26] с помощью модели, позже использованной в [28]. Таким образом, оба предложения неразрешимы в теории *ZFC*. При этом первое из них есть тривиальное следствие второго, а второе, напротив, не выводится из первого, ибо в простейшей модели Коэна, опровергающей континуум-гипотезу (модель II в книге [24]), истинно первое утверждение, но ложно второе.

В свете всего сказанного, для доказательства основной теоремы вполне достаточно доказать следующие пять теорем:

Теорема А1. *Если предложение* $\exists\pi\in\mathcal{N}(\omega_1^{L[\pi]}=\omega_1)$ *истинно, т. е. если найдется точка* $\pi\in\mathcal{N}$, *удовлетворяющая равенству* $\omega_1^{L[\pi]}=\omega_1$, *то утверждения* $\exists[001, \mathrm{I}]$, $\exists[010, \mathrm{I}]$, $\exists[211, \mathrm{I}]$, $\exists[010, \mathrm{I}]_*$, $\exists[211, \mathrm{I}]_*$, $\exists[010, \mathrm{I}]_+$, $\exists[211, \mathrm{III}]_+$ *также истинны, т. е. нужные решета существуют.*

Теорема А2. *Если истинно по крайней мере одно из утверждений* $\exists[200, \mathrm{IV}]$, $\exists[200, \mathrm{IV}]_*$, $\exists[200, \mathrm{IV}]_+$, *то будет истинным и предложение* $\exists\pi\in\mathcal{N}(\omega_1^{L[\pi]}=\omega_1)$.

Теорема Б1. *Если предложение* $\exists\pi\in\mathcal{N}(\mathcal{N}\subseteq L[\pi])$ *истинно, то выполняется и утверждение* $\exists[211, \mathrm{I}]_+$.

Теорема Б2. *Если выполняется утверждение* $\exists[201, \mathrm{II}]_+$, *то будет истинным предложение* $\exists\pi\in\mathcal{N}(\mathcal{N}\subseteq L[\pi])$.

Теорема В. *Утверждения* $\exists[111, \mathrm{IV}]$, $\exists[101, \mathrm{IV}]_*$ *и* $\exists[101, \mathrm{IV}]_+$ *ложны, т. е. не существует ни одного решета, удовлетворяющего требованиям какого-либо из этих утверждений.*

Вся оставшаяся часть работы содержит доказательство этих теорем. В следующем, четвертом параграфе, после нескольких замечаний, касающихся различных иерархий, мы формулируем и доказываем два предложения о решетах, одно из которых указывает на связь между классом решета и классом его функции сечений, а смысл второго состоит в том, что борелевские решета не дают ничего нового в плане рассматриваемых свойств конституант по сравнению с открытыми. После этого мы доказываем в § 5 теоремы А1 и Б1, используя аппарат конструктивных множеств вместе с некоторыми довольно тонкими конструкциями (в частности, применяется введенный Хаусдорфом и Лузиным метод разбиения континуума на $\aleph_1$ непустых множеств класса $\mathbf{\Pi}_3^0$). Следующий § 6 включает определения и несколько простых фактов, относящихся к кодировке борелевских множеств, а также основанное на одном результате Луво доказательство теоремы о Π_1^1-выражении для отделимости. В первом приближении, эта теорема дает возможность выразить факт $\mathbf{\Pi}_{1+\rho}^0$-отделимости (где $\rho<\omega_1$ задано) двух Σ_1^1-множеств посредством Π_1^1-формулы, включающей в качестве переменных параметры из $\mathcal{N}$, фигурирующие в определениях данных множеств. В седьмом параграфе доказываются две ключевые леммы об отделимости, обеспечивающие проведение доказательств теоремы А2, Б2 и В. Сами доказательства этих теорем помещены в двух последних параграфах.

§ 4. Справочная информация и некоторые вспомогательные утверждения о проективной иерархии, аналитических формулах и решетах

Все основные теоретико-множественные определения и обозначения мы берем из книги [19]. Буквами α, β, γ, δ, ε, π ниже будут обозначаться только точки бэровского пространства $\mathcal{N}$, а ординалы (т. е. натуральные числа+трансфиниты) — буквами ξ, η, μ, ν, ρ, λ, $\varkappa$. Через ω_ξ, как обычно, обозначается ξ-й по величине бесконечный кардинал ($\omega_0 = \omega$).

Транзитивной моделью ZFC условимся называть всякое транзитивное множество или собственный класс, выполняющее все аксиомы ZFC. Если M — такая модель и $\xi \in M$ — ординал, то через ω_ξ^M обозначается ξ-й бесконечный кардинал в M.

Мы будем использовать стандартные обозначения $\mathbf{\Sigma}_\xi^0$, $\mathbf{\Pi}_\xi^0$, $\mathbf{\Delta}_\xi^0$ (где $1 \leqslant \xi < \omega_1$) борелевских классов и стандартные обозначения $\mathbf{\Sigma}_n^1$, $\mathbf{\Pi}_n^1$, $\mathbf{\Delta}_n^1$ (где $n \in \omega$) проективных классов. Будут использоваться также обозначения $\Sigma_n^{1,\pi}$, $\Pi_n^{1,\pi}$, $\Delta_n^{1,\pi}$ (где $\pi \in \mathcal{N}$) эффективных подклассов соответствующих проективных классов $\mathbf{\Sigma}_n^1$, $\mathbf{\Pi}_\pi^1$, $\mathbf{\Delta}_n^1$. Определения и элементарную информацию об этих классах можно найти в [19, гл. 8], [23, гл. 7].

Для определения проективных множеств, лежащих в пространствах вида $\mathcal{N}^m \times \omega^k (m, k \in \omega)$, удобно использовать формулы языка арифметики второго порядка. Язык этот содержит два типа переменных: переменные с областью пробегания ω (обозначаемые буквами i, j, k, l, m) и переменные с областью пробегания $\mathcal{N}$ (буквы α, β, γ, δ, ε, π). Элементарными считаются формулы вида $k+l=m$, $kl=m$, $k=l$ и $\alpha(k)=l$. Формулы этого языка называются *аналитическими*, а если аналитическая формула не содержит связанных переменных по $\mathcal{N}$, то она называется *арифметической*.

К совокупности Σ_n^1-*формул* (где $n \geqslant 1$) мы отнесем здесь всякую аналитическую формулу следующего вида: $\exists \alpha_1 \forall \alpha_2 \exists \alpha_3 \ldots \Box \alpha_n \psi$, где ψ — арифметическая формула, а знаком $\Box$ обозначается квантор $\forall$ при четном n и квантор $\exists$ при нечетном. Точно так же вводится совокупность аналитических Π_n^1-*формул*, только самый левый квантор должен быть квантором $\forall$ и соответствующим образом меняется значение знака $\Box$.

В несколько более широком смысле, Σ_n^1-формулой будем называть всякую аналитическую формулу, для которой можно построить эквивалентную Σ_n^1-формулу в смысле только что данного строгого определения. Построение эквивалентных формул можно проводить с помощью известных приемов преобразования аналитических формул (см. [23, гл. 7]). Например, если формулы $\varphi(\alpha)$, $\psi(\alpha)$ и $\Phi(\varepsilon, \alpha)$ являются Σ_1^1-формулами, а формула $\Psi(\varepsilon, \alpha)$ является Π_1^1-формулой, то следующую формулу

$$\exists \varepsilon \forall \alpha ((\varphi(\alpha) \to \Psi(\varepsilon, \alpha)) \wedge (\psi(\alpha) \to \neg \Phi(\varepsilon, \alpha)))$$

мы будем считать Σ_2^1-формулой. В аналогичном более широком смысле будет толковаться и понятие Π_n^1-формулы.

Между проективными классами, их эффективными подклассами и соответствующими классами аналитических формул имеется следующая простая связь. Именно, если $n \geqslant 1$ и $\pi \in \mathcal{N}$, то класс $\Sigma_n^{1,\pi}$ состоит в точности из тех множеств пространств вида $\mathcal{N}^m\times\omega^k$, которые могут быть определены Σ_n^1-формулами, не содержащими параметров из $\mathcal{N}$, кроме параметра π.

Аналитические формулы второго уровня подчиняются следующему замечательному утверждению (доказательство см. [19, с. 305]).

Принцип абсолютности Шенфилда. *Пусть M — транзитивная модель ZFC, включающая все счетные ординалы, а φ — замкнутая Σ_2^1-формула или Π_2^1-формула с параметрами из M. Тогда φ абсолютна для M, т. е. из истинности этой формулы в универсуме всех множеств следует ее истинность в M, и обратно.*

Аналитические формулы не вполне приспособлены для описания множеств, возникающих в ходе трансфинитных построений. Здесь выгоднее использовать формулы теоретико-множественного $\in$-языка. Определение классов Σ_n-формул и Π_n-формул этого языка см. в [19, гл. 5, § 4], причем концепцию таких формул мы будем понимать иногда в расширенном смысле, аналогичном изложенному выше касательно Σ_n^1-формул.

Если $P\subseteq X$ — произвольные множества, то через $\Sigma_n^X(P)$ принято обозначать совокупность всех множеств $Y\subseteq X$, которые можно определить в X посредством Σ_n-формулы с параметрами из P. Такой же смысл имеет обозначение $\Pi_n^X(P)$, а $\Delta_n^X(P)=\Sigma_n^X(P)\cap\Pi_n^X(P)$. В важных частных случаях, когда $P=\varnothing$ или $P=X$, пишут Σ_n^X и $\Sigma_n(X)$ соответственно вместо $\Sigma_n^X(P)$, и также для Π, Δ.

Аналитическая определимость связана с $\in$-определимостью в множестве HC всех наследственно счетных множеств (наследственно счетными называются множества с не более чем счетными транзитивными замыканиями). Связь эта дается следующей известной леммой, доказанной, например, в [19, добавление, п. 9]:

Лемма о переводе. *Пусть $n\geqslant 1$, $\pi\in\mathcal{N}$ и $X\subseteq\mathcal{N}$. Тогда $X\in\Sigma_n^{HC}(\{\pi\})$ в том и только в том случае, когда $X\in\Sigma_{n+1}^{1,\pi}$. Аналогично для классов Π и Δ.*

Теперь несколько слов о функциях сечений решет. Ясно, что элементы C_q любого данного решета $C=\langle C_q\colon q\in\mathbf{Q}\rangle$ определяются вполне однозначно, если задана функция сечений решета C, т. е. функция, сопоставляющая каждой точке $\alpha\in\mathcal{N}$ соответствующее сечение $C/\alpha=\{q\in\mathbf{Q}\colon \alpha\in C_q\}$ (именно, $C_q=\{\alpha\in\mathcal{N}\colon q\in C/\alpha\}$ для любого индекса q). Ниже мы будем строить и анализировать решета, заданные, как правило, своими функциями сечений, а не в виде индексированного множества элементов, как в § 1. Имея это ввиду, мы сформулируем сейчас предложение, связывающее класс решета (в смысле § 1) с классом его функции сечений, отображающей $\mathcal{N}$ в пространство $\mathcal{P}(\mathbf{Q})$ всех подмножеств множества $\mathbf{Q}$. Перед формулировкой договоримся о следующем. Во-первых, топология $\mathcal{P}(\mathbf{Q})$ — это топология канторова дисконтинуума, предбазой которой служат всевозможные множества вида $\{Q\subseteq\mathbf{Q}\colon q\in Q\}$ (где $q\in\mathbf{Q}$) и дополнения таких множеств. Во-вторых, функция F, отображающая $\mathcal{N}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{Q})$, называется борелевской (или, вообще, функцией некоторого класса K), если ее график (как множество пар, лежащее в произведении $\mathcal{N}\times\mathcal{P}(\mathbf{Q})$) является борелевским множеством (или, соответственно, множеством класса K)

Предложение 1. *Непрерывным функциям сечений соответствуют открыто-замкнутые решета, т. е. решета с открыто-замкнутыми в $\mathcal{N}$*

элементами. Точнее, решето является открыто-замкнутым в том и только в том случае, когда его функция сечений непрерывна.

Борелевским функциям сечений соответствуют борелевские решета. Наконец, решета класса $\mathbf{\Delta}_2^1$ *соответствуют функциям сечений класса* $\Delta_1^{нс}(\mathcal{N})$.

Утверждение для непрерывных функций и открыто-замкнутых решет совершенно очевидно. Рассмотрим борелевские функции и решета. Если решето $C=\langle C_q\colon q\in\mathbf{Q}\rangle$ борелевское (это означает, что все множества C_q борелевские), то функция сечений $\alpha\mapsto C/\alpha$ также будет борелевской, ибо

$$Q=C/\alpha\leftrightarrow\forall q\in\mathbf{Q}\,(q\in Q\leftrightarrow\alpha\in C_q).$$

Обратно, если функция сечений решета C борелевская, то каждый из элементов C_q этого решета также будет борелевским множеством, поскольку

$$C_q=\{\alpha\colon \exists Q\,(Q=C/\alpha\wedge q\in Q)\}=\{\alpha\colon \forall Q\,(Q=C/\alpha\to q\in Q)\}.$$

Точно такое же рассуждение (плюс лемма о переводе) позволяет доказать и то, что решета класса $\mathbf{\Delta}_2^1$ соответствуют функциям сечений класса $\Delta_1^{нс}(\mathcal{N})$.

В заключение этого параграфа сформулируем предложение, общий смысл которого состоит в том, что борелевские решета не дают в принципе ничего нового по сравнению с открытыми в отношении реализации свойств конституант, рассматривавшихся в § 2.

Предложение 2. *Пусть буквы i, j, p, τ принимают любые значения из указанных в § 2. Тогда из существования решета, удовлетворяющего требованиям* $[1ij,\ p]_\tau$, *следует существование решета, удовлетворяющего* $[0ij,\ p]_\tau$.

Доказательство мы представим только для случая, когда это предложение используется в настоящей статье (см. п. 5.2 следующего параграфа) — т. е. для случая, когда $p=\mathrm{I}$ и либо $i=1$ и $j=0$, либо наоборот, $i=0$ и $j=1$.

Итак, пусть решето C удовлетворяет требованиям $[1ij,\ p]_\tau$ и, в частности, является борелевским. Согласно предложению 1, график P функции сечений этого решета будет борелевским множеством в пространстве $\mathcal{N}\times\mathcal{P}(\mathbf{Q})$. По одной из классических теорем дескриптивной теории (см. [2, гл. II] (или в [9, с. 108]), [17, с. 384]) множество P после удаления некоторой не более чем счетной своей части оказывается непрерывным взаимно однозначным образом бэровского пространства. Другими словами, найдутся множество $P'\subseteq P$ такое, что разность $D=P-P'$ не более чем счетна, и непрерывная взаимно однозначная $F\colon \mathcal{N}$ на P'.

Если $\beta\in\mathcal{N}$ и $F(\beta)=\langle\alpha,\ Q\rangle\in P'$, то определим $G(\beta)=\alpha$ и $S/\beta=Q$. Функция $\beta\mapsto S/\beta$ (из $\mathcal{N}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{Q})$) является непрерывной, а функция $G\colon \mathcal{N}\to\mathcal{N}$ — взаимно однозначной и также непрерывной, причем полный образ G получается удалением из $\mathcal{N}$ не более чем счетного множества $X=\{\alpha\colon \langle\alpha,\ C/\alpha\rangle\in D\}$. Наконец, очевидно, что $S/\beta=C/G(\beta)$ для любой точки β. Из всего сказанного следует, что решето S, заданное своей функцией сечений $\beta\mapsto S/\beta$, будет открытым (даже открыто-замкнутым по предложению 1), причем для любого номера $\nu<\omega_1$ выполняются равенства

$$[S]_\nu=G^{-1}{}''([C]_\nu-X),\quad [S]_{*\nu}=G^{-1}{}''([S]_{*\nu}-X).$$

Таким образом, ввиду счетности X и взаимной однозначности G, если решето C удовлетворяло требованиям $[101, \mathrm{I}]_\tau$ (при любом фиксированном τ), то решето S будет удовлетворять требованиям $[001, \mathrm{I}]_\tau$, что нам и нужно.

В случае, когда $i=1$ и $j=0$, указанное построение может не дать нужного результата, поскольку некоторые из конституант типа τ решета S могут оказаться пустыми (когда все точки соответствующей конституанты решета C принадлежат удаляемому множеству X). Поэтому конструкция несколько усложняется. Разобьем пространство $\mathcal{N}$ на открыто-замкнутые бэровские интервалы $U_m=\{\beta\colon \beta(0)=m\}$ (где $m\in\omega$). Множество U_0 гомеоморфно всему пространству $\mathcal{N}$, и поэтому построение функций S и G можно выполнить так, чтобы они были определены только на U_0, а не на всем $\mathcal{N}$. Далее, ввиду не более чем счетности множества X, пусть $X=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$. Введем новую функцию сечений S', полагая

$$S'/\beta=\begin{cases} S/\beta, & \text{когда } \beta\in U_0,\\ C/\alpha_m, & \text{когда } \beta\in U_m \text{ и } m\geqslant 1.\end{cases}$$

Эта функция будет непрерывной вместе с S, а соответствующее решето — открытым. Кроме того, требования, заключаемые в значениях $i=1$ и $j=0$ букв i и j, переходят (при $p=\mathrm{I}$ и любом τ) с решета C на решето S'.

§ 5. Доказательство теорем А1 и Б1: построение решет с помощью аппарата конструктивных множеств

Утверждения о существовании решет, фигурирующие в указанных теоремах, подразделяются с точки зрения методов их построения на три группы (причем третья включает всего одно утверждение). Рассмотрим эти группы по очереди, начав с наиболее легкой.

5.1. Построение решет, удовлетворяющих требованиям $[211, \mathrm{I}]_+$, $[211, \mathrm{I}]$ и $[211, \mathrm{I}]_*$. Предлагаемое построение основано на следующем факте теории конструктивных множеств: если $\pi\in\mathcal{N}$, то существует полное упорядочение $<_\pi$ множества $HC[\pi]=HC\cap L[\pi]$ $(=L_{\omega_1}[\pi])$, удовлетворяющее «лемме об ограниченном кванторе»: если множество $P\subseteq HC[\pi]^3$ принадлежит классу $\Delta_1^{HC[\pi]}(\{\pi\})$, то следующее множество

$$\{\langle y, z\rangle\in HC[\pi]^2\colon \forall x<_\pi y(\langle x, y, z\rangle\in P)\}$$

также имеет класс $\Delta_1^{HC[\pi]}(\{\pi\})$, см. [19, добавление, п. 8].

Начнем с конструкции решета вида $[211, \mathrm{I}]_+$ (т. е. решета C класса $\mathbf{\Delta}_2^1$ такого, что любая из конституант $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$, где $\nu<\omega_1$, содержит ровно одну точку) в предположении, что существует точка $\pi\in\mathcal{N}$, удовлетворяющая $\mathcal{N}\subseteq L[\pi]$. Этим будет дано доказательство теоремы Б1.

Разобьем пространство $\mathcal{N}$ на два множества: $X=\{\alpha\in\mathcal{N}\colon \alpha(0)=0\}$ и $X_*=\mathcal{N}-X$. Для каждого ординала $\nu<\omega_1$ через α_ν и $\alpha_{*\nu}$ обозначим ν-е в смысле порядка $<_\pi$ точки множеств X и X_* соответственно. Через Q_ν обозначим $<_\pi$-наименьшее из вполне упорядоченных множеств $Q\subseteq\mathbf{Q}$ порядкового типа ν. Наконец, через $Q_{*\nu}$ обозначим $<_\pi$-наименьшее из множеств $Q\subseteq\mathbf{Q}$, не являющихся вполне упорядоченными, но имеющих максимальный вполне упорядоченный начальный сегмент типа ν. Последовательности точек α_ν, $\alpha_{*\nu}$ и множеств Q_ν, $Q_{*\nu}$ имеют класс $\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$, например,

$$\alpha=\alpha_\nu \leftrightarrow \exists f\,(f - \text{функция} \wedge \operatorname{dom} f=\nu+1 \wedge f(\nu)=\alpha \wedge \forall \mu \leqslant \nu$$

$$(f(\mu)\in X-\{f(\xi):\xi<\mu\} \wedge \forall \beta <_\pi f(\mu)\,(\beta\in X \to \beta \in \{f(\xi):\xi<\mu\}))),$$

и искомое дается леммой об ограниченном кванторе.

Зададим искомое решето C его функцией сечений, полагая $C/\alpha_\nu = Q_\nu$ и $C/\alpha_{*\nu}=Q_{*\nu}$ для всех $\nu<\omega_1$. Ввиду сказанного выше о последовательностях точек α_ν и $\alpha_{*\nu}$ и множеств Q_ν и $Q_{*\nu}$, эта функция сечений будет принадлежать классу $\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$, так как

$$Q=C/\alpha \leftrightarrow \exists \nu\,((\alpha=\alpha_\nu \wedge Q=Q_\nu) \vee (\alpha=\alpha_{*\nu} \wedge Q=Q_{*\nu})),$$

а значит, и классу $\Delta_1^{HC}(\{\pi\})$, поскольку

$$Q=C/\alpha \leftrightarrow \forall Q'\,(Q'=C/\alpha \to Q=Q').$$

Следовательно, решето C имеет класс Δ_2^1 согласно предложению 1 § 4. Наконец, ясно, что $[C]_\nu=\{\alpha_\nu\}$ и $[C]_{*\nu}=\{\alpha_{*\nu}\}$ для любого $\nu<\omega_1$. Таким образом, построенное нами решето C удовлетворяет требованиям $[211, \mathrm{I}]_+$.

Обратимся теперь к построению решет видов [211, I] и $[211, \mathrm{I}]_-$. В соответствии с условием теоремы А1, пусть точка $\pi\in\mathcal{N}$ такова, что $\omega_1^{L[\pi]}=\omega_1$. Известно, что из существования такой точки вытекает существование несчетного множества $X\subseteq\mathcal{N}$ класса $\Pi_1^{1,\pi}$, не имеющего совершенных подмножеств, см. [25], [27] или [19, добавление, п. 11]. Все точки такого множества обязаны принадлежать $L[\pi]$ (см. [19, добавление, п. 16.7]). Следовательно, по принципу абсолютности § 4, можно заключить, что $X\in L[\pi]$ и $X\in\Pi_1^{1,\pi}$ в $L[\pi]$. Мы утверждаем теперь, что $X\in\Delta_1^{HC}(\{\pi\})$ и $X\in\Delta_1^{HC[\pi]}(\{\pi\})$. Первое соотношение непосредственно дается леммой о переводе § 4, а для доказательства второго достаточно применить ту же лемму ввиду того, что из гипотезы $\omega_1^{L[\pi]}=\omega_1$ вытекает равенство

$HC[\pi]=\{x\in L[\pi]$: в $L[\pi]$ истинно, что x является наследственно счетным множеством$\}$.

Для каждого $\nu<\omega_1$ через α_ν обозначим ν-ю в смысле порядка $<_\pi$ точку множества X. Рассуждая как в предыдущем построении и учитывая тот факт, что $X\in\Delta_1^{HC[\pi]}(\{\pi\})$, можно показать, что последовательность $\langle\alpha_\nu\colon \nu<\omega_1\rangle$ имеет класс $\Sigma_1^{HC[\pi]}(\{\pi\})$. Убедимся, что эта последовательность будет принадлежать и классу $\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$. Пусть

$$\alpha=\alpha_\nu \leftrightarrow \exists f\in HC[\pi]\ \varphi(\alpha,\nu,f),$$

где φ является Δ_0-формулой (т. е. не имеет неограниченных кванторов, см. [19, с. 105]) с параметром π. Имеем

$$\alpha=\alpha_\nu \leftrightarrow \exists f\in HC\,(f\in HC[\pi] \wedge \varphi(\alpha,\nu,f)).$$

Отсюда и следует искомый факт о классе последовательности точек α_ν, так как $HC[\pi]\in\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$, см. [19, с. 300].

Точно такими же рассуждениями можно убедиться, что последовательность определенных выше множеств $Q_\nu(\nu<\omega_1)$ имеет класс $\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$. Стало быть (см. построение решета вида $[211, \mathrm{I}]_+$ выше) решето C, функция сечений которого дается условиями $C/\alpha_\nu=Q_\nu$ при $\nu<\omega_1$ и $C/\alpha=\mathbf{Q}$ при $\alpha\notin X$, будет иметь класс Δ_2^1. При этом очевидно, что $[C]_\nu = \{\alpha_\nu\}$ для любого индекса ν, т. е. решето C удовлетворяет требованиям [211, I].

Точно так же строится и решето вида $[211, \mathrm{I}]_*$: нужно только определить $C/\alpha_\nu = Q_{*\nu}$ и $C/\alpha = \varnothing$ при $\alpha \notin X$.

5.2. Построение решет видов [001, I], [010, I], $[010, \mathrm{I}]_*$ и $[010, \mathrm{I}]_+$. В соответствии с предложением 2 § 4, можно ограничиться построением *борелевских* решет с нужными свойствами конституант, т. е. решета видов [101, I], [110, I], $[110, \mathrm{I}]_*$ и $[110, \mathrm{I}]_+$. Имея ввиду условие теоремы A1, фиксируем точку $\pi \in \mathscr{N}$, удовлетворяющую $\omega_1^{L[\pi]} = \omega_1$.

Обозначим через T теорию, включающую все аксиомы ZFC, кроме аксиомы степени, а также аксиому $V = L[\pi]$ и аксиому о не более чем счетности каждого множества. Всякое транзитивное множество, удовлетворяющее всем аксиомам T (и, естественно, содержащее π), договоримся называть T-моделью. Естественную T-модель образует множество $HC[\pi] = L_{\omega_1}[\pi]$ (здесь важно, что $\omega_1^{L[\pi]} = \omega_1$). Кроме того, существует несчетно много ординалов $\nu < \omega_1$ таких, что множество $L_\nu[\pi]$ является T-моделью. Для $\xi < \omega_1$ через ν_ξ обозначим ξ-й по величине из таких ординалов ν и положим $\Gamma = \{\nu_\xi \colon \xi < \omega_1\}$.

Для каждого предельного индекса ξ определим $\mu_\xi = \sup_{m \in \omega} \nu_{\xi+m}$ и через Ξ обозначим множество всех таких ординалов μ_ξ. Мы построим решето C вида [101, I] так, что при $\mu \in \Xi$ конституанта $[C]_\mu$ будет включать ровно одну точку, а все остальные внешние конституанты будут пустыми.

Пусть $\alpha \in \mathscr{N}$. Определим

$$M[\alpha] = \omega \cup \{\omega + k \colon \alpha(2k) = 1\};$$
$$\in_\alpha = \{\langle i, j\rangle \colon i \in j \in \omega\} \cup \{\langle i, \omega + k\rangle \colon \alpha(4(2^i \cdot 3^k) + 1) = $$
$$= 1\} \cup \{\langle \omega + k, \omega + l\rangle \colon \alpha(4(2^i \cdot 3^k) + 3) = 1\}.$$

Мы хотим рассматривать множества вида $M[\alpha]$ (с соответствующими отношениями $\in_\alpha$ — это добавка везде ниже подразумевается, но не будет оговариваться) как (нестандартные) модели теории T. Здесь возникает определенное неудобство, связанное с тем, что множества $M[\alpha]$, разумеется, формально не содержат, скажем, точек $\mathscr{N}$. Однако если трансфинит $\eta = \omega + k \in M[\alpha]$ таков, что в $M[\alpha]$ истинно: «η — функция из ω в ω», то можно считать, что точка $\beta \in \mathscr{N}$, заданная условием: $\beta(k) = l$, когда в $M[\alpha]$ истинно $\langle k, l\rangle \in \eta$, фактически, принадлежит $M[\alpha]$. Удалим в этом случае ординал η из $M[\alpha]$ и введем туда указанную точку β, перестроив соответствующим образом и отношение $\in_\alpha$. Аналогичным образом можно поступить и в случае, когда η — рациональное число или множество, состоящее из рациональных чисел в $M[\alpha]$. В дальнейшем под $M[\alpha]$ и $\in_\alpha$ (для данной точки α) будет пониматься результат таких перестроений, выполненных для всех η из $M[\alpha]$, выражающих в $M[\alpha]$ точки $\mathscr{N}$, рациональные числа и их множества.

Точку α назовем π-модельной, если $\pi \in M[\alpha]$, в $M[\alpha]$ выполняются все аксиомы T и натуральный ряд $M[\alpha]$ совпадает с «настоящим» множеством натуральных чисел ω. Структуры $M[\alpha]$ (с отношениями $\in_\alpha$) для π-модельных точек α условимся называть π-моделями. Всякая π-модель $M[\alpha]$ имеет «внутреннее» полное упорядочение $(<_\pi)^{M[\alpha]}$, которое мы будем обозначать через $<_{\pi\alpha}$ и которое может и не быть полным упорядочением с «внешней» точки зрения. Если, однако, $<_{\pi\alpha}$ в действительности вполне упорядочивает $M[\alpha]$ (в этом случае π-модель $M[\alpha]$ договоримся называть фундированной), то существует единственный ординал $\nu\in\Gamma$ такой, что модель $M[\alpha]$ изоморфна T-модели $L_\nu[\pi]$, причем соответствующий изоморфизм (также единственный) переводит $<_{\pi\alpha}$ в отношение $<_\pi \upharpoonright L_\nu[\pi]$. Рассмотрим множество

$W=\{\alpha\in\mathcal{N}$: $\forall m[(\alpha)_m$ является π-модельной точкой $\wedge(\alpha)_m\in$ $\in M[(\alpha)_{m+1}]\wedge$(в $M[(\alpha)_{m+1}]$ истинны следующие два предложения:

1) существует наибольшая транзитивная T-модель и эта модель изоморфна модели $M[(\alpha)_m]$, и

2) $(\alpha)_m$ конструктивно относительно π, и нет ни одной точки $\beta\in\mathcal{N}$ такой, что $\beta<_\pi(\alpha)_m$ и модель $M[\beta]$ изоморфна модели $M[(\alpha)_m])]\wedge$ $\wedge$ в $M[(\alpha)_0]$ истинно, что нет наибольших транзитивных T-моделей$\}$.

(В данном определении, как обычно, через $(\alpha)_m$ обозначается точка $\mathcal{N}$, удовлетворяющая при любом k равенству $(\alpha)_m(k)=\alpha(2^m(2k+1)-1)$.)

Возьмем точку $\alpha\in W$. Для каждого натурального m, рассуждая в $M[(\alpha)_{m+1}]$, через Q_m обозначим $<_\pi$-наименьшее из расположенных на сегменте $[m, m+1)$ вполне упорядоченных (в $M[(\alpha)_{m+1}]$) множеств $Q\subseteq\mathbf{Q}$, $Q\in M[(\alpha)_{m+1}]$ таких, что π-модель $M[(\alpha)_m]$ изоморфна множеству $L_\mu[\pi]$ (где через μ обозначен порядковый тип Q в модели $M[(\alpha)_{m+1}]$). Наконец, положим $S/\alpha=\bigcup\limits_{m\in\omega} Q_m$.

Зададим решето S, определив его функцию сечений $\alpha\mapsto S/\alpha$ так, как указано, при $\alpha\in W$, а при $\alpha\notin W$ положим $S/\alpha=\mathbf{Q}$. Истинность любых формул в модели $M[\beta]$ можно выражать арифметическими формулами с переменной β. Поэтому множество W и отображение $\alpha\mapsto S/\alpha$ из $\mathcal{N}$ в $\mathcal{P}(\mathbf{Q})$ будут борелевскими. Отсюда согласно предложению 1 § 4 следует, что наше решето S является борелевским.

Займемся теперь анализом конституант $[S]_\nu$. Не составляет труда убедиться в следующем. Пусть точка $\alpha\in W$ такова, что все π-модели $M[(\alpha)_m]$ фундированы. Тогда существует единственный предельный индекс $\xi<\omega_1$ такой, что при любом m модель $M[(\alpha)_m]$ изоморфна $L_{\nu_{\xi+m}}[\pi]$. В этом случае при любом m точка $(\alpha)_m$ совпадает с $<_\pi$-наименьшей точкой β, удовлетворяющей условию изоморфности $L_{\nu_{\xi+m}}[\pi]$ и $M[\beta]$, т. е. имеется взаимно однозначное соответствие между точками из W указанного вида и ординалами, занимающими предельные места в Γ. Наконец, в этом случае множество $S/\alpha\subseteq\mathbf{Q}$ имеет порядковый тип μ_ξ.

Если же хотя бы одна из π-моделей $M[(\alpha)_m]$ не является фундированной, то, как легко видеть, множество S/α не может быть вполне упорядоченным. Если вообще $\alpha\notin W$, то $S/\alpha=\mathcal{N}$ по построению — снова не вполне упорядоченное множество.

Учитывая все сказанное, мы видим, что для любого ординала $\mu=$ $=\mu_\xi\in\Xi$ конституанта $[S]_\mu$ включает единственную точку — именно ту точку α, которая соответствует в вышеуказанном смысле ординалу $\nu_\xi\in\Gamma$. А все конституанты $[S]_\nu$ с $\nu\notin\Xi$ будут пустыми множествами. Таким образом, для построенного решета S выполнены все условия [101, I], что и требовалось.

Для построения решета, удовлетворяющего [110, I], мы немного изменим только что построенное решето с тем, чтобы каждая конституанта $[S]_\nu$ с номером $\nu\notin\Xi$ оказалась непустой. Заметим, что множества $Q\subseteq\mathbf{Q}$ можно заиндексировать индексами $\gamma\in\mathcal{N}$ так, чтобы каждое $Q\subseteq\mathbf{Q}$ получило хотя бы один индекс и отображение $\gamma\mapsto Q_\gamma$ было непрерывным (см. доказательство теоремы 1 в § 6). Рассмотрим (борелевское, как и W) множество

$$U=\{\alpha\notin W\text{: точка } (\alpha)_0 \text{ является } \pi\text{-модельной} \wedge (\alpha)_1\in M[(\alpha)_0]\wedge$$
$$\wedge \text{ в } M[(\alpha)_0] \text{ истинно, что } Q_{(\alpha)_1} \text{ не является порядково изоморфным}$$
$$\text{никакому ординалу из совокупности } \Xi\}.$$

Для $\alpha\in U$ положим $S/\alpha=Q_{(\alpha)_1}$. Легко видеть, что множество S/α при $\alpha\in U$ не может быть вполне упорядоченным с порядковым типом из Ξ, в то время как для любого ординала $\nu\in\Xi$ существует точка $\alpha\in U$ такая, что порядковый тип S/α равен ν. Поэтому, сохранив определение S/α для $\alpha\in W$ из предыдущего построения и определив $S/\alpha=\mathcal{N}$ для всех точек $\alpha\notin W\cup U$, мы получим борелевское решето S такое, что все конституанты $[S]_\mu$ непусты и среди них несчетно много одноточечных (все, соответствующие номерам $\mu\in\Xi$), т. е. решето, удовлетворяющее требованиям [110, I].

Внеся в эту конструкцию небольшие очевидные изменения, можно построить (по-прежнему предполагая, что $\omega_1^{L[\pi]}=\omega_1$) и решета видов $[110, \text{I}]_*$ и $[110, \text{I}]_+$. Мы не будем приводить здесь это построение.

5.3. Построение решета, удовлетворящего $[211, \text{III}]_+$. Это построение основано на впервые проведенной Хаусдорфом [33], а затем усовершенствованной Лузиным в [8] конструкции, дающей (неэффективное) разбиение континуума на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного ранга. Конструкция эта состоит в следующем. С помощью аксиомы выбора можно построить две трансфинитные последовательности $\langle x_\nu\colon \nu<\omega_1\rangle$ и $\langle y_\nu\colon \nu<\omega_1\rangle$ множеств x_ν, $y_\nu\subseteq\omega$, обладающие такими свойствами:

1) если $\nu<\mu$, то разности $x_\nu-x_\mu$ и $y_\nu-y_\mu$ конечны, а обратные разности $x_\mu-x_\nu$ и $y_\mu-y_\nu$ бесконечны;

2) при любом $\nu<\omega_1$ пересечение $x_\nu\cap y_\nu$ конечно;

3) не существует ни одного множества $z\subseteq\omega$ такого, что все разности $x_\nu-z$ и все пересечения $y_\nu\cap z$ конечны.

Характер построения этих последовательностей таков, что в предположении $\omega_1^{L[\pi]}=\omega_1$, выбирая на каждом шагу $\nu<\omega_1$ в качестве $\langle x_\nu, y_\nu\rangle$ наименьшую в смысле $<_\pi$ из пар $\langle x, y\rangle$, определенным образом (см. цитированные работы) относящихся к уже построенным последовательностям $\langle x_\mu\colon \mu<\nu\rangle$ и $\langle y_\mu\colon \mu<\nu\rangle$, можно обеспечить выполнение еще одного условия:

4) последовательности $\langle x_\nu\colon \nu<\omega_1\rangle$ и $\langle y_\nu\colon \nu<\omega_1\rangle$ принадлежат классу $\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$.

Имея последовательности со свойствами 1)—4), определим

$$Y_\nu=\{\alpha\in\mathcal{N}\text{: хотя бы одно из множеств } x_{\nu+1}-|\alpha|,$$
$$y_{\nu+1}\cap|\alpha| \text{ бесконечно, где } |\alpha|=\{m\colon \alpha(m)=0\}\}$$

для каждого $\nu<\omega_1$. Согласно свойствам 1) и 2), множества Y_ν возрастают с возрастанием ν, причем каждое Y_ν строго шире, чем $\bigcup_{\mu<\nu} Y_\mu$ (например, за счет характеристической функции множества x_ν). Благодаря свойству 3), объединение множеств Y_ν совпадает со всем пространством $\mathcal{N}$. Кроме того, нетрудно проверить, что каждое Y_ν имеет класс $\mathbf{\Pi}_2^0$ (т. е. G_δ). Таким образом, получилось разбиение пространства $\mathcal{N}$ на $\aleph_1$ непустых борелевских $\mathbf{\Pi}_3^0$-множеств — именно, множеств $Z_\nu=Y_\nu-\bigcup_{\mu<\nu} Y_\mu$. В этом и состоит конструкция Хаусдорфа.

Отметим, что каждое множество Z_ν содержит как точки α такие, что $\alpha(0)=0$, так и точки α с $\alpha(0)>0$, ибо вообще при изменении конечного числа значений α принадлежность α к фиксированному Z_ν сохраняется. Поэтому при $\nu<\omega_1$ множества

$$X_\nu=\{\alpha\in Z_\nu\colon \alpha(0)=0\},\ X_{*\nu}=Z_\nu-X_\nu$$

непусты, и все эти множества принадлежат $\mathbf{\Pi}_3^0$ по предыдущему.

Выбрав множества Q_ν, $Q_{*\nu}\subseteq\mathbf{Q}$ для каждого $\nu<\omega_1$ так, как указано в п. 5.1 (тогда последовательности этих множеств обе принадлежат классу $\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$, см. п. 5.1), мы вводим решето C, задавая его функцию сечений равенствами $C/\alpha=Q_\nu$ при $\alpha\in X_\nu$ и $C/\alpha=Q_{*\nu}$ при $\alpha\in X_{*\nu}$. Аналогично рассуждениям в п. 5.1, можно показать, что решето C будет решетом класса $\mathbf{\Delta}_2^1$. Кроме того, очевидно, что $[C]_\nu=X_\nu$ и $[C]_{*\nu}=X_{*\nu}$ для всех $\nu<\omega_1$, т. е. все внешние и внутренние конституанты решета C суть непустые множества класса $\mathbf{\Pi}_3^0$ (и, следовательно, ранга не выше, чем 4, так как $\mathbf{\Pi}_3^0\subseteq\mathbf{\Delta}_4^0$). Таким образом, построенное решето удовлетворяет требованиям $[211, \mathrm{III}]_+$.

§ 6. Борелевские коды и теорема о Π_1^1-выражении для отделимости

Этим параграфом начинается доказательство теорем А2, Б2 и В § 3. Главная задача, которую здесь нужно выполнить, состоит в эффективном отделении (при определенных условиях) двух множеств бэровского пространства $\mathcal{N}$, относительно которых известно, что они отделимы борелевским множеством данного ранга. Непосредственно к этой задаче мы обратимся в следующем параграфе. Этот же параграф включает определение и изложение элементарных свойств кодировки борелевских множеств, а также доказательство весьма важной для дальнейшего теоремы о Π_1^1-выражении для отделимости, использующее эффективную теорему отделимости Лузо [32]. Отметим, что теорема о Π_1^1-выражении позволит нам здесь отказаться от использования принципа борелевской детерминированности [29], игравшего существенную роль в предыдущей работе автора [22], посвященной лузинским проблемам.

Перейдем, однако, к теме данного параграфа. Идея кодировки построения борелевского множества с помощью фундированных деревьев хорошо известна, и нужно только договориться о способе получения начальных множеств и о виде промежуточных операций. Мы используем здесь почти без изменений введенную в [22] реализацию этой идеи, в которой за основу берется операция дополнения к счетному объединению.

Для каждого ординала λ, через Seq_λ обозначим множество всех *кортежей* (т. е. конечных последовательностей) ординалов, меньших λ (включающую и кортеж Λ длины 0). Положим $\mathrm{Seq}=\bigcup_{\lambda\in\mathrm{Ord}}\mathrm{Seq}_\lambda$ (как обычно, Ord — класс всех ординалов). Запись $u\subset v$ означает, что кортеж v есть собственное продолжение кортежа u. Если $u\in\mathrm{Seq}$ и $\xi\in\mathrm{Ord}$, то через $\xi^\frown u$ и $u^\frown\xi$ условимся обозначать кортежи, полученные приписыванием члена ξ соответственно слева и справа к членам кортежа u. *Деревом* называется всякое непустое множество $T\subseteq\mathrm{Seq}$, обладающее тем свойством, что при $u\in\mathrm{Seq}$ и $v\in T$ из $u\subset v$ следует $u\in T$. Скажем, что дерево T фундировано, когда нет бесконечных путей $u_0 \subset u_1 \subset u_2 \subset \ldots$, составленных из кортежей $u_k \in T$. В этом случае каждому $u \in T$ можно единственным образом сопоставить ординал $|u|_T$ так, чтобы выполнялось равенство

$$|u|_T = \sup_{v \in T, u \subset v} (|v|_T + 1).$$

Определим $|T| = |\Lambda|_T$ (высота дерева T), а через $\sup T$ обозначим наименьший ординал λ такой, что $T \subseteq \mathrm{Seq}_\lambda$.

Борелевским кодом здесь называется всякая пара $\langle T, d \rangle$, состоящая из фундированного дерева $T \subseteq \mathrm{Seq}$ и произвольного множества $d \subseteq T \times \mathrm{Seq}_\omega$. Если $\langle T, d \rangle$ — такая пара, то каждому кортежу $u \in T$ индукцией по $|u|_T$ сопоставляется множество $[T, d, u] \subseteq \mathscr{N}$ с помощью следующей системы равенств:

$$[T, d, u] = \neg \bigcup_{\langle u, w \rangle \in d} \mathscr{N}_w \text{ при } |u|_T = 0,$$

где $\mathscr{N}_w = \{\alpha \in \mathscr{N}: w \subset \alpha\}$ — бэровский интервал для каждого кортежа $w \in \mathrm{Seq}_\omega$, а знаком $\neg$ обозначена операция дополнения, т. е. $\neg X = \mathscr{N} - X$;

$$[T, d, u] = \neg \bigcup_{u^\frown \xi \in T} [T, d, u^\frown \xi] \text{ при } |u|_T \geqslant 1.$$

Определим также $[T, d] = [T, d, \Lambda]$ (кортеж Λ принадлежит любому дереву T).

Легко видеть, что если $\sup T < \omega_1$ (вообще, если дерево T не более чем счетно), то $[T, d]$ будет борелевским множеством класса $\mathbf{\Pi}^0_{1+|T|}$. Верно и обратное, причем для построения в виде $[T, d]$ всех $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-множеств при фиксированном $\rho < \omega_1$ можно ограничиться всего одним деревом T_ρ, варьируя лишь множества d. Деревья T_ρ даются очень простым индуктивным по ρ построением. Именно, $T_0 = \{\Lambda\}$, а если $\rho \geqslant 1$ и все деревья T_ξ с индексами $\xi < \rho$ уже построены, то

$$T_\rho = \{\Lambda\} \cup \{(\omega\xi + k)^\frown u: \xi < \rho \wedge k \in \omega \wedge u \in T_\xi\}.$$

Читателю не составит труда доказать следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть $\rho < \omega_1$. Тогда T_ρ — фундированное дерево, удовлетворяющее $|T_\rho| = \rho$ и $\sup T_\rho = \omega\rho$. Кроме того, ко всякому $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-множеству $X \subseteq \mathscr{N}$ найдется множество $d \subseteq T_\rho \times \mathrm{Seq}_\omega$ такое, что $X = [T_\rho, d]$.*

Перед формулировкой еще одной леммы, которая будет нужна в § 7, сопоставим всякой паре $\pi \in \mathscr{N}$, $\rho \in \mathrm{Ord}$ совокупность $K_{\rho\pi}$ всех борелевских кодов $\langle T, d \rangle \in L[\pi]$ таких, что $\sup T \leqslant \omega_\rho^{L[\pi]}$ и $|T| \leqslant \rho$, а через $[K_{\rho\pi}]$ обозначим семейство всех множеств вида $[T, d]$, где $\langle T, d \rangle$ — код из $K_{\rho\pi}$. Идею следующей леммы автор нашел в заметке Штерна [30].

Лемма 2. *Пусть $\rho \in \mathrm{Ord}$, $\pi \in \mathscr{N}$, $\langle T, d \rangle \in L[\pi]$ — борелевский код и $|T| \leqslant \rho$. Тогда $[T, d] \in [K_{\rho\pi}]$.*

Доказательство. Построим, рассуждая в $L[\pi]$, по каждому коду $\langle T, d \rangle \in L[\pi]$ другой код $\langle T', d' \rangle \in K_{|T|\pi}$ так, чтобы в универсуме всех множеств выполнялось равенство $[T', d'] = [T, d]$. Построение проходит индукцией по $|T|$. Если $|T| = 0$, то $T = \{\Lambda\}$ и возьмем просто $\langle T', d' \rangle = \langle T, d \rangle$.

Выполним теперь построение $\langle T', d' \rangle$ для кода $\langle T, d \rangle$, предполагая, что $\rho = |T| > 0$ и что требуемое построение уже выполнено для всех кодов с деревьями высоты $< \rho$. Положим $U = \{\xi \in \mathrm{Ord}: \langle \xi \rangle \in T\}$ ($\langle \xi \rangle$ — кортеж с единственным элементом ξ),

$$T_\xi=\{u:\ \xi^\frown u\in T\},\ d_\xi=\{\langle u, w\rangle:\ \langle\xi^\frown u, w\rangle\in d\}$$

для каждого $\xi\in U$. Ясно, что $|T_\xi|<\rho$ при любом $\xi\in U$, и поэтому для каждого $\xi\in U$ уже построен код $\langle T_\xi', d_\xi'\rangle$ из совокупности $K_{<\rho,\pi}=\bigcup_{\lambda<\rho} K_{\lambda\pi}$ такой, что $[T_\xi, d_\xi]=[T_\xi', d_\xi']$. Однако совокупность $K_{<\rho,\pi}$ имеет мощность $\varkappa=\omega_\rho^{L[\pi]}$ в $L[\pi]$, т. е. существует функция $f\in L[\pi]$, $f:\ \varkappa\to K_{<\rho,\pi}$ такая, что семейство всех кодов вида $\langle T'_{f(\eta)}, d'_{f(\eta)}\rangle$ (где $\eta<\varkappa$) в точности совпадает с семейством всех кодов $\langle T_\xi', d_\xi'\rangle(\xi\in U)$. Теперь, определив

$$T'=\{\Lambda\}\cup\{\eta^\frown u:\ \eta<\varkappa\wedge u\in T'_{f(\eta)}\};$$

$$d'=\{\langle\eta^\frown u, w\rangle:\ \eta<\varkappa\wedge\langle u, w\rangle\in d'_{f(\eta)}\},$$

мы получим $\langle T', d'\rangle\in K_{\rho\pi}$ и, кроме того,

$$[T', d']=\neg\bigcup_{\eta<\varkappa}[T'_{f(\eta)}, d'_{f(\eta)}]=\neg\bigcup_{\xi\in U}[T_\xi, d_\xi]=[T, d].$$

Этим доказательство леммы 2 закончено.

Борелевские коды будут присутствовать ниже во многих выкладках. В частности, они фигурируют в доказательстве следующей теоремы о Π_1^1-выражении понятия отделимости $\mathbf{\Sigma}_1^1$-множеств. Перед ее формулировкой скажем, что множество $X_1\subseteq\mathcal{N}$ является $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-*отделимым* от $X_2\subseteq\mathcal{N}$ (где $\rho<\omega_1$), если найдется множество $Z\subseteq\mathcal{N}$ класса $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$ такое, что $X_1\subseteq Z$ и $X_2\cap Z=\varnothing$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_1(\beta, \alpha)$ *и* $\varphi_2(\beta, \alpha)$ — *пара* Σ_1^1-*формул с параметрами из некоторой транзитивной модели M теории ZFC, и пусть* $\rho<\omega_1^M$. *Тогда найдется* Π_1^1-*формула* $\theta(\beta)$ *с параметрами из M такая, что в любой транзитивной модели ZFC, расширяющей M (в частности, в самой M и в универсуме всех множеств) истинно следующее*:

$\forall\beta\in\mathcal{N}(\theta(\beta)\leftrightarrow$ *множество* $\{\alpha\in\mathcal{N}:\ \varphi_1(\beta, \alpha)\}$ *является* $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-*отделимым от множества* $\{\alpha:\ \varphi_2(\beta, \alpha)\})$.

Доказательство этой теоремы начнем с нескольких определений, связанных с формулировкой одного результата работы [32]. В дальнейшем предполагается фиксированной рекурсивная нумерация $\mathbf{Q}=\{q_k:\ k\in\omega\}$ множества $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел. Введем совокупность WO всех точек $\gamma\in\mathcal{N}$ таких, что множество $Q_\gamma=\{q_k:\ \gamma(k)=0\}$ вполне упорядочено. Для $\gamma\in WO$ через $\mathrm{otp}(\gamma)$ обозначим порядковый тип множества Q_γ и положим $WO_\nu=\{\gamma\in WO:\ \mathrm{otp}(\gamma)=\nu\}$, когда $\nu<\omega_1$. Точки из WO_ν рассматриваются как коды ординала ν.

Зафиксируем точку $\gamma\in WO_{\omega\rho}$. С ее помощью сопоставим каждому натуральному k из множества Q_γ ординал ξ_k, равный порядковому типу множества $\{q\in Q_\gamma:\ q<q_k\}$; при этом выполняется равенство $\{\xi_k:\ k\in Q_\gamma\}=\{\xi:\ \xi<\omega\rho\}$.

Зафиксируем также рекурсивную (в частности, принадлежащую M) нумерацию $\mathrm{Seq}_\omega=\{w_n:\ n\in\omega\}$ множества Seq_ω такую, что $w_0=\Lambda$. Если кортеж w_n, отвечающий данному индексу n, образован только числами из Q_γ, то через u_n обозначим кортеж, полученный из w_n заменой каждого его члена k на соответствующий ординал ξ_k. Для всех прочих n определим $w_n=\Lambda$. Тогда $u_0=\Lambda$ и $\{u_n:\ n\in\omega\}=\mathrm{Seq}_{\omega\rho}$.

Для дальнейшего договоримся, с целью уменьшения громоздкости обозначений, предполагать, что формулы φ_1 и φ_2 из условия теоремы содержат всего один параметр $\pi\in M\cap\mathcal{N}$. Не ограничивая общности можно предполагать, что точка γ и множества

$$S=\{m:u_m\in T_\rho\},\ S_0=\{m\in S:|u_m|_{T_\rho}=0\},\ S_1=S-S_0,$$
$$S_2=\{2^i\cdot 3^m\cdot 5^k:u_i=u_m\widehat{\ }\xi_k\},\ S_3=\{2^n\cdot 3^i\cdot 5^{w_n(i)}:n\in\omega\wedge i<\operatorname{dom}w_n\}$$

все являются рекурсивными относительно π. В этом предположении, все последующие рассуждения не зависят от конкретного выбора точки $\gamma\in WO_{\omega\rho}$, ввиду чего вместо индекса γ мы запишем индекс ρ в следующем определении. Если $\varepsilon\in\mathcal{N}$, то положим

$$d_{\rho\pi\varepsilon}=\{\langle u_m,\ w_n\rangle:\ m\in S\wedge\varepsilon(2^m\cdot 3^n)=0\}$$

(таким образом, $d_{\rho\pi\varepsilon}\subseteq T_\rho\times\mathrm{Seq}_\omega$) и $W_{\rho\pi\varepsilon}=[T_\rho,\ d_{\rho\pi\varepsilon}]$. Согласно лемме 1, семейство всех множеств вида $W_{\rho\pi\varepsilon}$, где $\varepsilon\in\mathcal{N}$, в точности совпадает с классом всех $\Pi^0_{1+\rho}$-множеств пространства $\mathcal{N}$. Идея работы [32] состоит в том, чтобы брать не все, а только гиперарифметические точки ε. Точнее говоря, для любого $\beta\in\mathcal{N}$ вводится совокупность $\Pi^{*\pi\beta}_{1+\rho}$ всех множеств вида $W_{\rho\pi\varepsilon}$, где $\varepsilon\in\mathcal{N}$ — точка класса $\Delta_1^{1,\pi,\beta}$.

Теорема 2 (эффективная теорема отделимости [32]). *Пусть $\beta\in\mathcal{N}$ и $X_1,\ X_2\subseteq\mathcal{N}$ — пара непересекающихся множеств класса $\Sigma_1^{1,\pi,\beta}$, причем первое из них $\Pi^0_{1+\rho}$-отделимо от второго. Тогда X_1 можно отделить от X_2 множеством класса $\Pi^{*\pi\beta}_{1+\rho}$.*

Для того чтобы использовать эту теорему (принимаемую здесь без доказательства) в доказательстве теоремы 1, построим Σ_1^1-формулу $\Phi(\varepsilon,\alpha)$ и Π_1^1-формулу $\Psi(\varepsilon,\alpha)$, обе с параметрами из M (фактически, с единственным параметром π) такие, что в любой модели ZFC, расширяющей M, истинно:

$$\forall\varepsilon\forall\alpha(\alpha\in W_{\rho\pi\varepsilon}\leftrightarrow\Phi(\varepsilon,\alpha)\leftrightarrow\Psi(\varepsilon,\alpha)).$$

В качестве $\Phi(\varepsilon,\alpha)$ можно взять такую формулу:

$$\begin{gathered}\exists g:\omega\to\{0,1\}(g(0)=1\wedge[\forall m\in S_0(g(m)=\\ =1\leftrightarrow\forall n(\varepsilon(2^m\cdot 3^n)=0\to\alpha\notin\mathcal{N}_{w_n}))\wedge\\ \wedge\forall m\in S_1(g(m)=1\leftrightarrow\forall k\forall i\in S(u_i=u_n\widehat{\ }\xi_k\to g(i)=0))]),\end{gathered}$$

(множества S, S_0, S_1 определены выше; смысл формулы в квадратных скобках заключается в том, что

$$\forall m(g(m)=1\leftrightarrow\alpha\in[T_\rho,\ d_{\rho\pi\varepsilon},\ u_m])).$$

Конечно, предложенная формула — так, как она записана — не является не то что Σ_1^1-формулой, но даже и аналитической формулой. Однако ее нетрудно преобразовать к эквивалентному требуемому виду, использовав характеристические функции множеств S, S_0, S_1, S_2, S_3 (последнее множество применяется для того, чтобы выразить отношение $\alpha\notin\mathcal{N}_{w_n}$ формулой $\exists i<\operatorname{dom}w_n(\alpha(i)\neq w_n(i))$).

В качестве же $\Psi(\varepsilon,\alpha)$ можно взять преобразованную аналогичным образом формулу $\forall g$: $\omega\to\{0,1\}([\ldots]\to g(0)=1)$, где в квадратных скобках стоит то же самое выражение, что и в формуле Φ.

Заканчивая доказательство теоремы 1, через $\theta(\beta)$ обозначим следующую формулу:

$$\exists\varepsilon\in\Delta^{1,\pi,\beta}_{1+\rho}\ \forall\alpha((\varphi_1(\beta,\alpha)\to\Psi(\varepsilon,\alpha))\wedge(\varphi_2(\beta,\alpha)\to\neg\Phi(\varepsilon,\alpha))).$$

Согласно теореме 2, эта формула действительно будет выражать отделимость нужным образом (см. условие теоремы 1). Далее, выражение во внешних скобках является Π_1^1-формулой с параметрами из M по выбору формул φ_1, φ_2, Φ и Ψ. Квантор $\forall\alpha$ не меняет этого класса. Наконец, известно, что квантор $\exists\varepsilon\in\Delta_1^1$, примененный к Π_1^1-формуле, дает формулу того же класса и с тем же набором параметров (см., например, [19, с. 288]).

§ 7. Отделимость множеств класса $\Sigma_1(HC)$

Конституанты, определяемые решетами класса не выше $\mathbf{\Delta}_2^1$ (а только такие решета рассматриваются в настоящей статье), будут множествами класса $\mathbf{\Sigma}_2^1$ (см. § 8), а тогда и класса $\Sigma_1(HC)$ по лемме о переводе § 4. В связи с этим необходимо провести исследование явления отделимости множеств указанного класса посредством борелевских множеств фиксированного ранга. Это и является целью данного параграфа. Первая лемма, однако, прямо не связана с отделимостью. Перед ее формулировкой, для любой тройки $\pi\in\mathcal{N}$, $\rho\in\mathrm{Ord}$ и $X\subseteq\mathcal{N}$ через $(X)_{\rho\pi}$ обозначим пересечение всех множеств из совокупности $[K_{\rho\pi}]$ (см. § 6), включающих X. Ясно, что $X\subseteq(X)_{\rho\pi}$.

Лемма 3. *В рассматриваемой ситуации, если* $\omega_\rho^{L[\pi]}<\omega_1$ *и* $X\in\Sigma_1^{HC}(\omega_1\cup\{\pi\})$, *то* $(X)_{\rho\pi}\in[K_{\rho\pi}]$.

Доказательство. Мы покажем, что семейство $K_{\rho\pi}(X)$ всех кодов $\langle T, d\rangle\in K_{\rho\pi}$ таких, что $X\subseteq[T, d]$, принадлежит классу $L[\pi]$. Отсюда легко получается лемма. Именно, заиндексируем в $L[\pi]$ указанное семейство: $K_{\rho\pi}(X)=\{\langle T_\xi, d_\xi\rangle: \xi<\varkappa\}$, где $\varkappa$ — некоторый ординал. По определению $K_{\rho\pi}$, каждое дерево T_ξ удовлетворяет неравенству $|T_\xi|\leqslant\rho$. В этой ситуации, рассуждая в $L[\pi]$, нетрудно сконструировать из кодов $\langle T_\xi, d_\xi\rangle$ борелевский код $\langle T, d\rangle\in L[\pi]$ такой, что $|T|\leqslant\rho$ и $[T, d]=$ $=\bigcap_{\xi\wedge\varkappa}[T_\xi, d_\xi]$, т. е. $[T, d]=(X)_{\rho\pi}$. Однако $[T, d]\in[K_{\rho\pi}]$ по лемме 2 § 6, что и требовалось.

Начиная доказательство соотношения $K_{\rho\pi}(X)\in L[\pi]$, предположим для уменьшения громоздкости, что Σ_1-формула, определяющая в HC наше множество X, содержит всего один ординал $\nu<\omega_1$ в качестве параметра. В этом случае найдется множество $P\subseteq\omega_1\times\mathcal{N}$ класса $\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$ такое, что $X=\{\alpha: \langle\nu, \alpha\rangle\in P\}$. Следующее множество

$$P'=\{\langle\gamma, \alpha\rangle: \gamma\in WO\wedge\langle\mathrm{otp}(\gamma), \alpha\rangle\in P\}$$

также принадлежит классу $\Sigma_1^{HC}(\{\pi\})$, а следовательно (по лемме о переводе § 4), и классу $\Sigma_2^{1,\pi}$. Используя конструкцию из стандартного доказательства теоремы о разбиении $\mathbf{\Sigma}_2^1$-множества на $\aleph_1$ множеств класса $\mathbf{\Sigma}_1^1$ (см., например, [19, с. 247—248]), можно подобрать Σ_1^1-формулу $\varphi(\gamma, \alpha, \delta)$ с параметром π, удовлетворяющую эквивалентности

$$\forall\gamma\forall\alpha(\langle\gamma, \alpha\rangle\in P'\leftrightarrow\exists\delta\in WO\varphi(\gamma, \alpha, \delta)).$$

В частности, если $\gamma\in WO_\nu$, то $X=\{\alpha: \exists\delta\in WO\varphi(\gamma, \alpha, \delta)\}$.

Следующий этап доказательства леммы 3 включает использование метода вынуждения с множеством Seq_λ, где $\lambda=\max\{\nu, \omega_\rho^{L[\pi]}\}$ — в качестве множества вынуждающих условий. Порядок на Seq_λ принимается обратным включению: $p\leqslant q$, когда $q\subseteq p$. Запись $p\leqslant q$ означает, что вынуждающее условие q более информативно (т. е. вынуждает больше формул), чем p. Условие Λ (пустой кортеж) является максимальным и наименее информативным.

В качестве исходной (расширяемой) модели мы будем рассматривать универсум V всех множеств, в котором доказывается лемма 3, а также его часть $L[\pi]=L^V[\pi]$, состоящую из всех множеств $x\in V$, конструктивных в V относительно π. Обычно аппарат вынуждения «над» универсумом V реализуется в виде булевозначных моделей. Здесь же, в целях большей наглядности, мы предположим, что универсум V является счетной моделью в некотором более широком универсуме V^+. Тогда для любого условия $p\in\mathrm{Seq}_\lambda$ в V^+ найдутся Seq_λ-генерические над V множества $G\subseteq\mathrm{Seq}_\lambda$, содержащие p. Впрочем, перевод всех выкладок на корректный язык булевозначных моделей не составляет труда.

Вся используемая ниже терминология, касающаяся вынуждения и генерических расширений, взята из книги [19].

Пусть $\langle T, d\rangle\in K_{\rho\pi}$. Идея состоит в том, чтобы доказать эквивалентность включения $X\subseteq[T, d]$ в V и соотношения $\Lambda\Vdash F^*(T, d)$, где через $\Vdash$ обозначено вынуждение, соответствующее исходной модели $L[\pi]$ и множеству вынуждающих условий Seq_λ, а $F^*(T, d)$ — следующая формула:

$$\forall\gamma\in WO_{\nu^*}\forall\delta\in WO\forall\alpha(\varphi^*(\gamma, \alpha, \delta)\to\alpha\in[T^*, d^*]).$$

(В системе [19, гл. 4] $x^*=\mathrm{Seq}_\lambda\times x$ — терм, соответствующий множеству x в языке вынуждения с множеством вынуждающих условий Seq_λ. Через φ^* мы обозначили формулу, полученную из формулы φ заменой π на π^*.) Утверждается, что

$$X\subseteq[T, d] \text{ в } V\leftrightarrow\Lambda\Vdash F^*(T, d) \tag{1}$$

для любого кода $\langle T, d\rangle\in K_{\rho\pi}$. Из этой эквивалентности немедленно следует, что $K_{\rho\pi}(X)\in L[\pi]$, поскольку вынуждение $\Vdash$ (над $L[\pi]$) выразимо в исходной модели $L[\pi]$.

Для доказательства импликации слева направо в утверждении (1), пусть $X\subseteq[T, d]$, т. е. в V истинно предложение

$$\forall\gamma\in WO_\nu\forall\delta\in WO\forall\alpha(\varphi(\gamma, \alpha, \delta)\to\alpha\in[T, d]),$$

которое мы обозначим через $F(T, d)$. Предположим противное: не выполняется $\Lambda\Vdash F^*(T, d)$. Тогда найдется условие $p\in\mathrm{Seq}_\lambda$, вынуждающее формулу $\neg F^*(T, d)$. Рассмотрим произвольное Seq_λ-генерическое над V (а тогда и над $L[\pi]$) множество $G\in V^+$, $G\subseteq\mathrm{Seq}_\lambda$, содержащее p. По выбору p, в $L[\pi][G]$ формула $F(T, d)$ будет ложной.

Рассмотрим общее расширение $V[G]$ моделей V и $L[\pi][G]$. Убедимся, что $F(T, d)$ истинно в $V[G]$. В соответствии с принципом абсолютности § 4 и предположением об истинности $F(T, d)$ в V, достаточно построить Π_2^1-формулу с параметрами из V, эквивалентную $F(T, d)$ в V и в $V[G]$. Для построения такой формулы отметим, что дерево T удовлетворяет в V неравенству $\sup T<\omega_1$, так как $\omega_\rho^{L[\pi]}<\omega_1$ по условию леммы 3, а $\langle T, d\rangle\in K_{\rho\pi}$. В этой ситуации существует Σ_1^1-формула $\Phi(\alpha)$ с параметрами из V такая, что в V и в $V[G]$ истинно: $\forall\alpha(\alpha\in[T, d]\leftrightarrow$ $\leftrightarrow\Phi(\alpha))$ (см. построение формулы Φ в § 6). В качестве требуемой Π_2^1-формулы можно взять предложение

$$\forall\gamma\forall\delta\forall\alpha(\mathrm{eq}(\gamma, \gamma')\wedge\mathrm{wo}(\delta)\wedge\varphi(\gamma, \alpha, \delta)\to\Phi(\alpha)),$$

где $\gamma' \in V \cap WO_\nu$ произвольно, Σ_1^1-формула $\mathrm{eq}(\gamma, \gamma')$ каноническим образом выражает порядковую изоморфность множеств Q_γ и $Q_{\gamma'}$ (т. е. принадлежность γ к WO_ν), а Π_1^1-формула $\mathrm{wo}(\delta)$ каноническим образом выражает принадлежность δ к WO.

Итак, формула $F(T, d)$ истинна в $V[G]$. Однако точно такими же выкладками, но отправляясь от ложности $F(T, d)$ в $L[\pi][G]$, можно показать, что эта формула в то же самое время ложна в $V[G]$, чем и достигается искомое противоречие. (Неравенство $\sup T < \omega_1^{L[\pi][G]}$, необходимое для построения нужной формулы Φ с параметрами из $L[\pi][G]$, вытекает здесь из выбора λ и неравенства $\lambda < \omega_1^{L[\pi][G]}$. Последнее же дается характерным свойством «склеивающего» множества вынуждающих условий Seq_λ: функция UG принадлежит $L[\pi][G]$ и отображает ω на λ, см., например, [24, § 18].)

Этим доказана импликация слева направо в эквивалентности (1). Обратная импликация доказывается совершенно аналогично.

Главный вклад в доказательство теорем А2, Б2, В вносится следующей леммой, ранее доказанной автором в некоторых частных случаях в [19, добавление, п. 16] и в [22]. Необходимо отметить, что идея рассуждения, позволяющего анализировать явление отделимости множеств класса $\Sigma_1^{HC}(\omega_1 \cup \{\pi\})$ посредством борелевских множеств определенного ранга, принадлежит Ж. Стерну (см. его заметку [30], где эта идея использована для анализа трансфинитных последовательностей борелевских множеств ограниченного ранга в моделях Леви — Соловея).

Лемма 4. *Пусть $\pi \in \mathcal{N}$, $\rho < \omega_1^{L[\pi]}$ и $X_1, X_2 \subseteq \mathcal{N}$ — пара непересекающихся множеств класса $\Sigma_1^{HC}(\omega_1 \cup \{\pi\})$, причем первое из них $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-отделимо от второго. Тогда X_1 можно отделить от X_2 множеством из семейства $[K_{\rho\pi}]$. В частности, согласно лемме 3, множество $(X_1)_{\rho\pi}$ будет отделять X_1 от X_2.*

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей леммы, можно подобрать пару ординалов $\nu_i < \omega_1$ (здесь и ниже в доказательстве индекс i принимает значения 1 и 2) и пару Σ_1^1-формул $\varphi_i(\gamma, \alpha, \delta)$ с единственным параметром π, удовлетворяющих равенствам

$$X_i = \{\alpha \in \mathcal{N} \colon \exists \delta \in WO \varphi_i(\gamma_i, \alpha, \delta)\} \tag{2}$$

при любом выборе $\gamma_i \in WO_{\nu_i}$. Обозначим через Ω первый несчетный ординал $\omega_1 = \omega_1^V$ универсума V, в котором доказывается лемма 4, положим $\lambda = \max\{\nu_1, \nu_2, \Omega\}$ и рассмотрим Seq_λ-генерическое над V множество $G \subseteq \mathrm{Seq}_\lambda$ (принадлежащее более широкому универсуму V^+, см. доказательство леммы 3).

Через $\Phi_i(\gamma, \alpha, \delta)$ (где $i=1, 2$) обозначим Σ_1^1-формулу

$$\exists \gamma' \exists \delta' (\mathrm{eq}(\gamma', \gamma) \wedge \mathrm{ls}(\delta', \delta) \wedge \varphi_i(\gamma', \alpha, \delta')),$$

в записи которой $\mathrm{eq}(\gamma', \gamma)$ и $\mathrm{ls}(\delta', \delta)$ суть Σ_1^1-формулы, каноническим образом выражающие соответственно порядковую изоморфность множеств $Q_{\gamma'}$ и Q_γ (т. е. равенство $\mathrm{otp}(\gamma') = \mathrm{otp}(\gamma)$, когда $\gamma', \gamma \in WO$) и порядковую изоморфность множества $Q_{\delta'}$ некоторому отличному от Q_δ начальному сегменту множества Q_δ (т. е. неравенство $\mathrm{otp}(\delta') < \mathrm{otp}(\delta)$).

Согласно теореме 1 § 6, существует Π_1^1-формула $\theta(\gamma_1, \gamma_2, \delta)$ с параметрами из V, эквивалентная в V и в $V[G]$ утверждению о $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-отделимости множества $\{\alpha: \Phi_1(\gamma_1, \alpha, \delta)\}$ от $\{\alpha: \Phi_2(\gamma_2, \alpha, \delta)\}$ (теорема применяется в универсуме $V[G]$ к модели $M=V$).

Для дальнейшего зафиксируем пару точек $\gamma_i \in WO_{\nu_i} \cap V$. В соответствии с только что сказанным, предложение $\forall\delta(\mathrm{wo}(\delta)\to\theta(\gamma_1, \gamma_2, \delta))$ является Π_1^1-формулой с параметрами из V, причем это предложение истинно в V ввиду (2). Значит, оно истинно и в $V[G]$ по принципу Шенфилда § 4.

Сублемма. *Найдется множество* $d\in L[\pi][G]$, $d\subseteq T_\rho\times\mathrm{Seq}_\omega$ (построение дерева T_ρ см. в § 6) *такое, что в* $V[G]$ *истинно: при любом* $\delta\in WO_\Omega$ *множество* $[T_\rho, d]$ *отделяет множество* $\{\alpha: \Phi_1(\gamma_1, \alpha, \delta)\}$ *от* $\{\alpha: \Phi_2(\gamma_2, \alpha, \delta)\}$.

Замечание к сублемме. Ординал Ω не более чем счетен в классе $V[G]$ и даже в $L[\pi][G]$, ибо $\Omega\leqslant\lambda$ по выбору λ, и $\lambda<\omega_1^{L[\pi][G]}$ (см. доказательство леммы 3). Таким образом, множество WO_Ω непусто в $V[G]$ и в $L[\pi][G]$. По аналогичной причине, множества WO_{ν_i} также непусты в $L[\pi][G]$. Этот факт используется в доказательстве сублеммы.

Доказательство сублеммы. Выберем произвольным образом $\gamma_i'\in WO_{\nu_i}\cap L[\pi][G]$ и $\delta'\in WO_\Omega\cap L[\pi][G]$. Как мы видели выше, в $V[G]$ истинно $\theta(\gamma_1, \gamma_2, \delta')$. По самой записи формул Φ_i отсюда следует, что в $V[G]$ истинно и $\theta(\gamma_1', \gamma_2', \delta')$, т. е. в $V[G]$ истинно, что множество $\{\alpha: \Phi_1(\gamma_1', \alpha, \delta')\}$ является $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-отделимым от $\{\alpha: \Phi_2(\gamma_2', \alpha, \delta')\}$. Теорема 2 § 6 дает здесь возможность подобрать отделяющее множество в виде $[T_\rho, d]$, где $d=d_{\rho\pi\varepsilon}$ для подходящей точки ε класса $\Delta_1^{1,\pi,\gamma_1',\gamma_2',\delta'}$. Точка ε обязана принадлежать $L[\pi][G]$, так как π, γ_i', $\delta'\in L[\pi][G]$. Следовательно, $d\in L[\pi][G]$. Наконец, снова ввиду записи формул Φ_i, можно заключить, что множество $[T_\rho, d]$ отделяет $\{\alpha: \Phi_1(\gamma_1, \alpha, \delta)\}$ от $\{\alpha: \Phi_2(\gamma_2, \alpha, \delta)\}$, что и требовалось.

Продолжая доказательство леммы 4, рассмотрим множество d, даваемое сублеммой. Это множество принадлежит генерическому расширению $L[\pi][G]$ класса $L[\pi]$. Значит, найдется множество $t\in L[\pi]$, $t\subseteq\mathrm{Seq}_\lambda\times(T_\rho\times\mathrm{Seq}_\omega)$, такое, что

$$d=I_G(t)=\{\langle u, w\rangle: \exists p\in G(\langle p, u, w\rangle\in t)\}$$

(см. [19, гл. 4, лемма 2.5]). Обозначив через $\Vdash$ вынуждение, соответствующее теперь уже исходной модели V и множеству вынуждающих условий Seq_λ, мы находим условие $p_0\in G$ такое, что

$$p_0\Vdash\forall\,\delta\in WO_{\Omega^*}\ (\text{множество }[T^*_\rho, t]\text{ отделяет }\{\alpha:\Phi^*_1(\gamma^*_1, \alpha, \delta)\}\text{ от }\{\alpha:\Phi^*_2(\gamma^*_2, \alpha, \delta)\}). \tag{3}$$

(Здесь, как и в доказательстве леммы 3, $x^*=\mathrm{Seq}_\lambda\times x$ для каждого $x\in V$, а формулы Φ_i^* получены из Φ_i заменой параметра π на π^*.) Для каждой пары $u\in T_\rho$, $p\in\mathrm{Seq}_\lambda$ определим

$$Z_{up}=\{\alpha\in\mathcal{N}\cap V: p\Vdash\alpha^*\in[T^*_\rho, t, u^*]\}.$$

Используя классические леммы о вынуждении формул различной логической структуры [19, гл. 4, § 2] с учетом определения множеств $[T, d, u]$ в § 6, нетрудно получить следующую систему равенств, связывающих в универсуме V множества Z_{up} между собой:

$$Z_{up}=\neg\bigcup_{w\in S_{up}}\mathcal{N}_w\ \text{при}\ |u|_{T_\rho}=0, \tag{4}$$

где $S_{up}=\{w\in\mathrm{Seq}_\omega\colon \exists q,\ r\in\mathrm{Seq}_\lambda(r\leqslant p,\ q\wedge\langle q,\ u,\ w\rangle\in t)\}$;

$$Z_{up}=\neg\bigcup_{q\leqslant p,u^\frown\xi\in T_\rho} Z_{u^\frown\xi,q} \text{ при } |u|_{T_\rho}\geqslant 1. \qquad (5)$$

Эти равенства, кстати, показывают, что индексированное семейство множеств Z_{up} принадлежит V, ибо $t\in V$. Выведем еще одно важное утверждение:

$$\text{множество } Z_{\Lambda p_0} \text{ отделяет } X_1 \text{ от } X_2 \text{ в универсуме } V. \qquad (6)$$

В самом деле, пусть $\alpha\in X_1$. Для проверки $\alpha\in Z_{\Lambda p_0}$ зафиксируем произвольное Seq_λ-генерическое над V множество H, содержащее p_0, и докажем, что $\alpha\in[T_\rho,\ I_H(t)]$ в $V[H]$. В соответствии с равенствами (2) и выбором точек $\gamma_i\in WO_{\nu_i}\cap V$, найдется точка $\delta'\in WO\cap V$ такая, что в V будет истинно предложение $\varphi_1(\gamma_1,\ \alpha,\ \delta')$. Тогда по принципу Шенфилда § 4 это предложение окажется истинным и в $V[H]$. Выберем произвольным образом точку $\delta\in V[H]\cap WO_\Omega$. Имеем $\mathrm{otp}(\delta)=\Omega$ и в то же время $\mathrm{otp}(\delta')<\Omega$, так как $\delta'\in V$, а $\Omega=\omega_1^V$. Следовательно, в $V[H]$ истинно $\Phi_1(\gamma_1,\ \alpha,\ \delta)$. Однако $p_0\in H$ и поэтому согласно (3) мы обязательно получим $\alpha\in[T_\rho,\ I_H(t)]$ в $V[H]$, что и требовалось.

Этим рассуждением доказано включение $X_1\subseteq Z_{\Lambda p_0}$. Точно так же доказывается, что $X_2\cap Z_{\Lambda p_0}=\varnothing$.

Множество $t\in L[\pi]$ и принадлежащее V семейство множеств Z_{up}, удовлетворяющих в универсуме V требованиям (4), (5), (6) — это все, что нам нужно для окончания доказательства леммы 4. С этого момента все рассуждения проходят в универсуме V леммы 4. В сущности, ввиду (6), достаточно проверить, что $Z_{\Lambda p_0}\in[K_{\rho\pi}]$. С этой целью построим в $L[\pi]$ индукцией по ординалу $|u|=|u|_{T_\rho}$ семейство борелевских кодов $\langle T_{up},\ d_{up}\rangle\in L[\pi]$ (где $u\in T_\rho$, $p\in\mathrm{Seq}_\lambda$) с деревьями T_{up} такими, что $|T_{up}|=|u|$, и удовлетворяющих равенствам $Z_{up}=[T_{up},\ d_{up}]$ в V. При $u=\Lambda$ и $p=p_0$ лемма 2 § 6 позволяет получить отсюда нужный результат.

Если $|u|=0$, то возьмем $T_{up}=\{\Lambda\}$ и $d_{up}=\{\langle\Lambda,\ w\rangle\colon w\in S_{up}\}$; равенство $Z_{up}=[T_{up},\ d_{up}]$ следует из (5).

Если же $|u|\geqslant 1$, то, зафиксировав биекцию f множества

$$E=\{\langle q,\ \xi\rangle\colon q\in\mathrm{Seq}_\lambda\wedge q\leqslant p\wedge \xi\in\mathrm{Ord}\wedge u^\frown\xi\in T_\rho\}$$

на некоторый ординал $\varkappa$ ($f\in L[\pi]$), определим

$$T_{up}=\{\Lambda\}\cup\{f(q,\ \xi)^\frown v\colon\langle q,\ \xi\rangle\in E\wedge v\in T_{u^\frown\xi,q}\};$$

$$d_{up}=\{\langle f(q,\ \xi)^\frown v,\ w\rangle\colon\langle q,\ \xi\rangle\in E\wedge\langle v,\ w\rangle\in d_{u^\frown\xi,q}\}.$$

(Замечание: если $u^\frown\xi\in T_\rho$, то $|u^\frown\xi|<|u|$.) Требуемое равенство $Z_{up}=[T_{up},\ d_{up}]$ обеспечивается индуктивным предположением и равенством (6). Доказательство леммы 4 на этом закончено.

Изложенные доказательства лемм 3 и 4 оставляют несколько странное впечатление использованием в них метода вынуждения не для доказательств непротиворечивости, а для вывода «положительных» утверждений о множествах. Некоторые параллели между этими выкладками и построениями из доказательства теоремы 2 § 6 в работе А. Луво [32] указывают на перспективность поиска доказательств лемм 3 и 4, не связанных с методом вынуждения.

Получим теперь два следствия только что доказанных лемм, уже прямо связанных с доказательствами теорем А 2, Б 2 и В.

Следствие 1. *Пусть* $\pi \in \mathcal{N}$, $\rho < \omega_1$ *и* $\omega_{\rho+1}^{L[\pi]} < \omega_1$. *Тогда всякое семейство, состоящее из попарно* $\Pi^0_{1+\rho}$*-отделимых друг от друга лежащих в* $\mathcal{N}$ *множеств класса* $\Sigma_1^{HC}(\omega_1 \cup \{\pi\})$, *не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть F — семейство указанного вида. Согласно лемме 4, все множества вида $(X)_{\rho\pi}$, где $X \in F$, будут попарно различны, а по лемме 3, все такие множества принадлежат совокупности $[K]_{\rho\pi}$. Однако последняя, как легко убедиться, имеет мощность $\omega_{\rho+1}^{L[\pi]}$ в $L[\pi]$, т. е. является счетной в универсуме всех множеств по условию следствия. Отсюда искомое очевидно.

Следствие 2. *Пусть* $\pi \in \mathcal{N}$ *и множество* $X \subseteq \mathcal{N}$ *имеет класс* $\Delta_1^{HC}(\omega_1 \cup \{\pi\})$. *Тогда* $X \subseteq L[\pi]$.

Доказательство. Оба множества, X и $Y = \mathcal{N} - X$, принадлежат $\Sigma_1^{HC}(\omega_1 \cup \{\pi\})$, причем второе является Π_2^0-отделимым от первого. Применяя лемму 4 при $\rho = 1$, находим борелевский код $\langle T, d \rangle \in K_{1\pi}$ такой, что множество $[T, d]$ отделяет Y от X, т. е. фактически совпадает с Y. По определению $K_{\rho\pi}$ в § 6, выполняется неравенство $|T| \leqslant 1$, причем можно считать, что $|T| = 1$, ибо случай $|T| = 0$ соответствует открытости — а значит, и пустоте ввиду счетности — множества X. В этом предположении, обозначив через U множество всех ординалов ξ таких, что $\langle \xi \rangle \in T$, и определив

$$S_\xi = \{w : \langle \langle \xi \rangle, w \rangle \in d\}, \quad X_\xi = \neg \bigcup_{w \in S_\xi} \mathcal{N}_w$$

для каждого $\xi \in U$, мы получим $X = \bigcup_{\xi \in U} X_\xi$. Остается проверить, что $X_\xi \subseteq L[\pi]$ при любом ξ. Заметим для этого, что $d \in L[\pi]$ по определению $K_{\rho\pi}$, а значит, и $S_\xi \in L[\pi]$. Отсюда следует, что каждое X_ξ является счетным (ввиду счетности X) множеством класса Π_1^{0,π_ξ} для подходящего $\pi_\xi \in \mathcal{N} \cap L[\pi]$. (В качестве π_ξ можно взять, скажем, характеристическую функцию множества $\{n \in \omega : w_n \in S_\xi\}$, где через w_n обозначен n-й элемент множества Seq_ω в смысле некоторой фиксированной рекурсивной нумерации этого множества.) В этом случае, как известно (см., например, [19, с. 289, следствие 4.12]), множество X_ξ состоит только из точек класса Δ_1^{1,π_ξ} и тем самым выполняется включение $X_\xi \subseteq L[\pi]$.

§ 8. Доказательство теорем А2 и Б2

Для того чтобы получить приложения результатов предыдущего параграфа к исследованию конституант решет класса Δ_2^1, необходимо оценить определимость конституант. С этой целью доказывается следующая лемма:

Лемма 5. *Пусть* C — *решето класса* Δ_2^1. *Тогда найдется точка* $\pi \in \mathcal{N}$ *такая, что все конституанты* $[C]_\nu$ *и* $[C]_{*\nu}$ *решета* C *имеют класс* $\Delta_1^{HC}(\omega_1 \cup \{\pi\})$.

Доказательство. Напомним, что согласно предложению 2 § 4 функция сечений $\alpha \mapsto C/\alpha$ решета C является функцией класса $\Delta_1^{HC}(\mathcal{N})$. Следовательно, найдется точка $\pi \in \mathcal{N}$ такая, что эта функция имеет класс $\Delta_1^{HC}(\{\pi\})$.

Введем следующие три формулы:

$\Psi_1(f, \mu, X) \leftrightarrow \mu$ — ординал $\wedge X \subseteq \mathbf{Q} \wedge f$ является сохраняющей порядок биекцией μ на X;

$\Psi_2(X, Y) \leftrightarrow X \subseteq Y \subseteq \mathbf{Q} \wedge X$ — начальный сегмент Y;

$\Psi_3(X, Y) \leftrightarrow X \subseteq Y \subseteq \mathbf{Q} \wedge$ разность $Y - X$ непуста и имеет наименьший элемент.

Легко видеть, что записанные формулы являются ограниченными (или Δ_0-формулами — см. [19, с. 105], т. е. эти формулы можно переписать, так, чтобы каждый входящий в их запись квантор имел вид $\exists x \in y$ или $\forall x \in y$). Теперь лемма дается следующими легко проверяемыми эквивалентностями:

$$\alpha \in [C]_\nu \leftrightarrow \exists f \Psi_1(f, \nu, C/\alpha) \leftrightarrow \forall f \forall X \forall \mu \leqslant \nu (\Psi_1(f, \mu, X) \wedge \Psi_2(X, C/\alpha) \to$$
$$\to (\mu = \nu \wedge X = C/\alpha) \vee (\mu < \nu \wedge \Psi_3(X, C/\alpha)));$$
$$\alpha \in [C]_{*\nu} \leftrightarrow \exists f \exists X (\Psi_1(f, \nu, X) \wedge \Psi_2(X, C/\alpha) \wedge (C/\alpha - X \neq \varnothing) \wedge \neg \Psi_3(X, C/\alpha)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall f \forall X \forall \mu \leqslant \nu (\Psi_1(f, \mu, X) \wedge \Psi_2(X, C/\alpha) \to$$
$$\to (\mu = \nu \wedge (C/\alpha - X \neq \varnothing) \wedge \neg \Psi_3(X, C/\alpha)) \vee (\mu < \nu \wedge \Psi_3(X, C/\alpha))).$$

Кванторы $\exists f$, $\exists X$, $\forall f$, $\forall X$ в этих формулах можно, разумеется, ограничить множеством HC.

Доказательство теорем А 2 и Б 2 с помощью доказанной леммы и результатов § 7 не составляет труда. Теорема Б 2 вообще автоматически вытекает из следствия 2 § 7, так как внешние и внутренние конституанты в объединении дают все точки $\mathcal{N}$.

Обратимся к теореме А 2. Если допустить, что существует решето, обеспечивающее истинность одного из утверждений, названных в этой теореме, то ввиду следствия 1 § 7 и только что доказанной леммы нашлись бы точка $\pi \in \mathcal{N}$ и ординал $\rho < \omega_1$ такие, что $\omega_{\rho+1}^{L[\pi]} \geqslant \omega_1$. С другой стороны, известно [26], что если неравенство $\omega_1^{L[\pi]} < \omega_1$ выполняется для всех $\pi \in \mathcal{N}$, то для всех π и всех $\xi < \omega_1$ будет выполняться также и неравенство $\omega_\xi^{L[\pi]} < \omega_1$, вступающее в противоречие с $\omega_{\rho+1}^{L[\pi]} \geqslant \omega_1$.

Разумеется, проведенное рассуждение можно применить к анализу не только последовательностей конституант решет класса Δ_2^1, но и к более широкому классу $\Sigma_1(HC)$-определимых последовательностей. (Естественно, $\Sigma_1(HC)$-определимой мы называем всякую последовательность $\langle X_\nu : \nu < \omega_1 \rangle$ множеств $X_\nu \subseteq \mathcal{N}$ такую, что множество $\{\langle \nu, \alpha \rangle : \nu < \omega_1 \wedge \alpha \in X_\nu\}$ принадлежит классу $\Sigma_1(HC)$. Таковыми, в силу леммы 5, будут последовательности конституант решет класса Δ_2^1.) Здесь, в сущности, доказано, что существование точки $\pi \in \mathcal{N}$, удовлетворяющей равенству $\omega_1^{L[\pi]} = \omega_1$, вытекает из существования $\Sigma_1(HC)$-определимой последовательности, среди членов которой можно выделить состоящее из непустых множеств подсемейство, обладающее свойством ранг-ограниченной попарной отделимости (см. § 2).

§ 9. Доказательство теоремы В

Изложенный в [19, добавление, п. 19] и в [22] первоначальный вариант доказательства этой теоремы был связан с принципом борелевской детерминированности. Здесь мы представим другой способ доказательства, опирающийся на теорему о Π_1^1-выражении из § 6. Предположим противное: существует решето, удовлетворяющее одному из требований [111, IV], $[111, IV]_*$, $[111, IV]_+$,— и выведем отсюда противоречие.

Начнем с вывода противоречия из допущения о существовании решета вида [111, IV]. Итак, пусть $\rho<\omega_1$ и все конституанты $[C]_\nu$, даваемые борелевским решетом $C=\langle C_q\colon q\in\mathbf{Q}\rangle$ непусты и попарно $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-отделимы друг от друга. Имея ввиду какую-нибудь рекурсивную нумерацию $\mathbf{Q}=\{q_k\colon k\in\omega\}$ множества $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел, рассмотрим множество $\{\langle\alpha, k\rangle\colon \alpha\in C_{q_k}\}$. Это множество — борелевское в пространстве $\mathcal{N}\times\omega$, так как все C_q суть борелевские множества. Поэтому можно подобрать точку $\pi\in\mathcal{N}$, а также Σ_1^1-формулу $\varphi(\alpha, k)$ и Π_1^1-формулу $\psi(\alpha, k)$, обе с единственным параметром π, так, чтобы выполнялось соотношение

$$\forall\alpha\forall k(\alpha\in C_{q_k}\leftrightarrow\varphi(\alpha, k)\leftrightarrow\psi(\alpha, k)). \tag{7}$$

Положим $\lambda=\omega_{\rho+1}^{L[\pi]}$ и зафиксируем Seq_λ-генерическое над V (т. е. над универсумом, в котором доказывается теорема В) множество $G\subseteq\mathrm{Seq}_\lambda$ (см. доказательство леммы 3 в § 7). Введем аналог $C^\#$ решета C в модели $V[G]$, полагая

$$C^\#_{q_k}=\{\alpha\colon\varphi(\alpha, k)\}=\{\alpha\colon\psi(\alpha, k)\}$$

в $V[G]$ для каждого k (корректность определения обеспечивается выполнением (7) в универсуме V и принципом Шенфилда § 4).

Определим $\omega_1^\#=\omega_1^{V[G]}$. Для получения искомого противоречия достаточно проверить, что решето $C^\#$ имеет в $V[G]$ то же самое свойство, что и решето C в V, т. е. что все конституанты $[C^\#]_\nu$, $\nu<\omega_1^\#$, непусты и попарно $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-отделимы одна от другой. Действительно, если это свойство решета C доказано, то по лемме 5 § 8 конституанты $[C^\#]_\nu$ (построенные в $V[G]$) образуют в $V[G]$ несчетное семейство непустых попарно $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-отделимых множеств класса $\Sigma_1^{HC}(\omega_1\cup\{\pi\})$, ввиду чего $\omega_{\rho+1}^{L[\pi]}\geqslant\geqslant\omega_1^\#$ согласно следствию 1 § 7. Однако, по определению λ и выбору G выполняется как раз обратное неравенство $\omega_{\rho+1}^{L[\pi]}=\lambda<\omega_1^\#$.

Доказательство указанного свойства решета $C^\#$ в $V[G]$ состоит в выражении этого свойства посредством специальной Π_2^1-формулы с параметрами из V, истинность которой в $V[G]$ мы получим с помощью принципа Шенфилда. Прежде всего, найдется Σ_1^1-формула $\Phi(\gamma, \alpha)$ с параметром π такая, что в универсуме V истинно утверждение

$$\forall\alpha\forall\gamma\in WO(\alpha\in[C]_{\mathrm{otp}(\gamma)}\leftrightarrow\Phi(\gamma, \alpha)),$$

а в $V[G]$ истинно аналогичное утверждение для решета $C^\#$. (Именно, можно взять, например, Σ_1^1-формулу, каноническим образом выражающую существование порядкового изоморфизма множеств C/α и Q_γ, вхождение C/α в которую элиминируется посредством введенных выше формул φ и ψ. О построении такого рода формул см. [22, § 2].) Согласно теореме 1 § 6, найдется Π_1^1-формула $\theta(\gamma_1, \gamma_2)$ с параметрами из V, выражающая в V и в $V[G]$ утверждение о $\mathbf{\Pi}^0_{1+\rho}$-отделимости множества $\{\alpha\colon\Phi(\gamma_1, \alpha)\}$ от множества $\{\alpha\colon\Phi(\gamma_2, \alpha)\}$. Теперь следующее Π_2^1-предложение

$$\forall\gamma(\mathrm{wo}(\gamma)\to\exists\alpha\Phi(\gamma, \alpha))\wedge$$

$$\wedge\forall\gamma_1\forall\gamma_2(\mathrm{wo}(\gamma_1)\wedge\mathrm{wo}(\gamma_2)\wedge\neg\mathrm{eq}(\gamma_1, \gamma_2)\to\theta(\gamma_1, \gamma_2))$$

с параметрами из V (о формулах wo и eq см. доказательство леммы 3 § 7) эквивалентно в V утверждению о непустоте и попарной $\Pi^0_{1+\rho}$-отделимости всех конституант $[C]_\nu$, $\nu<\omega_1$, и эквивалентно в $V[G]$ аналогичному утверждению о конституантах $[C^\#]_\nu$, где $\nu<\omega_1^\#$, решета $C^\#$.

Но записанное предложение истинно в V по выбору решета C. Следовательно, оно будет истинным и в $V[G]$ по принципу абсолютности Шенфилда § 4, что и требовалось.

Вывод противоречия из утверждения о существовании решета вида [101, IV]$_*$ отличается от предыдущего рассуждения только тем, что нужно выражать Π_2^1-формулой (доказывая истинность в $V[G]$ не утверждение непустоты всех $[C^\#]_\nu$, а утверждение о несчетности числа всех непустых внутренних конституант $[C^\#]_{*\nu}$ (при условии, что это утверждение для решета C выполнено в V). Чтобы построить требуемую Π_2^1-формулу, введем Π_1^1-формулу $\Psi(\alpha)$ с параметром π, каноническим образом выражающую полную упорядоченность множества C/α в V, или множества $C^\#/\alpha$ в $V[G]$, и Σ_1^1-формулу $\Phi^*(\gamma, \alpha)$ с параметром π, каноническим образом выражающую существование порядкового изоморфизма множества Q_γ на некоторый начальный сегмент множества C/α (или множества $C^\#/\alpha$). Таким образом, в универсуме V истинны соотношения

$$\forall\alpha(\alpha\in[C]_*\leftrightarrow\neg\Psi(\alpha)) \text{ и } \forall\alpha\forall\gamma\in WO(\alpha\in\bigcup_{\nu>\mathrm{otp}(\gamma)}[C]_{*\nu}\leftrightarrow\neg\Psi(\alpha)\wedge\Phi^*(\gamma,\alpha)),$$

а в $V[G]$ истинны аналогичные соотношения для решета $C^\#$. Теперь искомая Π_2^1-формула может быть записана так:

$$\forall\gamma(\mathrm{wo}(\gamma)\to\exists\alpha(\neg\Psi(\alpha)\wedge\Phi^*(\gamma,\alpha))).$$

Наконец, для того, чтобы вывести противоречие из утверждения о существовании решета, удовлетворяющего требованиям [101, IV]$_+$, достаточно показать, что такое решето, если бы оно существовало, должно было бы удовлетворять также и [101, IV]$_*$, чего не может быть в силу только что проведенного рассуждения. В свою очередь, для доказательства импликации [101, IV]$_+\to$[101, IV]$_*$ достаточно убедиться что если борелевское решето C имеет несчетно много непустых внешних конституант, то число непустых внутренних конституант $[C]_{*\nu}$ также будет несчетным.

Докажем это. Если $[C]_\nu\neq\varnothing$ для несчетно многих индексов ν, то согласно упомянутому в § 1 критерию множество $[C]$ будет неборелевским. Его дополнение $[C]_*=\mathcal{N}-[C]$ также, естественно, не будет борелевским. Однако $[C]_*$ совпадает с объединением всех внутренних конституант $[C]_{*\nu}$, а каждая из последних — борелевское множество (см. ссылку в § 1). Отсюда искомое очевидно.

Литература

1. *Lusin N.* Sur les voies de la theorie des ensembles.— Atti del Congresso internationale dei matematici, 3—10 settembre, Bologna, 1929, t. 1, p. 295—299. (Русский перевод: О путях развития теории множеств. В кн. [9] с. 464—469.)
2. *Lusin N.* Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications. Paris: Gauthiers—Villars, 1930. (Русский перевод: Лекции об аналитических множествах и их приложениях. В кн. [9] с. 9—269.)
3. *Lusin N.* Sur une famille des complementaires analytiques.— Fund. math., 1931, v. 17, p. 4—7. (Русский перевод: Об одном семействе аналитических дополнений. В кн. [9] с. 624—626.)
4. *Lusin N.* Sur les classes des constituantes des complementaires analytiques.— Ann. r. scuola norm. super. Pisa, ser. 2, 1933, t. 2, fasc. 3, p. 269—282. (Русский перевод: О классах конституант аналитических дополнений. В кн. [9] с. 627—641.)

5. *Лузин Н. Н.* О стационарных последовательностях.— Труды физ.-матем. ин-та, отд. матем., 1934, т. 5, с. 125—147. (В кн. [9] с. 642—661.)
6. *Лузин Н. Н.* О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций. М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1935. (В кн. [9] с. 552—616.)
7. *Lusin N.* Sur les ensembles analytiques nuls.— Fund. math., 1935, v. 25, p. 109—131. (Русский перевод: О пустых аналитических множествах. В кн. [9] с. 662—682.)
8. *Лузин Н. Н.* О частях натурального ряда.— Изв. АН СССР. Серия матем., 1947, т. 11, № 5, с. 403—410. (В кн. [9] с. 714—722.)
9. *Лузин Н. Н.* Собр. соч., т. 2, М.: Изд-во АН СССР, 1958.
10. *Новиков П. С.* О взаимоотношении второго класса проективных множеств и проекций униформных аналитических дополнений.— Изв. АН СССР. Серия матем., 1937, т. 1, № 2, с. 231—252.
11. *Новиков П. С.* О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств.— Труды МИАН, 1951, т. 38, с. 279—316.
12. *Новиков П. С., Ляпунов А. А.* Дескриптивная теория множеств.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет. М.-Л.: Гостехиздат, 1948, с. 243—255.
13. *Новиков П. С., Келдыш Л. В.* Работы Лузина в области дескриптивной теории множеств.— УМН, 1953, т. 8, вып. 2, с. 93—104.
14. *Келдыш Л. В.* Верхние оценки для классов конституант аналитических дополнений.— Изв. АН СССР. Серия матем., 1937, т. 1, с. 265—284.
15. *Келдыш Л. В.* Идеи Н. Н. Лузина в дескриптивной теории множеств.— УМН, 1974, т. 29, вып. 5, с. 183—196.
16. *Ляпунов А. А.* О некоторых униформных аналитических дополнениях.— Изв. АН СССР. Серия матем., 1937, т. 1, с. 285—305.
17. *Куратовский К.* Топология, т. 1. М.: Мир, 1966.
18. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
19. Справочная книга по математической логике. Часть II: теория множеств. М.: Наука, 1982.
20. *Успенский В. А., Кановей В. Г.* Проблемы Лузина о конституантах и их судьба.— Вестн. МГУ. Серия матем., мех., 1983, № 6, с. 73—87.
21. *Кановей В. Г.* О несчетных последовательностях множеств, даваемых операцией решета.— ДАН СССР, 1981, т. 257, № 4, с. 808—812.
22. *Кановей В. Г.* О структуре конституант Π_1^1-множеств.— Сиб. матем. журн., 1983, т. 24, № 2, с. 56—76.
23. *Шенфилд Дж.* Математическая логика. М.: Наука, 1975.
24. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
25. *Любецкий В. А.* Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел.— ДАН СССР, 1968, т. 182, № 4, с. 758—759.
26. *Levy A.* Definability in axiomatic set theory, II.— In: Mathematical logic and foundations of set theory. Amst.: North Holland, 1970, p. 129—145.
27. *Solovay R. M.* On the cardinality of Σ_2^1 sets of reals.— In: Foundations of mathematics. Berlin: Springer — Verlag, 1969, p. 58—73.
28. *Solovay R. M.* A model of set theory in which every set of reals is Lebesque measurable.— Ann. of math., 1970, v. 92, № 1, p. 1—56.
29. *Martin D. A.* Borel determinacy.— Ann. of math., 1975, v. 102, № 2, p. 363—371.
30. *Stern J.* Suites transfines d'ensembles Boreliennes.— C. r. Acad. sci. Paris, ser. A, 1979, t. 288, № 10, p. 527—529.
31. *Stern J.* Effective partitions of the real line into Borel sets of bounded rank.— Ann. of math. logic, 1980, v. 18, № 1, p. 29—60.
32. *Louveau A.* A separation theorem for Σ_1^1 sets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 260, № 2, p. 363—378.
33. *Hausdorff F.* Summen von $\aleph_1$ Mengen.— Fund. math., 1936, v. 26, S. 241—255.
34. *Selivanovski E. A.* Sur les proprietes des constituantes ensembles analytiques.— Fund. math., 1933, v. 21, p. 20—28.

Московский институт
инженеров железнодорожного
транспорта

Поступила в редакцию
20.XII.1982 и 10.I.1984