УДК 510.225+517.518.112

В. Г. Кановей, Т. Линтон, В. А. Успенский

Игровой подход к мере Лебега

Дана характеризация лебеговой меры множеств в терминах существования тех или иных стратегий в определенной игре, связанной с бросанием монеты. Исследованы "рациональная" и "дискретная" модификации этой игры. Доказано, что если один из участников имеет выигрывающую стратегию в одной из игр этого типа, зависящей от данного множества $P \subseteq [0,1]$, то это множество измеримо.

Библиография: 11 названий.

Введение

Простейшая игра, связанная с метанием монеты, состоит в том, что игрок делает ставку на выпадение орла или решки (вероятность каждого из этих событий считается равной $1/2$), и если игрок угадывает, то он возвращает свою ставку и дополнительно получает равную ей сумму, а в противном случае ставка теряется. Теория мартингалов доказывает, что в такой игре нет выигрывающей стратегии, т.е. такой стратегии ставок, которая дает гарантированный выигрыш за конечное время [1]. Точнее говоря, после любого фиксированного числа n шагов игры математическое ожидание выигрыша равно нулю вне зависимости от того, какая стратегия ставок используется.

Рассматриваемая в данной статье игра имеет два отличия от этой простейшей игры. Во-первых, мы придадим казино более активную роль произвольного выбора орла либо решки для каждого очередного метания монеты. И казино будет принимать свое решение, зная ставку игрока. Чтобы компенсировать это преимущество, мы разрешим игру с бесконечным числом шагов и заставим казино играть так, чтобы бесконечная последовательность результатов метания принадлежала заранее заданному множеству.

Пространство $\mathbb{D} = \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ можно оснастить счетной степенью бернуллиевской вероятностной меры на множестве $-1,1$, приписывающей значение $1/2$ обеим точкам. Хорошо известно, что тогда лебегова мера произвольного множества $P \subseteq \mathbb{D}$ равна вероятности того, что бесконечное число независимых бросаний монеты даст последовательность из P. (Орел отождествляется с 1, а решка с -1.) Таким образом, локальное случайное событие выпадения орла либо решки заменяется глобальным случайным событием того, что последовательность метаний принадлежит множеству P.

В § 1 дается точное определение этой игры и связанных с ней понятий. Затем в § 2 рассматриваются две ключевые стратегии участников этой игры. В § 3 содержится анализ случая, когда заданное множество P имеет нулевую меру. Случай множества положительной меры рассмотрен с точки зрения игрока

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (у первого автора – гранты №№ 06-01-00608, 07-01-00445, у третьего автора – грант № 06-01-00608).

в § 4, а с точки зрения казино – в § 5. В этих параграфах даются оценки верхней и нижней мер данного множества P в терминах существования определенных стратегий в указанной игре; эти оценки принадлежат к основным результатам нашей статьи. Эти оценки могут представлять интерес и для заведомо измеримых множеств P, когда нет нужды различать верхние и нижние меры.

Две модификации указанной игры рассмотрены в § 6 и § 7. Первая состоит в том, что разрешено делать только ставки, выраженные рациональными (а не произвольными вещественными) числами. Мы используем ее для того, чтобы получить альтернативное доказательство измеримости множеств по Лебегу в предположении аксиомы детерминированности, так что рассматриваемая игра связана и с теоретико-множественным вопросом об измеримости/неизмеримости множеств по Лебегу. Вторая, "дискретная" модификация состоит в том, что ставки должны быть целыми кратными некоторого фиксированного числа, что ближе к настоящим играм в казино (где ставки обычно возможны лишь в целом числе долларов). Как мы увидим, такое изменение вносит определенное преимущество для казино.

Мы используем символ $\mathbb{R}$ для обозначения вещественных чисел, $\mathbb{N}$ для натуральных чисел (включая 0) и $\mathbb{D} = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ для обозначения канторова множества всех бесконечных диадических последовательностей с членами -1 и 1 с обычной топологией произведения. Через $\mathbf{S} = \{-1, 1\}^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{-1, 1\}^n$ обозначается множество всех конечных последовательностей из -1 и 1, а $s^\frown t$ для $s, t \in \mathbf{S}$ является конкатенацией s и t, т.е. члены t следуют за членами s с сохранением порядка в обеих группах. Далее, $s \subset t$ обозначает, что s – собственный начальный сегмент последовательности t, а $s \subseteq t$ разрешает s и t совпадать. *Длиной* $\operatorname{lh} s$ конечной последовательности s называется то единственное число $n \in \mathbb{N}$, для которого $s \in \{-1, 1\}^n$. Если последовательность $\vec{x}$ бесконечна либо конечна, но длины не меньше n, то $\vec{x} \upharpoonright n = \langle x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\rangle$ обозначает начальный сегмент $\vec{x}$ длины n. Базис открыто-замкнутых множеств для $\mathbb{D}$ образован бэровскими интервалами $\mathbb{D}_s = \{\vec{x} \in \mathbb{D} : s \subset \vec{x}\}$; $\mathbb{D}_s$ состоит из всех бесконечных продолжений $\vec{x} \in \mathbb{D}$ конечной последовательности $s \in \mathbf{S}$. Лебегова мера на $\mathbb{D}$ (однородная вероятностная мера произведения) обозначается через λ.

§ 1. Модификация стандартной игры бросания монеты

Описанная здесь игра возникла из анализа еще одной игры, связанной с бросанием монеты и использованной в статье [2] в качестве основы для одного определения понятия бесконечной последовательности, случайной в смысле теории алгоритмов. (Более популярное изложение связанных с этим вопросов см. в [3].)

Типичная игра, связанная с бросанием монеты, состоит в том, что игрок делает ставку на выпадание орла или решки. Если это происходит один раз для каждого натурального числа $n \in \mathbb{N}$, то результаты образуют последовательность $\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ чисел $p_n = 1$ (орел) или $p_n = -1$ (решка), т.е. элемент множества $\mathbb{D}$. Наша модификация вводит второго участника, роль которого состоит в выборе членов последовательности $\langle p_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ одного за другим, причем требуется, чтобы последовательность принадлежала заданному множеству $P \subseteq \mathbb{D}$. Итак, в игре участвуют два участника, которых мы будем идентифицировать как Игрок и Казино. Перед началом игры фиксируется непустое множество $P \subseteq \mathbb{D}$. Мы считаем, что Игрок вступает в игру с начальным капиталом $B_0 = 1$ доллар. Каждому натуральному n соответствует один раунд игры, в ходе которого Игрок делает ставку b_n (вещественное число, по абсолютной величине не превосходящее текущего значения капитала B_n), а затем, зная значение b_n, Казино выбирает $p_n = 1$ либо $p_n = -1$, и капитал Игрока принимает новое значение

$$B_{n+1} = B_n + p_n b_n.$$

Таким образом, отрицательная ставка b_n Игрока является ставкой на то, что Казино будет делать ход $p_n = -1$, а положительная ставка b_n Игрока есть ставка на то, что Казино будет делать ход $p_n = 1$, поскольку эти две ситуации приводят к увеличению капитала Игрока. В ходе игры Казино производит бесконечную последовательность ходов $\vec{p} = \langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{D}$ ($p_n = \pm 1$ – это n-й ход Казино), а Игрок производит последовательность ходов $\vec{b} = \langle b_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}}[-B_n, B_n] \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, где B_n является капиталом Игрока на начало n-го раунда. Итак, ходы в этой игре происходят в такой последовательности:

$$b_0, p_0, b_1, p_1, \ldots, b_n, p_n, \ldots,$$

и каждый из участников перед очередным своим ходом имеет полную информацию обо всех предыдущих ходах. В частности, делая очередной ход p_n, Казино знает значение b_n. А чтобы сделать игру нетривиальной, мы требуем, чтобы последовательность ходов $\vec{p} = \langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ Казино принадлежала заданному множеству P. Эта игра будет обозначаться через $\Gamma(P)$.

Исход этой игры (т.е. решение, кто из участников выиграл партию после того, как сделана вся бесконечная последовательность ходов) прямо не определяется. Дело в том, что наши результаты об играх вида $\Gamma(P)$ будут формулироваться в терминах наличия стратегии у одного из участников, которая гарантирует то или иное соотношение между пределом либо супремумом значений капитала и величиной, обратной к мере $\lambda(P)$ данного множества P. Однако дело обстоит так, что ни одно соотношение такого вида не охватывает сразу все относящиеся к этой игре результаты. Поэтому и невозможно дать одно определение победителя. Общей же целью Игрока является увеличение текущих значений капитала B_n (или чтобы последовательность $\vec{p} = \langle p_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ ходов Казино не принадлежала множеству P). Соответственно, общей целью Казино является уменьшение значений B_n (а также возможность остаться в P).

Вот один из вариантов игры $\Gamma(P)$, который уже содержит определение победителя. Зададим с самого начала вместе с множеством P еще и неотрицательное вещественное число $H \geqslant 0$, которое также может принять значение ∞. Как правило, H будет близким к значению $1/\lambda(P)$. Игра $\Gamma(P, H)$ определяется как игра $\Gamma(P)$, уточненная определением, что Игрок выигрывает партию в $\Gamma(P, H)$, когда выполнено одно из следующих двух условий:

1) $\vec{p} \notin P$;
2) $\vec{p} \in P \;\; \forall n \in \mathbb{N}\ (|b_n| \leqslant B_n)$, и дополнительно
   (a) $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n > H$, когда $H < \infty$,
   (b) $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \infty$, когда $H = \infty$.

Если мы скажем, что Казино “жульничает” когда $\vec{p} \notin P$, а Игрок “жульничает”, делая ставку, превышающую его текущий капитал, то данное определение победителя предусматривает, что Игрок побеждает, в частности, когда “жульничает” одно Казино либо “жульничают” сразу оба участника. Понятно, что никакой из двух участников не может вынудить соперника “жульничать”, а потому мы будем предполагать ниже, что всегда имеет место ситуация 2).

А в этом случае 2),(a) и 2),(b) дают определение победителя в случае, когда значение H конечно или, соответственно, бесконечно.

С интуитивной точки зрения Игрок начинает игру с капиталом в 1 доллар и делает последовательность ставок на событие $\vec{p} \in P$ вероятности $\lambda(P)$ (когда множество P измеримо по Лебегу). Поэтому мы можем ожидать, что Игрок в состоянии увеличить стартовый капитал до величины $1/\lambda(P)$. С другой стороны, если P имеет меру 0, но является плотным множеством, то сразу не понятно, как Игрок может неограниченно увеличить свой капитал в ходе игры. Как мы увидим, это все же возможно.

Определим теперь понятие стратегии для обоих участников. Вообще, стратегией для игр такого типа называется закон, который на основании всех предшествующих ходов указывает следующий ход данного участника. Например, перед очередным ходом Игрока предшествующие ходы игры (если это не начальный ход) дают:

- текущий капитал $B_n = B_0 + \sum_{i=0}^{n-1} p_i b_i \in \mathbb{R} \cap [0, \infty)$;
- последовательность $\vec{b} \restriction n = \langle b_0, b_1, \dots, b_{n-1} \rangle \in \mathbb{R}^n$ ставок Игрока;
- последовательность $\vec{p} \restriction n = \langle p_0, \dots, p_{n-1} \rangle \in \{-1, 1\}^n$ ходов Казино;

и стратегия Казино должна определить по этим значениям очередной ход $b_n \in [-B_n, B_n]$. Таким образом, множество стратегий Игрока состоит из всех функций

$$\sigma \colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \times \{-1, 1\})^{<\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$$

таких, что для любых $n \in \mathbb{N}$ и B имеем $-B \leqslant \sigma(B, \langle \vec{b} \restriction n, \vec{p} \restriction n \rangle) \leqslant B$.

А перед очередным ходом Казино мы всегда знаем:

- текущий капитал $B_n \in \mathbb{R} \cap [0, \infty)$;
- последовательность $\vec{b} \restriction n+1 = \langle b_0, \dots, b_{n-1}, b_n \rangle \in \mathbb{R}^{n+1}$ ставок Игрока;
- последовательность $\vec{p} \restriction n = \langle p_0, \dots, p_{n-1} \rangle \in \{-1, 1\}^n$ ходов Казино;

и стратегия должна определить по этим значениям очередной ход $p_n = \pm 1$. Таким образом, множество стратегий Казино состоит из всех функций

$$\tau \colon \mathbb{R} \times \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{R}^{n+1} \times \{-1, 1\}^n \right) \to \{-1, 1\}.$$

На самом деле значение B_n вполне определено, коль скоро мы знаем $\vec{b} \restriction n$ и $\vec{p} \restriction n$, так что включать значение капитала в область определения стратегий не обязательно. Однако все рассматриваемые ниже стратегии зависят только от B_n и $\vec{p} \restriction n$, так что для этой статьи, наоборот, включение $\vec{b} \restriction n$ в область определения стратегий не обязательно.

Заметим, что в данное определение стратегий Игрока встроено требование, что Игрок не “жульничает”, т.е. не делает ставок, превосходящих значение текущего капитала. Однако для стратегий Казино придется дать дополнительное уточняющее определение. Скажем, что стратегия τ для Казино *допустима*, если для любой последовательности $\vec{b}$ допустимых ставок Игрока Казино, играя по стратегии τ, получает $\vec{p} \in P$.

Мы говорим, что Игрок *следует стратегии* σ, если каждый его ход b_n определяется через $b_n = \sigma\big(B_n, \langle \langle b_0, \dots, b_{n-1} \rangle, \langle p_0, \dots, p_{n-1} \rangle \rangle\big)$. Аналогично, Казино *следует стратегии* τ, если каждый его ход p_n определяется через $p_n = \tau\big(B_n, \langle \langle b_0, \dots, b_n \rangle, \langle p_0, \dots, p_{n-1} \rangle \rangle\big)$.

Пример 1. Возьмем в качестве P счетное плотное множество

$$P_1 = \{\vec{p} \in \mathbb{D} : \exists\, N\ \forall\, n \geqslant N\ (p_n = 1)\}.$$

Тогда в игре $\Gamma(P_1)$ Игрок может неограниченно увеличивать начальный капитал. А именно, в этом случае стратегия Игрока, заданная через $b_n = B_n/2$, влечет $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$ и, следовательно, выигрыш в игре $\Gamma(P_1, \infty)$. В самом деле, поскольку $B_n > 0$ для всех n и поскольку Казино должно играть так, чтобы выполнить условие $\vec{p} \in P_1$, то указанная стратегия приносит Игроку выигрыш на ко-конечном множестве ходов – именно, на всех раундах, начиная с того номера N, после которого $\vec{p}$ становится константой 1, поскольку

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \frac{B_N}{2} + \frac{B_N}{2} + \frac{B_N}{2} + \cdots = \infty.$$

Мы можем выразить смысл этого примера так: Игрок имеет стратегию в игре $\Gamma(P_1)$, гарантирующую $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$. Точнее говоря, Игрок имеет такую вполне определенную стратегию σ, что для каждого $\vec{p} \in P_1$, если Игрок следует стратегии σ, а Казино делает последовательность ходов $\vec{p} \in P_1$, то значения текущего капитала стремятся к бесконечности. Эта терминология будет использоваться для формулировки наших результатов ниже. Например, утверждение, что Казино имеет стратегию (в игре $\Gamma(P)$), которая гарантирует $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n < 1/\lambda(P)$, означает, что существует стратегия τ для Казино такая, что если Игрок делает допустимые ставки (т.е. $|b_n| \leqslant B_n$), то, следуя стратегии τ, Казино получает последовательность $\vec{p} \in P$, для которой выполнено следующее: найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $B_n \leqslant 1/\lambda(P) - \varepsilon$ для всех n.

Для игр вида $\Gamma(P, H)$ мы говорим, что Игрок *выигрывает* $\Gamma(P, H)$, когда Игрок имеет выигрывающую стратегию, т.е. такую стратегию, которая гарантирует $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n > H$ (или $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \infty$, если $H = \infty$). Мы говорим, что Казино *выигрывает* $\Gamma(P, H)$, когда Казино имеет стратегию, гарантирующую $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n \leqslant H$ (или $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n < \infty$, если $H = \infty$).

Здесь следует отметить, что если Казино имеет стратегию, гарантирующую, что предел последовательности текущих капиталов – в определенном смысле малое число, то та же стратегия гарантирует, что и супремум текущего капитала в равной степени мал: в самом деле, Игрок может играть нулевыми ставками, сохраняющими уже достигнутый капитал. А когда мы говорим, что один из участников имеет стратегию, гарантирующую определенное равенство или неравенство, включающее $\lim_{n\to\infty} B_n$, это должно пониматься в том смысле, что стратегия гарантирует существование предела (и это равенство или неравенство для него).

§ 2. Две ключевые стратегии

Здесь мы определим две специальные стратегии Игрока и Казино, которые играют центральную роль в рассматриваемой игре. Идея состоит в том, чтобы определить такую ставку для Игрока, что после ответа Казино позиция Игрока в партии не становится хуже, чем была до начала этого раунда. Вообще, *позиция* в этой игре перед очередным ходом Игрока определена текущим значением капитала $B = B_n$ и начальным сегментом $s = \vec{p} \restriction n = \langle p_0, \ldots, p_{n-1} \rangle$ бесконечной последовательности $\vec{p}$ ходов Казино. Для $s \in \mathbf{S}$ через $\lambda_s(P)$ обозначим относительную меру множества P в $\mathbb{D}_s$:

$$\lambda_s(P) = \frac{\lambda(P \cap \mathbb{D}_s)}{\lambda(\mathbb{D}_s)} = \lambda(P \cap \mathbb{D}_s)\, 2^{\operatorname{lh} s} \in [0,1] \cap \mathbb{R}.$$

Разумно будет определить *качество* позиции $\langle B, s\rangle$ равным дроби $B/\lambda_s(P)$ (во всяком случае, когда множество P измеримо). Причиной такого определения является то, что в этой позиции Игрок имеет капитал B долларов для ставок на событие вероятности $\lambda_s(P)$, а потому как возрастание B, так и убывание $\lambda_s(P)$ (последнее делает ходы Казино более предсказуемыми) улучшает шансы Игрока. Мы приходим к такому определению.

Определение 2. Для $s \in \mathbf{S}$, $B \in \mathbb{R}$ и $P \subseteq \mathbb{D}$ определим *P-качество*

$$Q_s^B(P) = \frac{B}{\lambda_s(P)} = \frac{B}{\lambda(P \cap \mathbb{D}_s) 2^{\operatorname{lh} s}}$$

позиции $\langle B, s\rangle$, где λ обозначает лебегову меру в случае, когда P измеримо, а иначе – верхнюю лебегову меру.

Понятно, что качество позиции всегда больше или равно величине текущего капитала. Находясь в позиции $\langle B, s\rangle$, можно определить две возможные величины качества позиции после очередного раунда. Если ставка Игрока равна b и Казино делает ход $p_n = -1$, то это приводит к значению качества

$$q_{-1}(b) = \frac{B-b}{\lambda_{s^\frown(-1)}(P)}\,,$$

а ход $p_n = 1$ Казино приводит к качеству

$$q_1(b) = \frac{B+b}{\lambda_{s^\frown 1}(P)}\,.$$

В случае, когда ни одна из двух относительных мер множества P не равна нулю, мы используем тот факт, что $2\lambda_s(P) = \lambda_{s^\frown 1}(P) + \lambda_{s^\frown(-1)}(P)$, чтобы найти единственную величину ставки

$$b^* = B\frac{\lambda_{s^\frown 1}(P) - \lambda_{s^\frown(-1)}(P)}{\lambda_{s^\frown 1}(P) + \lambda_{s^\frown(-1)}(P)}\,,$$

которая дает $q_{-1}(b^*) = q_1(b^*) = Q_s^B(P)$ и потому сохраняет качество позиции независимо от ответа Казино. Любая иная ставка $b \in [-B, B]$ приводит к тому, что одна из двух величин качества $q_i(b)$ станет строго меньше, чем качество Q_s^B исходной позиции (а другая величина $q_{-i}(b)$ – соответственно строго больше Q_s^B). Это явление иллюстрируется на рис. 1, где мы предполагаем, что $\lambda_{s^\frown 1}(P) > \lambda_{s^\frown(-1)}(P)$.

Таким образом, если обе относительные меры положительны, то Игрок всегда может сделать допустимую ставку $b_n = b^*$, так что качество новой позиции будет в точности равно качеству исходной позиции. Если же одна из относительных мер равна нулю, то возможности Игрока не столь велики, и мы увидим ниже, что Игрок может быть вынужден пойти на некоторое ухудшение качества позиции. Эта стратегия заслуживает специального названия.

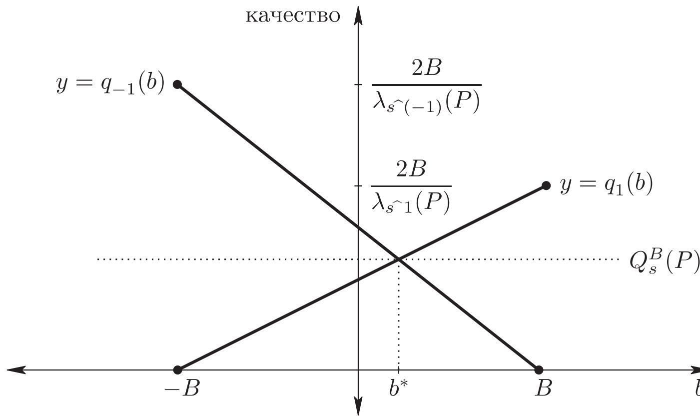

Рис. 1

Определение 3. Для любого измеримого множества $G \subseteq \mathbb{D}$ та стратегия для Игрока в игре $\Gamma(P)$, которая определена как

$$b_n = b_n^* = B_n \frac{\lambda_{(\vec{p}\upharpoonright n)^\frown 1}(G) - \lambda_{(\vec{p}\upharpoonright n)^\frown(-1)}(G)}{\lambda_{(\vec{p}\upharpoonright n)^\frown 1}(G) + \lambda_{(\vec{p}\upharpoonright n)^\frown(-1)}(G)}\,,$$

называется *стратегией сохранения G-качества* и обозначается σ_G.

Множество G в этом определении нужно понимать как аппроксимацию того множества P, которое определяет игру. Те стратегии Игрока, которые мы будем рассматривать для игр вида $\Gamma(P)$, будут комбинациями стратегий сохранения G-качества для подходящих аппроксимаций G множества P, но, как правило, сама стратегия сохранения P-качества использована не будет. Заметим, что σ_G зависит только от последовательности $\vec{p} \upharpoonright n$ предшествующих ходов Казино, а также, конечно, от текущего капитала B_n. При этом Игрок может свободно переключиться в ходе игры со стратегии σ_G на какую-то другую стратегию $\sigma_{G'}$, а затем при необходимости вернуться к σ_G или перейти к $\sigma_{G''}$ для еще одной аппроксимации G'' и т.д.

Единственная проблема со стратегиями сохранения качества состоит в том, что они работают плохо в позициях $\langle B, s\rangle$ таких, что либо $\lambda_{s^\frown 1}(G)$, либо $\lambda_{s^\frown(-1)}(G) = 0$. По определению стратегия σ_G ставит весь текущий капитал на противоположное событие. Например, предположим, что на шаге n выполнено $\lambda_{(\vec{p}\upharpoonright n)^\frown 1}(G) = 0$, но $P \cap \mathbb{D}_{(\vec{p}\upharpoonright n)^\frown 1} \neq \varnothing$. Тогда стратегия σ_G предлагает Игроку ход $b_n = -B_n$, т.е. ставку в размере всего текущего капитала на то, что Казино сделает ход $p_n = -1$. Теперь Казино может пойти $p_n = 1$, собрать все деньги Игрока и в сущности закончить игру, оставив Игрока с нулевым капиталом и с невозможностью делать ненулевые ставки. (Все последующие ходы Казино может делать с единственной целью, чтобы в ходе игры было выполнено $\vec{p} \in P \cap \mathbb{D}_{(\vec{p}\upharpoonright n)^\frown 1}$, что возможно, поскольку предполагалось $P \cap \mathbb{D}_{(\vec{p}\upharpoonright n)^\frown 1} \neq \varnothing$.) Впрочем, если G – открытое множество, включающее P, то такая ситуация, очевидно, не может случиться.

С качеством позиции связана и ключевая стратегия для Казино. Ее идея состоит в следующем. Любая стратегия τ для Казино должна по крайней мере сохранять шанс остаться внутри множества P. Поэтому если в какой-то момент мы имеем $P \cap \mathbb{D}_{(\vec{p}\restriction n)^\frown i} = \varnothing$, то стратегия τ должна предложить ход $p_n = -i$. (Кстати, в такой позиции Игрок может смело ставить все на ход $p_n = -i$.) Если оба продолжения $(\vec{p} \restriction n)^\frown i$, $i = \pm 1$, дают положительные относительные меры для P и Игрок делает свой ход, следуя стратегии сохранения P-качества, то Казино может ответить ходом b_n, равным 1 или -1, с равным эффектом. Если оба продолжения дают положительные относительные меры для P, но Игрок делает ход, отличный от сохраняющего P-качество, то Казино может сыграть так, что P-качество позиции уменьшится.

Определение 4. Для любого измеримого по Лебегу множества $F \subseteq \mathbb{D}$ та стратегия Казино, которая предлагает ход $p_n = 1$, когда выполняется один из следующих случаев:

1) $\lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown(-1)}(F) = 0$;
2) ход b_n сохраняет F-качество и $\lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown 1}(F) \geqslant \lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown(-1)}(F)$;
3) ход b_n не сохраняет F-качества и

$$\frac{B_n + b_n}{\lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown 1}(F)} < \frac{B_n - b_n}{\lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown(-1)}(F)}\,;$$

и ход $p_n = -1$ во всех остальных случаях, будет называться *стратегией снижения F-качества* для Казино и будет обозначена через τ_F.

Можно заметить, что τ_F снижает F-качество в случае, когда предшествующий ход Игрока не является сохраняющим F-качество в том смысле, о котором говорилось выше. Опять-таки Казино может свободно переходить от стратегии типа τ_F к стратегии $\tau_{F'}$ для другого подходящего множества F' и вообще менять стратегии бесконечное число раз. Кстати, если $F \subseteq P$ – замкнутое множество, то стратегия τ_F является допустимой в том смысле, что она гарантирует $\vec{p} \in F$, поскольку каждый ход p_n согласно τ_F делается так, чтобы было $F \cap \mathbb{D}_{s^\frown p_n} \neq \varnothing$, так что $\vec{p} \in F$, ибо множество F замкнуто.

Чтобы показать взаимодействие этих стратегий, рассмотрим еще один пример, где, как ни странно, σ_P не будет лучшей стратегией Игрока.

Пример 5. Для $n \in \mathbb{N}$ через $s_n = \langle (-1)^{2n+1}, 1 \rangle$ обозначается конечная последовательность из $2n+1$ членов -1, за которыми следует один член 1. Пусть $-\vec{1}$ – бесконечная последовательность, состоящая только из членов -1. Множество $P = \langle -\vec{1} \rangle \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{D}_{s_n}$ замкнуто и имеет меру $1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots = 1/3$. Покажем, что Казино имеет допустимую стратегию τ в игре $\Gamma(P)$, гарантирующую $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n < 1/\lambda(P) = 3$.

В начальный момент игры мы имеем качество позиции $\frac{1}{1/3} = 3$, а также $\lambda_{\langle 1 \rangle}(P) = 0$ и $\lambda_{\langle -1 \rangle}(P) = 2/3$. Понятно, что Казино должно делать ход $p_0 = -1$, поскольку иначе $\vec{p} \notin P$. Соответственно, стратегия σ_P предлагает ход

$$b_0^* = B_0 \frac{\lambda_{\langle 1 \rangle}(P) - \lambda_{\langle -1 \rangle}(P)}{\lambda_{\langle 1 \rangle}(P) + \lambda_{\langle -1 \rangle}(P)} = 1 \cdot \frac{0 - 2/3}{0 + 2/3} = -1$$

(т.е. ставку всего начального капитала $B_0 = 1$ на ход $p_n = -1$). Искомая стратегия τ для Казино предлагает $p_0 = -1$, и новое значение капитала есть $B_1 = 1 - b_0 \leqslant 2$.

Если Игрок в самом деле сыграл $b_0 = -1$ по стратегии σ_P, то P-качество позиции остается равным

$$\frac{B_1}{\lambda_{\langle -1 \rangle}(P)} = \frac{2}{2/3} = 3.$$

После этого относительные меры множества P равны

$$\lambda_{\langle -1,1\rangle}(P)=1, \qquad \lambda_{\langle -1,-1\rangle}(P)=4\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{256}+\cdots\right)=\frac{1}{3}\,.$$

Тем самым, сохраняющим P-качество ходом Игрока будет

$$b_1^*=B_1\frac{1-1/3}{1+1/3}=\frac{B_1}{2}\,.$$

Если в действительности Игрок делает ход b_1, удовлетворяющий $b_1<B_1/2$, то τ предлагает ход $p_1=1$, и теперь мы имеем $\vec{p}\in P$ независимо от последующего хода игры, так что Казино может заниматься только уменьшением капитала Игрока. После этой второй пары ходов (с $b_1<B_1/2$) мы имеем $B_2<3$, и Казино может уменьшить текущий капитал после любой последующей ненулевой ставки Игрока.

Если же Игрок делает ставку $b_1\geqslant B_1/2$ на шаге 1, то стратегия τ предложит сделать ход $p_1=-1$. В этом случае текущий капитал становится равным $B_2\leqslant 1$, что возвращает нас к ситуации в начале игры с капиталом, не превосходящим начального капитала $B_0=1$. Тем самым, капитал не увеличился, а множество P на бэровском интервале $\mathbb{D}_{\langle -1,-1\rangle}$ выглядит идентично самому себе в начале игры. Следовательно, Казино может продолжать играть по тому же плану и дальше. В этом и состоит стратегия τ.

Если при этом Игрок следует стратегии сохранения P-качества на каждом шаге, т.е. $b_n=B_n/2$, то текущими значениями капитала будут

$$B_n=\begin{cases}1, & \text{если } n \text{ четно},\\ 2, & \text{если } n \text{ нечетно},\end{cases}$$

а определенная нами стратегия τ для Казино даст $\vec{p}=-\vec{1}\in P$.

Если на каком-то нечетном шаге n Игрок делает ставку $b_n<B_n/2$, то τ предлагает ход $p_n=1$, и, как указано выше, текущий капитал останется строго меньше 3 и может быть только уменьшен каждый раз, когда Игрок сделает ненулевую ставку на любом из следующих ходов.

Если же Игрок делает ставку $b_n>B_n/2$ на одном из нечетных шагов, то τ предлагает ход $p_n=-1$, после чего качество позиции становится равным $3-\varepsilon$ для какого-то $\varepsilon>0$. После этого Казино может держать качество (а тогда и капитал) на уровне $3-\varepsilon$ или меньше на протяжении всей игры.

Итак, во всех случаях стратегия τ гарантирует, что текущий капитал всегда строго меньше 3. Что до Игрока, то оптимальной для него стратегией будет поставить $b_0=-1$ на начальном шаге, затем $b_1=1-\varepsilon$ и $b_n=0$ для всех $n\geqslant 2$. В этом случае Игрок получит капитал $3-\varepsilon$ долларов до конца игры, что для малого ε выглядит значительно лучше, чем постоянная осцилляция между 1 и 2 долларами, возникающая в случае, когда Казино играет по стратегии τ, а Игрок – по стратегии сохранения P-качества.

§ 3. Случай нулевой меры

В этом параграфе доказывается, что множества нулевой меры – это в точности те множества $P\subseteq\mathbb{D}$, для которых Игрок имеет стратегию в игре $\Gamma(P)$, гарантирующую $\sup_{n\to\infty}B_n=\infty$. Аналогичная характеризация множеств нулевой меры была получена в [4] (см. также [2], [5] о близких результатах). Мы используем $\lambda^+(P)$ для обозначения верхней лебеговой меры множества $P \subseteq \mathbb{D}$, т.е. нижней грани мер открытых множеств, накрывающих P.

Теорема 6. *Предположим, что* $P \subseteq \mathbb{D}$.

1. *Если* $\lambda^+(P) = 0$, *то Игрок выигрывает* $\Gamma(P, \infty)$, *точнее, Игрок имеет стратегию в игре* $\Gamma(P)$, *гарантирующую даже* $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$.
2. *Если Игрок выигрывает* $\Gamma(P, \infty)$, *то* $\lambda^+(P) = 0$.

Доказательство. 1. Если P имеет нулевую меру, то Казино вынуждено строить последовательность $\vec{p}$ в очень маленьком множестве. Поэтому разумно предположить, что ходы Казино являются достаточно предсказуемыми для того, чтобы Игрок мог использовать это для увеличения своего капитала. Это предположение превращается в точный результат при помощи сохраняющих качество стратегий. Зафиксируем убывающую последовательность $\langle G_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}$ открытых множеств такую, что:

(i) $P \subseteq G_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$;
(ii) $\lim_{n\to\infty} \lambda(G_n) = 0$.

Искомая стратегия Игрока может быть описана следующим образом.

Обозначим через m_0 наименьшее число такое, что $\lambda(G_{m_0}) \leqslant 1/2$. В самом начале Игрок откладывает половину своего исходного капитала в 1 доллар в резерв и начинает игру так, как если бы он имел всего 1/2 доллара. Игрок следует $\sigma_{G_{m_0}}$, т.е. стратегии сохранения G_{m_0}-качества, до того первого раунда n_0, на котором конечная последовательность $s_{n_0} = \langle p_0, p_1, \dots, p_{n_0} \rangle \in \{-1, 1\}^{n_0+1}$ ходов Казино удовлетворяет $\mathbb{D}_{s_{n_0}} \subseteq G_{m_0}$. Это рано или поздно произойдет, поскольку вся бесконечная последовательность $\vec{p}$ должна принадлежать множеству P, а потому и открытому множеству G_{m_0}, накрывающему P. Заметим, что по построению пересечение $P \cap \mathbb{D}_{s_{n_0}}$ непусто.

Следуя стратегии $\sigma_{G_{m_0}}$ на этой первой серии ходов, Игрок получает G_{m_0}-качество завершающей позиции, равное начальному G_{m_0}-качеству:

$$\frac{B_{n_0}}{\lambda_{s_{n_0}}(G_{m_0})} = \frac{B_{n_0}}{1} = \frac{1/2}{\lambda(G_{m_0})} \geqslant \frac{1/2}{1/2} = 1,$$

а потому текущий капитал B_{n_0} равен по меньшей мере 1, а на самом деле даже $1 + 1/2 = 3/2$, поскольку 1/2 доллара было отложено. По этой же причине действительный текущий капитал в течение этой первой серии раундов всегда не меньше значения 1/2.

Обозначим через m_1 наименьшее число $> m_0$ такое, что $\lambda_{s_{n_0}}(G_{m_1}) \leqslant 1/2$. Заметим, что на самом деле $\lambda_{s_{n_0}}(G_{m_1}) > 0$, поскольку иначе в силу открытости множество $\mathbb{D}_{s_{n_0}} \cap G_{m_1}$ было бы пустым, так что и $\mathbb{D}_{s_{n_0}} \cap P$ пусто, противоречие с установленным выше.

Вторая серия раундов начинается с того, что Игрок откладывает в резерв уже не менее 1 доллара, оставляя себе для игры ровно 1/2 доллара, и переключается на стратегию $\sigma_{G_{m_1}}$ сохранения G_{m_1}-качества. Это происходит до того первого раунда $n_1 > n_0$, на котором последовательность $s_{n_1} = \langle p_0, p_1, \dots, p_{n_1} \rangle \in \{-1, 1\}^{n_1+1}$ ходов Казино удовлетворяет $\mathbb{D}_{s_{n_1}} \subseteq G_{m_1}$. По той же причине, что и выше, такое число n_1 найдется, причем пересечение $P \cap \mathbb{D}_{s_{n_1}}$ непусто. После шага n_1, поскольку G_{m_1}-качество не убывает, текущий капитал Игрока станет равен, как минимум, 1 доллару, поскольку

$$\frac{B_{n_1}}{\lambda_{s_{n_1}}(G_{m_1})} = \frac{B_{n_1}}{1} = \frac{1/2}{\lambda_{s_{n_0}}(G_{m_1})} \geqslant \frac{1/2}{1/2} = 1,$$

а на самом деле, как минимум, 2 доллара с учетом того доллара, который был зарезервирован. Причем в течение этой второй серии раундов (от n_0 до n_1) действительный текущий капитал всегда не меньше значения 1.

Теперь берем наименьшее число $m_2 > m_1$ такое, что $\lambda_{s_{n_1}}(G_{m_2}) \leqslant 1/2$, тогда, как и выше, $\lambda_{s_{n_1}}(G_{m_2}) > 0$. В третьей серии раундов Игрок сначала откладывает в резерв $\geqslant 3/2$ доллара, оставляя для игры снова ровно $1/2$ доллара, и переключается на стратегию, сохраняющую G_{m_2}-качество, которой следует до первого $n_2 > n_1$, удовлетворяющего $\mathbb{D}_{s_{n_2}} \subseteq G_{m_2}$. При этом произойдет увеличение капитала еще по меньшей мере на $1/2$ доллара. И так далее.

Понятно, что, придерживаясь такой стратегии, Игрок обеспечивает выполнение неравенства $\lim_{n\to\infty} B_n = \infty$.

2. Допустим, что Игрок имеет стратегию σ, которая обеспечивает неограниченное возрастание текущего капитала до ∞ в игре $\Gamma(P)$, т.е. $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \infty$ вне зависимости от последовательности $\vec{p} \in P$ ходов Казино. Для каждой конечной последовательности $s \in \mathbf{S}$ через $C_\sigma(s)$ обозначим текущий капитал, полученный, когда Игрок следует стратегии σ, а Казино делает последовательность ходов s (после числа ходов, равного длине s). Понятно, что значения $C_\sigma(s^\frown 1)$ и $C_\sigma(s^\frown(-1))$ равны соответственно $C_\sigma(s) + b$ и $C_\sigma(s) - b$, где $b = \sigma(C_\sigma(s), \langle \vec{b}_s, s\rangle)$ (ставка, рекомендуемая стратегией σ для Игрока), а $\vec{b}_s$ – последовательность предшествующих ходов Игрока. Таким образом,

$$C_\sigma(s^\frown 1) + C_\sigma(s^\frown(-1)) = 2C_\sigma(s),$$

откуда немедленно следует, что $\sum_{s\in\{-1,1\}^n} C_\sigma(s) = 2^n$.

Положим $S_n = \{s \in \mathbf{S} : C_\sigma(s) > n\}$. Множество $G_n = \bigcup_{s\in S_n} \mathbb{D}_s$, очевидно, открыто и удовлетворяет $P \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$, и если мы покажем, что $\lambda(G_n) \leqslant 1/n$, то P будет иметь верхнюю меру 0. Предположим противное: $\lambda(G_n) > 1/n$. Каждое открытое множество $G \subseteq \mathbb{D}$ аппроксимируется своими открыто-замкнутыми подмножествами с точностью до сколь угодно малой меры. Поэтому имеется конечное семейство $S' \subseteq S_n$ такое, что:

- если $s \neq t$ принадлежат S', то $\mathbb{D}_s \cap \mathbb{D}_t = \varnothing$;
- $\lambda\big(\bigcup_{s\in S'} \mathbb{D}_s\big) = \sum_{s\in S'} 2^{-\operatorname{lh} s} > 1/n$.

Если $s \in \{-1,1\}^n$, то сумма капиталов $C_\sigma(t)$ всех продолжений t последовательности s в $\mathbf{S}$ длины $n+k$, очевидно, равна $2^k C_\sigma(s)$. Положим $\ell = \max_{s\in S'}\{\operatorname{lh} s\}$ и рассмотрим множество

$$T = \big\{t \in \{-1,1\}^\ell : \exists\, s \in S'\ (s \subseteq t)\big\} \subseteq \{-1,1\}^\ell$$

всех конечных последовательностей длины ℓ, которые продолжают какую-то последовательность из S'. Тогда

$$\begin{aligned} 2^\ell &= \sum_{s\in\{-1,1\}^\ell} C_\sigma(s) \geqslant \sum_{t\in T} C_\sigma(t) = \sum_{s\in S'} 2^{\ell-\operatorname{lh} s} C_\sigma(s) \\ &= 2^\ell \sum_{s\in S'} 2^{-\operatorname{lh} s} C_\sigma(s) > 2^\ell \frac{1}{n}\, n = 2^\ell, \end{aligned}$$

противоречие. Таким образом, каждое из множеств G_n имеет меру, не превосходящую $1/n$, и поэтому P имеет меру 0.

Следствие 7. *Если $P \subseteq \mathbb{D}$, то следующие утверждения эквивалентны*:
- $\lambda(P) = 0$;
- *Игрок выигрывает* $\Gamma(P, \infty)$, *т.е. имеет стратегию в игре* $\Gamma(P)$, *гарантирующую* $\lim_{n\in\mathbb{N}} B_n = \infty$.

§ 4. Случай положительной меры с точки зрения Игрока

Здесь мы доказываем, что Игрок всегда может увеличить капитал примерно до величины $1/\lambda^+(P)$ и, обратно, оптимальные результаты Игрока определяют предел верхней меры множества P (не обязательно измеримого). В принципе это согласуется и с теоремой 6, если мы примем, что $1/0 = \infty$.

Теорема 8. *Предположим, что $P \subseteq \mathbb{D}$ и $0 < h \leqslant 1$.*
1. *Если $\lambda^+(P) \leqslant h$ для любого $\varepsilon > 0$, то Игрок выигрывает $\Gamma(P, h^{-1} - \varepsilon)$ и даже имеет стратегию в игре $\Gamma(P)$, гарантирующую $\lim_{n\to\infty} B_n > h^{-1} - \varepsilon$. В частности, если $\lambda^+(P) < h$, то Игрок выигрывает $\Gamma(P, h^{-1})$.*
2. *Если Игрок выигрывает $\Gamma(P, h^{-1})$, то $\lambda^+(P) < h$. В частности, если для каждого $\varepsilon > 0$ Игрок выигрывает $\Gamma(P, h^{-1} - \varepsilon)$, то $\lambda^+(P) \leqslant h$.*

Доказательство. 1. Здесь следует доказать как существование предела, так и то, что он превосходит $h^{-1} - \varepsilon$. Идея доказательства примерно та же, что и для первой части доказательства теоремы 6. Если P открыто, то стратегия сохранения P-качества дает

$$\frac{B_n}{\lambda_{\vec{p}\restriction n}(P)} = \frac{1}{\lambda(P)} \geqslant h^{-1},$$

а относительная мера в знаменателе ($\lambda_{\vec{p}\restriction n}(P)$) рано или поздно должна сравняться с 1. Малое значение ε вводится для того, чтобы привести общий случай к случаю открытых множеств, поскольку сохраняющие качество стратегии надежно дают ожидаемый результат только для открытых множеств.

Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Если либо $h = 1$, либо одновременно $h < 1$ и $h^{-1} - \varepsilon \leqslant 1$, то Игрок может делать нулевые ставки в ходе всей партии. Поэтому можно предполагать, что $h < 1$ и $h^{-1} - \varepsilon > 1$, так что $h < h/(1-\varepsilon h) < 1$. В этом случае существует открытое множество G такое, что $P \subseteq G$ и $\lambda(G) < h/(1-\varepsilon h)$. Пусть Игрок следует стратегии σ_G. Рано или поздно ходы Казино p_n должны образовать конечную последовательность s_{n_0} такую, что $\mathbb{D}_{s_{n_0}} \subseteq G$. Поскольку G-качество не меняется, мы получим

$$\frac{B_0}{\lambda(G)} = \frac{1}{\lambda(G)} = \frac{B_{n_0}}{\lambda_{s_{n_0}}(G)} = \frac{B_{n_0}}{1}\,.$$

Таким образом, $B_{n_0} = 1/\lambda(G) > (1-\varepsilon h)/h = h^{-1} - \varepsilon$. На всех последующих шагах $n_0 + 1$ и т.д. Игрок может просто делать нулевые ставки, и, таким образом, $\lim_{k\to\infty} B_k = B_{n_0} > h^{-1} - \varepsilon$, что и требовалось доказать.

2. Второе утверждение этой части теоремы есть легкое следствие первого, поэтому ограничимся доказательством первого утверждения. Идея берется из доказательства теоремы 6: стратегия Игрока может увеличивать текущие значения капитала, но сумма по $s \in \{-1, 1\}^n$ всех возможных значений после n раундов игры в точности равна 2^n, а потому имеется не так много тех конечных последовательностей s, которые имеют вид $\vec{p} \restriction n$ для $\vec{p} \in P$.

Пусть σ – такая стратегия Игрока, которая гарантирует хотя бы неравенство $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n > h^{-1}$. Для $s \in \mathbf{S}$ через $C_\sigma(s)$ обозначим то значение капитала, которое получится, если Игрок следует стратегии σ, а Казино делает (конечную) последовательность ходов s. Положим

$$S_h = \{s \in \mathbf{S} : C_\sigma(s) > h^{-1}\},$$

так что $P \subseteq G = \bigcup_{s\in S_h} \mathbb{D}_s$, и нам достаточно вывести $\lambda(G) < h$. Предположим противное: $\lambda(G) \geqslant h$. Рассмотрим произвольную последовательность $s_0 \in S_h$. Тогда $C_\sigma(s_0) = h^{-1} + \varepsilon_0$ для подходящего $\varepsilon_0 > 0$. Понятно, что если h' близко к h и $B \geqslant h^{-1}$, то $h' \cdot B$ будет близко к 1. Возьмем $\delta > 0$, для которого, если выполнено $h' \geqslant h - \delta$, то $h' \cdot h^{-1} > 1 - \varepsilon_0 2^{-\operatorname{lh} s_0}$. Существует конечное подсемейство $S' \subseteq S_h$ такое, что:

- $s_0 \in S'$;
- если $s \neq t \in S'$, то $\mathbb{D}_s \cap \mathbb{D}_t = \varnothing$;
- $\sum_{s\in S'} \lambda(\mathbb{D}_s) = \sum_{s\in S'} 2^{-\operatorname{lh} s} > h - \delta$.

Пусть $\ell = \max_{s\in S'}\{\operatorname{lh} s\}$, тогда

$$\begin{aligned} 2^\ell = \sum_{s\in 2^\ell} C_\sigma(s) &\geqslant \sum_{s\in S'} 2^{\ell-\operatorname{lh} s} C_\sigma(s) = 2^\ell \sum_{s\in S'} 2^{-\operatorname{lh} s} C_\sigma(s) \\ &> 2^\ell\bigl[(h-\delta)h^{-1} + \varepsilon_0 2^{-\operatorname{lh} s_0}\bigr] > 2^\ell, \end{aligned}$$

противоречие. Итак, $\lambda(G) < h$, и тогда $\lambda^+(P) < h$, поскольку $P \subseteq G$.

Следствие 9. *Если $P \subseteq \mathbb{D}$ и $0 < h \leqslant 1$, то следующие два условия равносильны*:

- $\lambda^+(P) \leqslant h$;
- *для любого $\varepsilon > 0$ Игрок выигрывает $\Gamma(P, h^{-1} - \varepsilon)$, т.е. имеет стратегию в игре $\Gamma(P)$, гарантирующую $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n > h^{-1} - \varepsilon$.*

§ 5. Случай положительной меры с точки зрения Казино

В этом параграфе дается характеризация нижней меры $\lambda^-(P)$ множества P в терминах оптимальных стратегий для Казино. Мы докажем, что Казино всегда может ограничить текущий капитал Игрока по ходу игры значением, обратным к нижней мере множества P, а оптимальные стратегии Казино соответственно приводят к оценкам снизу для нижней меры P.

Теорема 10. *Предположим, что $P \subseteq \mathbb{D}$ и $h \in (0, 1]$.*

1. *Если $\lambda^-(P) \geqslant h$, то Казино выигрывает игру $\Gamma(P, h^{-1})$, т.е. имеет допустимую (обеспечивающую $\vec{p} \in P$) стратегию в $\Gamma(P)$, гарантирующую $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n \leqslant h^{-1}$.*
2. *Если для каждого $\varepsilon > 0$ Казино выигрывает игру $\Gamma(P, h^{-1} + \varepsilon)$, то $\lambda^-(P) \geqslant h$.*

Доказательство. 1. Идея состоит в использовании стратегий снижения F-качества для Казино для подходящих достаточно больших замкнутых множеств $F \subseteq P$. Мы начинаем с того, что поскольку $\lambda^-(P) \geqslant h$, найдется множество вида $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq P$, где $\langle F_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ – возрастающая последовательность замкнутых множеств таких, что $\lambda(F_0) > 0$ и $h = \lambda(U) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n)$. Искомая стратегия Казино может быть определена так.

Вся партия разбивается на две части. Первая часть – это тот начальный отрезок партии (возможно, пустой либо, наоборот, занимающий всю партию), на котором Игрок следует стратегии σ_U сохранения U-качества. Ходы Казино вообще не влияют на U-качество позиций, которое остается одним и тем же на протяжении этой части игры, а потому Казино может делать их из соображений, связанных с замкнутым множеством F_0, а не с множеством U. Именно, на этом отрезке Казино будет отвечать ходами $p_n = \pm 1$, определяемыми так, что $\lambda_{s^\frown p_n}(F_0) \geqslant \lambda_s(F_0)$. Более точно, если Игрок делает ход

$$b_n = B_n \frac{\lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown 1}(U) - \lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown(-1)}(U)}{\lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown 1}(U) + \lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown(-1)}(U)}$$

(сохраняющий U-качество ход), то Казино отвечает ходом

$$p_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown 1}(F_0) \geqslant \lambda_{(\vec{p}\restriction n)^\frown(-1)}(F_0), \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Если Игрок следует стратегии σ_U на протяжении всей партии, то Казино производит последовательность $\vec{p} \in F_0 \subseteq P$ (поскольку F_0 замкнуто), и в то же время U-качество остается постоянным. Тем самым, поскольку текущий капитал всегда меньше или равен качеству, мы имеем $B_n \leqslant h^{-1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Если же Игрок отходит от стратегии σ_U на каком-то ходе, то пусть n – первый раунд, на котором Игрок не следует σ_U. Отсюда начинается вторая часть партии, в ходе которой и Казино меняет стратегию. Именно, Казино может сделать свой очередной ход $p_n = \pm 1$, так что новое U-качество будет строго меньше исходного. Тогда найдется число $\varepsilon > 0$, для которого

$$\frac{B_{n+1}}{\lambda_{\vec{p}\restriction(n+1)}(U)} = h^{-1} - 2\varepsilon.$$

И коль скоро $\lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) = \lambda(U)$, Казино может выбрать $k \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\frac{B_{n+1}}{\lambda_{\vec{p}\restriction(n+1)}(F_k)} < h^{-1} - \varepsilon.$$

С этого момента Казино будет следовать стратегии снижения F_k-качества до конца игры. В этом случае F_k-качество позиций не увеличивается, так что значения текущего капитала, ограниченные сверху значениями качества, будут удовлетворять $\sup_{m>n} B_m \leqslant h^{-1} - \varepsilon$. Значения же капитала от B_0 до B_n (первый отрезок партии), напомним, ограничены сверху исходным значением U-качества h^{-1}. Таким образом, следуя такому плану игры, Казино всегда имеет $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n \leqslant h^{-1}$, а с другой стороны, выполнено либо $\vec{p} \in F_0$ (если второго отрезка партии нет), либо $\vec{p} \in F_0$ (если он есть), так что в обоих случаях $\vec{p} \in U$, что и требовалось доказать.

2. Для начала определим аналог $C_\tau(\beta)$ той функции капитала $C_\sigma(s)$, которая была введена выше. Именно, если τ – допустимая стратегия Казино (т.е. она всегда производит последовательности $\vec{p} \in P$), а $\beta = \langle b_0, \ldots, b_{n_1} \rangle$ – последовательность n начальных ходов Игрока, то $C_\tau(\beta)$ обозначает значение текущего капитала после n раундов в партии, где Игрок делает ходы $b_0, \ldots, b_{n_1}$, а Казино следует стратегии τ.

ЛЕММА 11. *Пусть $P \subseteq \mathbb{D}$, τ – произвольная допустимая стратегия для Казино в игре $\Gamma(P)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют замкнутое множество $P' \subseteq P$, а для каждого $\vec{p'} \in P'$ бесконечная последовательность ставок $\vec{b}_{\vec{p'}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ Игрока такие, что для каждого $n \in \mathbb{N}$:*

(i) *если $\vec{p'} \upharpoonright n = \vec{p''} \upharpoonright n$, то $\vec{b}_{\vec{p'}} \upharpoonright n = \vec{b}_{\vec{p''}} \upharpoonright n$;*

(ii) *τ отвечает ходами $\vec{p'} \upharpoonright n$ на ходы Игрока $\vec{b}_{\vec{p'}} \upharpoonright n$;*

(iii) *$\sum_{s \in P'_n} \widetilde{B}_\tau(\vec{b}_s) > 2^n - 2^n\varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество P' будет определено как множество всех ветвей некоторого дерева $T = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P'_n \subseteq \{-1,1\}^{<\mathbb{N}}$, где $P'_n \subseteq \{-1,1\}^n$. Последовательность $\vec{b}_{\vec{p'}}$ ходов Игрока, соответствующая последовательности $\vec{p'} \in P'$, будет определяться индуктивно, так что последовательность ставок Игрока, соответствующая последовательности $\vec{p'} \upharpoonright n$, будет начальным сегментом последовательности, соответствующей $\vec{p'} \upharpoonright n+k$, причем τ всегда будет использована для определения ответных ходов p'_{n+k}. Тем самым, ветви дерева будут соответствовать партиям в игре $\Gamma(P)$, где Казино следует стратегии τ, а Игрок делает последовательность ходов $\vec{b}_{\vec{p'}}$, так что $P' \subseteq P$. Нашей задачей будет определить P'_n (вершины n-го уровня дерева) из P'_{n-1}. Чтобы упростить обозначения, мы не будем явно указывать зависимость значений τ ни от чего, кроме последнего хода Игрока (например, b_n), ибо значения остальных аргументов (скажем, предшествующие ходы Игрока) будут ясны из контекста.

Мы начинаем с определения нулевого уровня $P'_0 = \langle\Lambda\rangle$, где Λ – пустая последовательность (длины 0). Это соответствует начальному моменту игры, а так как начальный ход делает Игрок, то мы можем определить $\vec{b}_\Lambda = \Lambda$, что приводит к текущему капиталу, совпадающему с начальным капиталом $1 > 2^0 - \varepsilon$.

Теперь предположим, что уровни $P'_n \subseteq \{-1,1\}^n$ искомого дерева уже определены для $n = 0, 1, \ldots, k-1$ и при этом:

- для всех $n < n' < k$ и $s \in P'_n$ существует по меньшей мере одна последовательность $t \in P'_{n'}$ такая, что $s \subset t$;
- для каждого $s \in P'_n$ уже определена последовательность ставок $\vec{b}_s$ Игрока, так что
  - если Игрок делает последовательность ходов $\vec{b}_s$, то стратегия τ производит последовательность s ответов Казино,
  - если $s \subset t$ принадлежат $\bigcup_{n<k} P'_n$, то $\vec{b}_s \subset \vec{b}_t$;
- если $n < k$, то выполнено неравенство $\sum_{s\in P'_n} C_\tau(\vec{b}_s) > 2^n - 2^n\varepsilon$.

Мы должны теперь определить P'_k так, чтобы эти свойства сохранились. Задавшись произвольным $\delta > 0$, покажем, что каждая последовательность $s \in P'_{k-1}$ допускает одно или два расширения в $\{-1,1\}^k$, производимых конкретными ставками Игрока и ответами Казино по стратегии τ, так что соответствующий каждому из этих двух продолжений капитал составляет по меньшей мере $2C_\tau(\vec{b}_s) - \delta$.

Случай 1: $\tau(b_k) = 1$ для всех ставок $b_k \in [-C_\tau(\vec{b}_s), C_\tau(\vec{b}_s)]$, т.е. стратегия τ рекомендует ответ 1 независимо от хода b_k Игрока. В этом случае вносим в T_k только одно продолжение $s^\frown 1$, определяя $\vec{b}_{s^\frown 1} = \vec{b}_s{}^\frown C_\tau(\vec{b}_s)$. Другими словами, Игрок ставит весь свой текущий капитал на 1, а поскольку стратегия τ также диктует ответ 1, то капитал удваивается.

Случай 2: $\tau(b_k) = -1$ для всех ставок $b_k \in [-C_\tau(\vec{b}_s), C_\tau(\vec{b}_s)]$. Берем для T_k только продолжение $s^\frown(-1)$ и полагаем $\vec{b}_{s^\frown(-1)} = \vec{b}_s{}^\frown - C_\tau(\vec{b}_s)$. Капитал удваивается из тех же соображений.

Случай 3: стратегия τ как функция не является константой на отрезке $[-C_\tau(\vec{b}_s), C_\tau(\vec{b}_s)]$. Тогда существуют два значения (скажем, $b_k^{(1)}$ и $b_k^{(-1)}$) на этом отрезке такие, что $\tau(b_k^{(i)}) = i$ $(i = \pm 1)$ и $|b_k^{(1)} - b_k^{(-1)}| < \delta$.[1] Вносим в T_k оба продолжения, полагая $\vec{b}_{s^\frown i} = \vec{b}_s{}^\frown b_k^{(i)}$ $(i = \pm 1)$. Соответствующие измененные значения капитала в сумме дают $2C_\tau(\vec{b}_s) + b_k^{(1)} - b_k^{(-1)} > 2C_\tau(\vec{b}_s) - \delta$.

Итак, для построения T_k мы фиксируем достаточно малое $\delta > 0$ (см. о выборе δ ниже), а затем присоединяем к P'_k одно или два продолжения каждой последовательности $s \in P'_{k-1}$, как указано выше, и используем выбранное δ. По индуктивной гипотезе $\sum_{s \in P'_{k-1}} C_\tau(\vec{b}_s) > 2^{k-1} - 2^{k-1}\varepsilon$. С другой стороны,

$$\sum_{s \in P'_k} C_\tau(\vec{b}_s) > 2 \sum_{s \in P'_{k-1}} C_\tau(\vec{b}_s) - 2^{k-1}\delta$$

по построению. Значит, можно подобрать столь малое вещественное $\delta > 0$, что для него станет $\sum_{s \in P'_k} C_\tau(\vec{b}_s) > 2^k - 2^k\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Понятно, что этот индуктивный шаг построения сохраняет все требуемые свойства. Лемма 11 доказана.

Возвращаемся к доказательству утверждения 2 теоремы 10. Для вывода $\lambda^-(P) \geqslant h$ зададимся произвольным $\delta > 0$. Мы собираемся построить замкнутое множество $P' \subseteq P$ с $\lambda(P') \geqslant h - \delta$. Можно предположить, что $\delta < h$. Понятно, что такое множество получится, если в конструкции из доказательства леммы мы дополнительно обеспечим $\operatorname{card}(P'_n) \geqslant 2^n(h - \delta)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, где $\operatorname{card} X$ – число элементов конечного множества X.

Выберем ε_1 так, что $0 < \varepsilon_1 < \delta/(h(h-\delta))$, и тогда $\varepsilon_2 = \delta(h^{-1} + \varepsilon_1) - h\varepsilon_1 > 0$. Рассмотрим допустимую стратегию τ для Казино, гарантирующую

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} B_n \leqslant h^{-1} + \varepsilon_1.$$

Используя лемму 11 для этой стратегии τ, мы находим замкнутое множество $P' \subseteq P$ с $\sum_{s \in P'_n} C_\tau(\vec{b}_s) > 2^n - 2^n\varepsilon_2$ для всех n. Тогда

$$\sum_{s \in P'_n} C_\tau(\vec{b}_s) \leqslant (h^{-1} + \varepsilon_1) \operatorname{card} P'_n$$

и, тем самым,

$$\begin{aligned} \operatorname{card} P'_n &\geqslant \frac{\sum_{s \in P'_n} C_\tau(\vec{b}_s)}{h^{-1} + \varepsilon_1} > \frac{2^n - 2^n\varepsilon_2}{h^{-1} + \varepsilon_1} = \frac{2^n - 2^n\delta(h^{-1} + \varepsilon_1) + 2^n h\varepsilon_1}{h^{-1} + \varepsilon_1} \\ &= \frac{2^n(h - \delta)(h^{-1} + \varepsilon_1)}{h^{-1} + \varepsilon_1} = 2^n(h - \delta). \end{aligned}$$

Отсюда $\lambda^-(P') \geqslant h - \delta$, и мы доказали п. 2 теоремы 10.

[1] Заметим, что эти значения могут быть выбраны как рациональные числа. Это будет иметь значение для нашего анализа рациональной формы этой игры ниже.

Следствие 12. *Если* $P \subseteq \mathbb{D}$ *и* $0 < h \leqslant 1$, *то следующие условия эквивалентны*:

- $\lambda^-(P) \geqslant h$;
- *Казино выигрывает* $\Gamma(P, h^{-1})$, *т.е. имеет стратегию в игре* $\Gamma(P)$, *гарантирующую* $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n \leqslant h^{-1}$.

Интересная проблема состоит в замене $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ на $\lim_{n\to\infty}$ (т.е. вместе с требованием существования предела) в п. 1 теоремы 10. Именно, используя теорему Лебега о плотности [6], можно показать, что указанная нами стратегия на самом деле обеспечивает существование $\lim_{n\to\infty} B_n$ для почти всех по мере $\vec{p} \in P$. В самом деле, $\lim_{n\to\infty} \lambda_{\vec{p}\upharpoonright n}(P) = 1$ для почти всех $\vec{p} \in P$, так что в пределе текущий капитал сравнивается с качеством позиции. Но последовательность значений качества невозрастающая и ограничена, так что она сходится. Однако мы не смогли здесь устранить множество меры 0 и полностью заменить $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ на $\lim_{n\to\infty}$. Заметим следующее. Если $F_0 \subseteq P$ – замкнутое множество положительной меры, каждая точка $\vec{p} \in F_0$ которого является *точкой плотности* P, т.е. $\lim_{n\to\infty} \lambda_{\vec{p}\upharpoonright n}(P) = 1$, то аналогичное рассуждение показывает, что $\lim_{n\to\infty} B_n = h^{-1}$, или $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n < h^{-1}$. Следовательно, если Игрок на самом деле может гарантировать, что последовательность значений капитала не сходится (к любому пределу), то это сопряжено с отказом от некоторой части возможного выигрыша.

Еще одно потенциальное усиление п. 1 теоремы 8 можно было бы видеть в устранении ε, т.е. доказать, что если $\lambda^+(P) \leqslant h$, то Игрок имеет стратегию в игре $\Gamma(P)$, гарантирующую $\lim_{n\to\infty} B_n \geqslant h^{-1}$. Однако пример 5 дает замкнутое множество меры $1/3$ такое, что Казино достигает $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n < 3 = 1/\lambda(P)$. Так что на самом деле от ε нельзя избавиться. Следующий результат (несложное доказательство, следующее построениям примера 5, для экономии места опускается) показывает, что подобное множество можно построить так, чтобы оно имело заданную меру $h \in (0, 1)$.

Предложение 13. *Для каждого вещественного* $h \in (0, 1)$ *имеется замкнутое множество* $P_h \subseteq \mathbb{D}$ *с* $\lambda(P_h) = h$ *такое, что Казино имеет допустимую стратегию в игре* $\Gamma(P_h)$, *гарантирующую* $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n < h^{-1}$.

В свете этого результата можно было бы подумать, что п. 1 теоремы 10 допускает такое усиление:

$$\begin{aligned}&\text{если } \lambda^-(P) \geqslant h, \text{ то Казино имеет стратегию в игре } \Gamma(P),\\ &\text{которая гарантирует } \sup_{n\in\mathbb{N}} B_n < h^{-1}\end{aligned}$$

(с последним неравенством в строгой форме). Однако если G – открытое множество с $\lambda(G) = h > 0$, то стратегия сохранения G-качества для Игрока гарантирует $\lim_{n\to\infty} B_n = h^{-1}$, так что у Казино не может быть стратегии, которая дает $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n < h^{-1}$. В то же время можно заметить, что п. 2 теоремы 10 сильнее с ε, чем без него.

Закончим этот параграф выводом измеримости по Лебегу данного множества P из существования определенных стратегий для Казино в игре вида $\Gamma(P, h)$ для подходящего h.

Следствие 14. *Пусть множество* $P \subseteq \mathbb{D}$ *удовлетворяет* $\lambda^+(P) > 0$ *и* $h = (\lambda^+(P) + \lambda^-(P))/2$. *Тогда Игрок не имеет выигрывающей стратегии в игре*

$\Gamma(P, h^{-1})$. *Если Казино имеет выигрывающую стратегию в игре* $\Gamma(P, h^{-1})$, *то множество* P *измеримо.*

Доказательство. В предположении, что Игрок все-таки имеет выигрывающую стратегию в игре $\Gamma(P, h^{-1})$, теорема 8 влечет

$$\lambda^+(P) < \frac{\lambda^+(P) + \lambda^-(P)}{2}, \quad \text{так что} \quad \frac{\lambda^+(P)}{2} < \frac{\lambda^-(P)}{2},$$

противоречие. Допустим, что Казино имеет выигрывающую стратегию. Тогда из теоремы 10 следует, что

$$\lambda^-(P) \geqslant \frac{\lambda^+(P) + \lambda^-(P)}{2}, \quad \text{так что} \quad \frac{\lambda^-(P)}{2} \geqslant \frac{\lambda^+(P)}{2}.$$

Отсюда следует $\lambda^-(P) = \lambda^+(P)$, поэтому P измеримо.

§ 6. "Рациональный" вариант игры

Здесь рассматривается модификация игры $\Gamma(P)$, в которой действия Игрока ограничены требованием, чтобы все ставки выражались рациональными числами. Модифицированная игра оказывается очень похожей на $\Gamma(P)$, но позволяет дать еще одно доказательство измеримости по Лебегу всех подмножеств $\mathbb{D}$ в предположении аксиомы детерминированности.

Итак, если $P \subseteq \mathbb{D}$ и $0 \leqslant H \leqslant \infty$ (H не обязательно рационально), то игры $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P)$ и $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, H)$ определяются совершенно аналогично играм $\Gamma(P)$ и $\Gamma(P, H)$ с той лишь разницей, что Игрок может делать только рациональные ставки. Точнее, в игре $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, H)$ снова участвуют двое – Игрок и Казино. Игра проходит в бесконечное число шагов (раундов), занумерованных натуральными числами n. Игрок начинает со стартовым капиталом $B_0 = 1$ доллар и на каждом шаге выбирает рациональное число b_n, по абсолютной величине не превосходящее текущий капитал B_n. После этого Казино отвечает числом $p_n = \pm 1$, и новое значение капитала равно

$$B_{n+1} = B_n + b_n \cdot p_n \in \mathbb{Q}.$$

Как и выше, мы требуем, чтобы последовательность $\vec{p} = \langle p_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ ходов Казино принадлежала P, и говорим, что Игрок выиграл партию в игре $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, H)$, когда $\sup_{n \in \mathbb{N}} B_n > H$. Если $H = \infty$, то Игрок выиграл партию в игре $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, \infty)$, когда $\sup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \infty$. Соответственно, Казино выиграло партию в $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, H)$, когда $\sup_{n \in \mathbb{N}} B_n < H$ (или $\sup_{n \in \mathbb{N}} B_n < \infty$ при $H = \infty$).

Далее, мы говорим, что Игрок (или Казино) выигрывает игру $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, H)$, если Игрок (соответственно Казино) имеет выигрывающую стратегию в этой игре, т.е. (допустимую) стратегию, гарантирующую требуемое неравенство между H и $\sup_n B_n$ в игре $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P)$. В понятие допустимой стратегии для Игрока теперь включено дополнительное требование, чтобы все ставки были рациональными числами.

Эта модификация ничего не меняет для Казино, так что любая допустимая стратегия для Казино в игре $\Gamma(P)$ остается таковой и для игры $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P)$. Поэтому следующая теорема является легким следствием теоремы 10.

Теорема 15. *Если* $P \subseteq \mathbb{D}$ *и* $h \in (0, 1]$, *то* $\lambda^-(P) \geqslant h$ *тогда и только тогда, когда Казино выигрывает* $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, h^{-1})$.

Доказательство. Импликация $\Longrightarrow$ сразу следует из теоремы 10. Для вывода импликации $\Longleftarrow$ допустим, что τ является выигрывающей стратегией для Казино в игре $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, h^{-1})$. Если бы мы могли доказать, что τ остается выигрывающей стратегией и в исходной игре $\Gamma(P, h^{-1})$, где Игрок имеет значительно больше свободы действий, то теорема 10 сразу дала бы нужное неравенство. К сожалению, мы не можем вывести это свойство стратегий. Однако, с другой стороны, данное выше доказательство теоремы 10 может быть без труда модифицировано к "рациональному" варианту игры (см. сноску на стр. 36).

Могло показаться, что ограничение ставок Игрока рациональными числами дает Казино некоторое дополнительное преимущество, из-за которого заключительные части п. 1 теоремы 6 и п. 1 теоремы 8 должны быть несколько ослаблены. Дело, однако, в том, что эти утверждения содержат ε (или ∞), так что в действительности небольшая коррекция в стратегиях сохранения качества позволяет выполнить для модифицированной игры доказательства тех же самых утверждений.

Рассмотрим произвольное открытое множество $P \subseteq \mathbb{D}$. Напомним, что для $s \in \mathbf{S}$ и $B \in \mathbb{R}$ ставка

$$\sigma_P(B, s) = B\frac{\lambda_{s\hat{\ }1}(P) - \lambda_{s\hat{\ }(-1)}(P)}{\lambda_{s\hat{\ }1}(P) + \lambda_{s\hat{\ }(-1)}(P)} \tag{$*$}$$

соответствует стратегии σ_P сохранения P-качества; здесь B обозначает капитал Игрока перед данным ходом, а s – последовательность предшествующих ходов Казино. Как мы видели, следуя этой стратегии в игре $\Gamma(P)$, Игрок обеспечивает сохранение P-качества позиций равным исходному качеству $1/\lambda(P)$ на протяжении всей игры вне зависимости от ходов Казино. В "рациональной" игре $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P)$ стратегия σ_P не обязательно является допустимой: значения ставок, вычисленные согласно ($*$), не обязательно рациональны. Однако понятно, что, задавшись сколь угодно малым $\delta > 0$, мы можем преобразовать стратегию σ_P в теперь уже "рациональную" (т.е. дающую только рациональные значения ставок) стратегию σ_P^δ такую, что для всякого n и любой последовательности $s \in \{-1, 1\}^{n+1}$ ходов Казино, если Игрок следует σ_P^δ, то результирующее P-качество позиции после $n+1$ раундов отличается от значения $1/\lambda(P)$ не более, чем на величину $\delta(1 - 2^{-n-1})$. Такую стратегию σ_P^δ можно назвать стратегией δ-сохранения P-качества, где δ-сохранение означает сохранение с точностью до слагаемого δ.

Доказательства следующих двух теорем похожи одно на другое. Нужно просто использовать стратегии δ-сохранения качества вместо стратегий сохранения качества в доказательствах теорем 6 и 8. Мы приведем только набросок доказательства второй теоремы.

Теорема 16. *Для любого непустого множества $P \subseteq \mathbb{D}$ $\lambda^+(P) = 0$ тогда и только тогда, когда Игрок выигрывает $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, \infty)$.*

Теорема 17. *Для любых $P \subseteq \mathbb{D}$ и $h \in (0, 1]$ $\lambda^+(P) \leqslant h$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ Игрок выигрывает $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, h^{-1} - \varepsilon)$.*

Доказательство. Для вывода импликации $\Longrightarrow$ фиксируем $\varepsilon > 0$. Если либо $h = 1$, либо $h < 1$ и $h^{-1} - \varepsilon/2 \leqslant 1$, то Игрок выигрывает, делая нулевые ставки. Поэтому предполагаем, что $h < 1$ и $h^{-1} - \varepsilon/2 > 1$, так что $h < \frac{h}{1-\varepsilon h/2} < 1$. Тогда существует открытое множество G, для которого $P \subseteq G$

и мера $\lambda(G)$ рациональна и удовлетворяет $\lambda(G) < \frac{h}{1-\varepsilon h/2}$. Если Игрок следует любой (но фиксированной) стратегии $\varepsilon/2$-сохранения G-качества, то рано или поздно последовательность s_{n_0} ходов Казино будет удовлетворять $\mathbb{D}_{s_{n_0}} \subseteq G$. И G-качество изменится не более, чем на $\varepsilon/2$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda(G)} - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{B_{n_0}}{\lambda_{s_{n_0}}(G)} = \frac{B_{n_0}}{1}\,.$$

Отсюда имеем

$$B_{n_0} > \frac{1}{\lambda(G)} - \frac{\varepsilon}{2} > \frac{1-\varepsilon h/2}{h} - \frac{\varepsilon}{2} = h^{-1} - \varepsilon.$$

На шагах $n_0 + 1$ и последующих Игроку достаточно делать нулевые ставки, чтобы в результате получить требуемое $\lim_{k\to\infty} B_k = B_{n_0} > h^{-1} - \varepsilon$.

Для доказательства импликации $\Longleftarrow$ для каждого $\varepsilon > 0$ через σ_ε обозначим выигрывающую стратегию для Игрока в игре $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, h^{-1} - \varepsilon)$. Тогда σ_ε будет гарантировать $\sup_{n\in\mathbb{N}} B_n > h^{-1} - \varepsilon$ и в игре $\Gamma(P)$. По теореме 8, п. 2 мы имеем $\lambda^+(P) \leqslant h$.

Следующий аналог следствия 14 позволит вывести измеримость по Лебегу всех подмножеств $\mathbb{D}$ в предположении аксиомы детерминированности. Вывод основан на том, что для игр вида $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P)$ каждый из участников имеет лишь счетное (для Казино двухэлементное) множество возможных ходов.

Следствие 18. *Если множество $P \subseteq \mathbb{D}$ удовлетворяет $\lambda^+(P) > 0$ и $h = (\lambda^+(P) + \lambda^-(P))/2$, то Игрок не выигрывает игру $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, h^{-1})$, а если Казино выигрывает $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, h^{-1})$, то множество P измеримо.*

Покажем, как отсюда следует измеримость всех подмножеств $\mathbb{D}$ в предположении аксиомы детерминированности. Сам результат был впервые получен в [7], а более современное доказательство дано, например, в [8] или в [9]. Начнем с краткого введения в детерминированность.

Рассматриваются игры с двумя участниками, обычно обозначаемыми I и II и выбирающими свои ходы из некоторого фиксированного счетного (непустого) множества X. Участник I начинает и делает ход $x_0 \in X$, участник II отвечает ходом $x_1 \in X$, затем снова I ходит $x_2 \in X$, II отвечает $x_3 \in X$ и т.д. до бесконечности. В результате получается бесконечная последовательность $\vec{x} = \langle x_n \rangle_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ элементов множества X, где участнику I принадлежат все ходы x_{2n}, а участнику II принадлежат все ходы x_{2n+1}. Перед началом игры фиксируется множество $P \subseteq X^{\mathbb{N}}$. Каждый участник знает это множество и перед каждым своим ходом знает все предшествующие ходы (свои и противника). Результат же определяется так: II выигрывает партию, если $\vec{x} \in P$, а иначе выигрывает I. Эта игра обозначается $G(P)$.

Стратегией для одного из участников в $G(P)$ называется правило (или функция), выбирающее ход этого участника на каждом шаге n игры в зависимости от предшествующих ходов. Стратегия называется *выигрывающей*, если, следуя ей, этот участник выигрывает при любых ответах противника. Игра $G(P)$ и множество P называются *детерминированными*, когда один из участников (оба вместе не могут) имеет выигрывающую стратегию.

Отметим, что существование выигрывающей стратегии для участника I в игре $G(P)$ может быть выражено формулой

$$\exists\, x_0\ \forall\, x_1\ \exists\, x_2\ \forall\, x_3\ \cdots\ (\vec{x} \notin P).$$

(Имеется в виду, что стратегия для I выбирает связанные экзистенциальными кванторами переменные x_{2n} на основе значений x_i, $i < 2n$.) Соответственно, существование выигрывающей стратегии для II выражается через

$$\forall x_0 \, \exists x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_3 \, \cdots \, (\vec{x} \in P).$$

Таким образом, предложение *игра $G(P)$ детерминирована* выражается следующей инфинитарной формой закона исключенного третьего:

$$\exists x_0 \, \forall x_1 \, \exists x_2 \, \forall x_3 \, \cdots \, (\vec{x} \notin P) \quad \vee \quad \forall x_0 \, \exists x_1 \, \forall x_2 \, \exists x_3 \, \cdots \, (\vec{x} \in P).$$

Аксиома детерминированности AD состоит в утверждении, что все множества детерминированы, или, иначе, что для любого P игра $G(P)$ детерминирована. Известно, что это чрезвычайно сильная аксиома, на самом деле противоречащая полной аксиоме выбора AC, но совместная с аксиомой зависимого выбора DC. (Последняя утверждает возможность бесконечной цепочки выборов даже при условии, что множество, из которого производится очередной выбор, зависит от результатов предшествующих выборов.) Точнее говоря, совместность AD + DC с аксиомами системы Цермело–Френкеля ZF (без аксиомы выбора) доказана в предположении о том, что некоторое другое предложение (а именно, утверждение о существовании бесконечного числа так называемых *кардиналов Вудина*) совместимо с ZF, причем здесь имеет место эквивалентность этих двух гипотез о совместности. Кардиналы Вудина относятся к группе *больших кардиналов* (вместе, например, с недостижимыми и измеримыми кардиналами, но гораздо больше этих последних); подробнее об этом см. [10; гл. 33].

С другой стороны, можно прямо доказывать детерминированность достаточно простых множеств. Например, Мартин [11] доказал, что все борелевские множества $P \subseteq X^{\mathbb{N}}$ детерминированы. (Напомним, что X не более чем счетное множество, например $X = \mathbb{N}$.)

Теория детерминированности для игр на счетных множествах X вряд ли прямо применима к анализу игр вида $\Gamma(P)$, поскольку в них возможные ходы не ограничены никаким счетным множеством. Однако понятно, что "рациональные" модификации $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P)$, где ходы ограничены счетным множеством, могут быть закодированы как игры вида $G(P')$ для подходящих множеств $P' \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (т.е. ходами являются натуральные числа). Таким образом, AD влечет, что каковы бы ни были множество $P \subseteq \mathbb{D}$ и значение $0 \leqslant h \leqslant \infty$, игра $\Gamma^{\mathbb{Q}}(P, h)$ детерминирована. Ввиду этого следствие 18 дает новое доказательство следующего известного результата (первоначально доказанного в [7]; изложение на русском языке см. в [9]).

Следствие 19. *В предположении аксиомы детерминированности* AD *каждое множество $P \subseteq \mathbb{D}$ измеримо по Лебегу.*

§ 7. "Дискретный" вариант игры

Здесь рассматривается еще одна, более существенная модификация игр вида $\Gamma(P)$. Мы увеличиваем исходный капитал B_0 Игрока до некоторого положительного целого значения, возможно, очень большого, но потребуем, чтобы ставки Игрока были целочисленными и (во избежание некоторых тривиальностей) чтобы Игрок делал ненулевые ставки бесконечно много раз. Понятно, что это в сущности то же самое, что оставить начальный капитал в 1 доллар и разрешить только такие ставки, которые кратны $1/n$ для какого-то фиксированного натурального n. Обозначим эту игру через $\Gamma^{\mathbb{Z}}(P, B_0)$.

Результаты, относящиеся к этой игре, оказываются совсем другими, чем для $\Gamma(P)$, вообще мы покажем, что Казино приводит Игрока к банкротству.

Теорема 20. *Если $B_0 \in \mathbb{N}$ и $P \subseteq \mathbb{D}$ удовлетворяет $\lambda^-(P) > 0$, то Казино имеет стратегию в игре $\Gamma^{\mathbb{Z}}(P, B_0)$, гарантирующую $B_{n_0} = 0$ для некоторого n_0 (тогда и для всех $n > n_0$).*

Доказательство. Идея состоит в том, что в ситуации, когда в исходном варианте игры с вещественными ставками оптимальная стратегия Игрока предлагает ставку очень малой величины (скажем, 1/2 цента), то в "дискретном" варианте Игрок может либо делать ставку 1 доллар (или больше) и тогда терять в качестве позиции и капитале, либо делать нулевую ставку, что позволяет Казино подходящим ответом сохранить ситуацию малого оптимального следующего хода для Игрока, но ведь рано или поздно Игрок по условию должен сделать ненулевую ставку и потерять! Такая ситуация возникает, например, когда относительная мера P в текущей области $\mathbb{D}_{\vec{p}\restriction n}$ близка к 1. После разбиения этой области на две части соответствующие относительные меры будут снова близки к 1, что сохраняет необходимость ставки малой величины. Мы увидим, что ценой малых потерь Казино может заставить Игрока время от времени "посещать" позиции с относительными мерами, близкими к 1. Теперь обратимся к деталям.

Сначала рассмотрим случай замкнутого множества P. Через ℓ обозначим наименьшее натуральное число, большее, чем начальное значение P-качества $B_0/\lambda(P)$. Если Казино следует стратегии снижения P-качества, то текущие значения капитала никогда не достигнут ℓ, а последовательность $\vec{p}$ ходов Казино будет принадлежать множеству P. Достаточно найти такую стратегию для Казино, которая через некоторое конечное число ходов гарантированно снижает текущее P-качество на какую-то постоянную величину (например, 0.6), поскольку после одного такого снижения Казино может как бы начать новую игру для множества $P \cap \mathbb{D}_s$ (s – последовательность ходов Казино к этому моменту) и, применив ту же стратегию, опять снизить качество на 0.6 и так далее.

Следующая стратегия Казино обладает искомым свойством.

Зафиксируем очень малое число $\varepsilon > 0$; точную оценку см. ниже. Найдется конечное множество $\mathscr{I}$ попарно дизъюнктных бэровских интервалов $\mathbb{D}_s$ такое, что $P \subseteq U = \bigcup \mathscr{I}$ и $\lambda(U) < \lambda(P) + (\varepsilon/\ell)^2$. Положим

$$\mathscr{I}' = \left\{ \mathbb{D}_s \in \mathscr{I} : \lambda_s(P) > 1 - \frac{\varepsilon}{\ell} \right\},$$

так что для множеств $U' = \bigcup \mathscr{I}'$ и $P_1 = P \cap U'$ выполнено следующее: $m_1 = \lambda(P_1) \geqslant \lambda(P) - \varepsilon/\ell$.

Первое требование к ε: $\frac{B_0}{\lambda(P) - \varepsilon/\ell} < \ell$.

Второе требование к ε: $\frac{B_0}{\lambda(P) - \varepsilon/\ell} < \frac{B_0}{\lambda(P)} + 0.1$.

Первое требование гарантирует, что начальное P_1-качество не превосходит ℓ, а второе – что начальное P_1-качество отличается не более чем на 0.1 от исходного P-качества. Сначала Казино следует стратегии уменьшения P_1-качества, и на этом этапе капитал Игрока остается меньше ℓ. Но по определению P_1 после какого-то числа раундов конечная последовательность $\vec{p} \restriction n = s$ ходов Казино будет удовлетворять $\mathbb{D}_s \in \mathscr{I}'$. В этот момент мы получим $d = \lambda_s(P) = \lambda_s(P_1) > 1-\varepsilon/\ell$. Поэтому оба соответствующих значения $d_i = \lambda_{s^\frown i}(P) = \lambda_{s^\frown i}(P_1)$, $i = \pm 1$, удовлетворяют $1 \geqslant d_i > 1 - 2\varepsilon/\ell$. Обозначим через B текущее значение капитала на этот момент (т.е. после того хода Казино, который дал последний член последовательности s), и пусть b – следующая ставка Игрока, так что $|b| \leqslant B < \ell$. Тогда величины P_1-качества q, q_{-1}, q_1 для последовательностей s, $s^\frown(-1)$, $s^\frown 1$ соответственно связаны соотношениями

$$q = \frac{B}{d}\,, \qquad q_{-1} = \frac{B-b}{d_{-1}}\,, \qquad q_1 = \frac{B+b}{d_1}\,.$$

В этой позиции стратегия Игрока, сохраняющая P-качество, диктует ставку, очень близкую к 0. Но на самом деле по определению ставки теперь только целочисленны.

Случай 1: Игрок делает ставку $b \neq 0$. Тогда

$$q_{-1} - q_1 = \frac{B(d_1 - d_{-1}) - b(d_{-1} + d_1)}{d_{-1}d_1}\,.$$

Однако $|d_1 - d_{-1}| \leqslant 2\varepsilon/\ell$, так что $B|d_1 - d_{-1}| \leqslant \ell\frac{2\varepsilon}{\ell} = 2\varepsilon$. Но, с другой стороны, $|b|(d_1 + d_{-1}) = |b|2d \geqslant 2d > 2 - 2\varepsilon/\ell$.

Третье требование к ε: $2\varepsilon < 0.1$ и в то же время $2 - 2\varepsilon/\ell > 1.7$.

Если это выполнено, то $|q_{-1} - q_1| > 1.6$, и потому по крайней мере одно из двух возможных новых значений качества находится довольно далеко от текущего значения. Более того, поскольку $d = (d_{-1} + d_1)/2$, мы имеем

$$\begin{aligned}|q_{-1} + q_1 - 2q| &= \left|\frac{B(d_1 - d_{-1})^2 + b(d_{-1}^2 - d_1^2)}{2dd_{-1}d_1}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{B(d_1 - d_{-1})^2 + |b|\,|d_{-1}^2 - d_1^2|}{2dd_{-1}d_1}\right| \leqslant \ell\left[2\left(\frac{\varepsilon}{\ell}\right)^2 + 2\frac{\varepsilon}{\ell}\right].\end{aligned}$$

Четвертое требование к ε: $\varepsilon^2/\ell + 2\varepsilon < 0.2$.

Если это выполнено, то $|q_{-1} + q_1 - 2q| < 0.2$. Следовательно, одно из значений q_{-1}, q_1 удовлетворяет неравенству $q_i < q - 0.7$. Если $q_1 < q - 0.7$, то Казино делает ход 1, а иначе ход -1. Таким образом, P_1-качество уменьшилось, как минимум, на 0.7. С другой стороны, заключительное значение P_1-качества равно заключительному значению P-качества, так как $P \cap \mathbb{D}_s = P_1 \cap \mathbb{D}_s$, а начальное значение P_1-качества не превосходит начального значения P-качества плюс 0.1. Итак, в целом P-качество удалось снизить по меньшей мере на 0.6.

Случай 2: Игрок делает ставку $b = 0$.

В этом случае Казино как бы “выжидает”, делая ход $p_n = \pm 1$, так что относительная мера $\lambda_{s^\frown p_n}(P_1) \geqslant \lambda_s(P_1)$, и потому качество не возрастает. И Казино продолжает играть так до тех пор, пока Игрок не сделает следующую ненулевую ставку. В этот момент, как показано выше для случая 1, Казино может снизить P-качество по меньшей мере на 0.6.

Список литературы

[1] D. Kannan, *An introduction to stochastic processes*, North Holland Series in Probability and Applied Math., North-Holland, New York–Oxford, 1979.

[2] A. A. Muchnik, A. L. Semenov, V. A. Uspensky, “Mathematical metaphysics of randomness”, *Theoret. Comput. Sci.*, **207**:2 (1998), 263–317.

[3] В. А. Успенский, “Четыре алгоритмических лица случайности”, Матем. просв., серия 3, **10**, МЦНМО, М., 2006, 71–108; переиздано отдельной брошюрой: В. А. Успенский, *Четыре алгоритмических лица случайности*, МЦНМО, М., 2006.

[4] J. H. Lutz, “Resource-bounded measure”, *Proceedings of the Thirteenth Annual IEEE Conference on Computational Complexity* (Buffalo, NY, USA, 1998), IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1998, 236–248.

[5] V. Kanovei, M. Reeken, “Loeb measure from the point of view of a coin flipping game”, *Math. Logic Quart.*, **42**:1 (1996), 19–26.

[6] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw–Hill, New York–Düsseldorf–Johannesburg, 1974.

[7] J. Mycielski, S. Swierczkowski, “On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness”, *Fund. Math.*, **54** (1964), 67–71.

[8] Y. N. Moschovakis, *Descriptive set theory*, Stud. Logic Found. Math., **100**, North Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1980.

[9] В. Г. Кановей, *Аксиома выбора и аксиома детерминированности*, Наука, М., 1984.

[10] Th. Jech, *Set theory*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[11] D. A. Martin, “Borel determinacy”, *Ann. of Math.* (2), **102**:2 (1975), 363–371.

В. Г. Кановей (V. G. Kanovei)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: kanovei@mccme.ru

Поступила в редакцию
27.09.2007 и 02.07.2008

Т. Линтон (T. Linton)
Central College, Pella, IA, USA
E-mail: LintonT@central.edu

В. А. Успенский (V. A. Uspensky)
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: vau@uspensky.mccme.rssi.ru