МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 13, № 5 (1973), 717—724

УДК 519.5

# О ПРОБЛЕМЕ СИНГУЛЯРНЫХ КАРДИНАЛОВ

**В. Кановей**

В работе исследуется вопрос существования неконструктивных подмножеств кардиналов из некоторой исходной счетной стандартной транзитивной модели теорий множеств $ZF$, не порождающих новых подмножеств меньших кардиналов той же модели. При этом оказывается, что довольно широкий класс свойств расширенной модели тесно связан с аналогичными свойствами исходной. Библ. 3 назв.

I. Ординалом будем называть всякое множество $x$ такое, что $y \in x \to y \subseteq x$, кардиналом — наименьший ординал данной мощности. $On$ — класс всех ординалов.

Если $\tau$ и $\nu$ — кардиналы, будем писать $\tau = \nu^+$, если $\tau > \nu$ и между $\nu$ и $\tau$ нет других кардиналов. Будем писать $\tau = 2^\nu$, если $\tau$ — мощность множества всех подмножеств $\nu$.

Все кардиналы вида $\nu^+$ назовем непредельными, остальные — предельными. Назовем $\tau$ сингулярным, если он представим в виде $\tau = \Sigma_{\alpha\in\lambda}\nu_\alpha$, где $\lambda < \tau$ и для всякого $\alpha \in \lambda$, $\nu_\alpha < \tau$.

Несингулярные кардиналы назовем регулярными.

Теперь рассмотрим без доказательства ряд фактов, касающихся теории множеств Цермело — Френкеля ($ZF$).

Аксиомой выбора (АС) считается следующее утверждение: Если $X$ — множество, $F$ — функция, определенная на $X$ и принимающая непустые значения, то найдется функция $f$, определенная на $X$ и такая, что $f(x) \in F(x)$ для всякого $x \in X$.

Обобщенная континуум-гипотеза (ОКГ) — это утверждение $2^\nu = \nu^+$ для всякого кардинала $\nu$.

В [2] определена особая функция Гёделя $F(\alpha)$ с областью определения $On$ и областью значений $L$. Класс $L$ называется классом конструктивных множеств; этот класс задается определенной формулой $ZF$.

Аксиомой конструктивности считается такое предложение: все множества входят в $L$. Кратко эта аксиома записывается как $V = L$.

Можно определить функцию $F(\alpha, x)$, отличающуюся от $F(\alpha)$ только тем, что $F(o, x)$ полагается равным не пустому множеству, а $x$. Соответствующий класс значений $F(\alpha, x)$ при фиксированном $x$ обозначается $L(x)$. Он является моделью $ZF$ и $On \subseteq L(x)$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — модель $ZF$. Назовем $\mathfrak{M}$ стандартной моделью, если при $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{M}$ выражения «$x \in y$» и «$\mathfrak{M} \models$ «$x \in y$»» эквивалентны, т. е. отношение принадлежности $\mathfrak{M}$ является сужéнием настоящего отношения на множества $\mathfrak{M}$.

Назовем $\mathfrak{M}$ транзитивной, если выполняется $y \in \mathfrak{M}\ \&\ x \in y \rightarrow x \in \mathfrak{M}$.

В дальнейшем будут рассматриваться только счетные стандартные транзитивные модели.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — модель $ZF + V = L$, $x$ — множество (возможно, не лежащее в $\mathfrak{M}$), $On_{\mathfrak{M}}$ — множество ординалов $\mathfrak{M}$.

Определим

$$\mathfrak{M}(x) = \{y \mid \exists \alpha\ [\alpha \in On_{\mathfrak{M}}\ \&\ y = F(\alpha, x)]\}.$$

Как указывает Коэн в [2], не для всякого $x$ $\mathfrak{M}(x)$ будет моделью. Известен лишь один способ получения множеств $x$ таких, что $\mathfrak{M}(x)$ — модель, — это метод вынуждения.

Рассмотрим теперь такую задачу.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель $ZF + V = L$, $\lambda$ — кардинал в $\mathfrak{M}$. Нужно найти такое множество $a \subseteq \lambda$, чтобы:

1°. $\mathfrak{M}(a)$ — модель $ZF$,

2°. $a \notin \mathfrak{M}$,

3°. если $\nu < \lambda$ — кардинал в $\mathfrak{M}$ и $x \in \mathfrak{M}(a)$, $x \subseteq \nu$, то $x \in \mathfrak{M}$.

Третье свойство можно более грубо изобразить так: $a$ не порождает новых подмножеств, состоящих из кардиналов, меньших чем $\lambda$.

Для регулярных в $\mathfrak{M}$ кардиналов $\lambda$ эта задача полностью решена.

Метод ее решения, приведенный во второй главе настоящей работы, является упрощением метода [3] (там Истон вводит не одно, а сразу много подмножеств $\lambda$ так, что выполняется 3° и в полученной модели $2^\lambda > \lambda^+$).

Для сингулярных же $\lambda$ поиск множества $a$ с указанными свойствами представляет в общем нерешенную задачу.

В третьей главе автор предлагает один из частных результатов по этому вопросу. Для понимания доказательств необходимо знакомство с теорией множеств в рамках, например, [2].

**II.** Итак, пусть $\mathfrak{M}$ — счетная стандартная транзитивная модель $ZF + V = L$, $\lambda \in \mathfrak{M}$ — регулярный кардинал в $\mathfrak{M}$. Все дальнейшие построения проходят в $\mathfrak{M}$.

Построим такое параметрическое пространство $S$: $S_0 = \{ \mid \alpha \mid \mid \alpha < \lambda\}$ — множество символов для ординалов, меньших $\lambda$;

$S_1 = \{a\}$ — множество из одного символа $a$; $S_\beta$, $\beta \geqslant 2$, определяется по общим правилам как множество формул одной свободной переменной и константами из $\bigcup\limits_{\gamma<\beta} S_\gamma$, релятивизованных к $\bigcup\limits_{\gamma<\beta} S_\gamma$.

Вынуждающим условием будет всякая пара $p = \langle u, v\rangle$, где $u \subseteq \lambda$, $v \subseteq \lambda$, $u \cap v = \phi$ и $\mathrm{card}\ (u \cup v) < \lambda$. Как обычно, определим $\langle u, v\rangle \leqslant \langle u', v'\rangle$, если $u \subseteq u'$, $v \subseteq v'$. Множество вынуждающих условий с таким порядком обозначим буквой $P$.

Определим теперь вынуждение элементарных суждений (которыми являются суждения «$\mid\alpha\mid \in a$», где $\alpha < \lambda$) $\langle u, v\rangle$ Forc «$\mid\alpha\mid \in a$», если $\alpha \in u$.

На более сложные суждения определение предиката переносится по индукции известным способом (см. [2]).

ЛЕММА 1.1. *Пусть* $p = \langle u, v\rangle \in P$, $c \in S$. *Тогда* $p \mid\vdash$ «$c \cap \mid\nu\mid$ — *конструктивно*» *для всякого* $\nu < \lambda$ ($\mid\vdash$ — *символ слабого вынуждения, т. е.* $p \mid\vdash A \equiv p$ Forc $\sim\sim A$).

Доказательство. Как легко видеть, предположение противного ведет к наличию такого $q \geqslant p$, что $q \mid\vdash$ «$c \cap \mid\nu\mid$ неконструктивно».

Для получения противоречия построим систему вынуждающих условий $\{p_\alpha \mid \alpha < \nu\}$ такую, что

1) $\alpha \leqslant \beta \to p_\alpha \leqslant p_\beta$,

2) если $\alpha < \beta$, то $p_\beta \Vdash$ «$|\alpha| \in c \cap |\nu|$» или $p_\beta \Vdash$ $\Vdash$ «$|\alpha| \notin c \cap |\nu|$». Построение будет вестись индукцией по $\alpha$. Положим $p_0 = q$.

Пусть построены все $p_\beta$, $\beta < \alpha$ и $\alpha$ — предельный ординал. Пусть $p_\beta = \langle u_\beta, v_\beta \rangle$. Положим тогда $u_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} u_\beta$, $v_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} v_\beta$.

По предположению индукции, условие 1) соблюдается для $\{p_\beta \mid \beta < \alpha\}$, поэтому $u_\alpha \cap v_\alpha = \phi$.

Кроме того, $\operatorname{card} (u_\alpha \cup v_\alpha) = \operatorname{card} (\bigcup_{\beta<\alpha} (u_\beta \cup v_\beta)) < \lambda$, так как $\lambda$ по предположению регулярный кардинал, т. е. не являющийся достижимым.

Таким образом, $p_\alpha = \langle u_\alpha, v_\alpha \rangle$ — условие. Проверка свойств 1) и 2) для расширенной системы тривиальна.

Пусть теперь $\alpha$ — непредельный ординал, $\alpha = \beta + 1$ и $p_\beta = \langle u_\beta, v_\beta \rangle$ построено. Если $p_\beta \Vdash$ «$|\beta| \notin c \cap |\nu|$», полагаем $p_\alpha = p_\beta$, и свойства сохраняются. В противном случае существует $q \geqslant p_\beta$ такое, что $q \Vdash$ «$|\beta| \in c \cap$ $\cap |\nu|$». Выберем такое $q$ и положим $p_\alpha = q$.

Система $\{p_\alpha \mid \alpha < \nu\}$ построена. Положим теперь $u' = \bigcup_{\alpha<\nu} u_\alpha$, $v' = \bigcup_{\alpha<\nu} v_\alpha$. Как и ранее, $p' = \langle u', v' \rangle$— условие. Кроме того, из свойств $\{p_\alpha\}$ следует, что если $\alpha < \nu$, то $p' \Vdash$ «$|\alpha| \in c \cap |\nu|$» или $p' \Vdash$ «$|\alpha| \notin c \cap |\nu|$».

Отсюда легко доказать, что $p \Vdash$ «$c \cap |\nu|$ конструктивно» (например, пусть $y = \{\alpha \in \nu \mid p' \Vdash$ «$|\alpha| \in c \cap$ $\cap |\nu|$»$\}$; тогда очевидно, что $p' \Vdash$ «$c \cap |\nu| = |y|$», где $|y| \in S$ — такой элемент параметрического пространства, наполнение которого всегда равно $y$). Но по построению $p' \geqslant q$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь построение множества, удовлетворяющего 1) — 3), тривиально.

В самом деле, пусть $\{p^n\}_{n\in\omega_0}$ — полная последовательность условий из $P$, а $\bar{a}$ — соответствующее множество. Тогда 2° следует из общих теорем о вынуждении, 1° очевидно, и 3° легко следует из леммы (например, пусть $\mathfrak{M}(\bar{i}) \models$ «$\bar{c} \subseteq \nu$ и не конструктивно». Тогда некоторое $p^n$ из полной последовательности вынуждает неконструктивность $c \cap |\nu|$, что противоречит лемме 1.1). Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Если $\lambda$ — регулярный кардинал в $\mathfrak{M}$, то существует множество $a$, удовлетворяющее* 1° — 3°.

Легко видеть, что такой метод доказательства уже не годится для сингулярных кардиналов.

В следующей главе предлагается метод иного рода, не дающий однако полного решения задачи для сингулярных чисел.

III. Доказывается следующая

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *модель* $ZF + V = L$, $\lambda$ — *кардинал в* $\mathfrak{M}$ *и* $\Omega = \lambda^+$ (*следующий за* $\lambda$ *кардинал* $\mathfrak{M}$). *Тогда существует такое подмножество* $a \subseteq \lambda$, *что* $a \notin \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}(a)$ — *модель* $ZF$ *и в ней не появляется неконструктивных подмножеств ординалов* $\nu < \lambda$ *до шага* $\Omega$.

Ясно, что для полного решения проблемы сингулярных чисел нужно доказать, что в предлагаемой модели ординалы $\lambda$ и $\Omega$ не равномощны.

Вначале договоримся об одной условности. Пусть $S$ — произвольное параметрическое пространство всего с одним символом $g$ для генерического множества.

Чтобы узнать будущие свойства модели $\mathfrak{M}(\bar{g})$, разумно вместо $g$ подставлять множества из модели $\mathfrak{M}$. Пусть $A$ — какое-то суждение об $S$. Возьмем также какое-нибудь множество $x \in \mathfrak{M}$ так, чтобы обеспечить транзитивность. Наполним элементы параметрического пространства $S$, подставив вместо $g$ это множество $x$. Условимся писать $\mathfrak{M}(x) \models A$, если $\mathfrak{M} \models \bar{A}$, где $\bar{A}$ — формула $ZF$ с константами из $\mathfrak{M}$, полученная из $A$ заменой всякого вхождения $c \in S$ на множество $\bar{c}$ (наполненное согласно $x$) и ограничением ограниченных кванторов, входящих в $A$ аналогичным способом (т. е. квантор $\exists_\alpha y$ преобразовывается в $\exists y (y \in \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \bar{S}_\beta))$.

Сильное (синтаксически определяемое) вынуждение будет обозначаться Forc, слабое $\Vdash$, символ истинности $\models$.

Пусть $S$ — параметрическое пространство следующего вида: $S_0 = \{|\alpha| \mid \alpha < \lambda\}$ — ярлыки для всех ординалов, меньших $\lambda$; $S_0$ необходимо для транзитивности построения $S_1 = \{a\}$. $S_\alpha$, $\alpha \geqslant 2$, определяется по общим правилам как множество формул с одной свободной переменной и константами из $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} S_\beta$, релятивизованных также к этому множеству.

В качестве множества $P$ вынуждающих условий возьмем множество всех подмножеств $2^\lambda$, имеющих мощность $\Omega$, упорядоченное согласно включению. Вынуждение элементарных суждений также определяется обычным путем: $p$ Forc «$|\alpha| \in a$» (для $\alpha < \lambda$), если $\forall x \in p\,[\alpha \in x]$.

ЛЕММА 2.1. *Пусть $A$ — ограниченное суждение об $S$ ранга $< \Omega$ (т. е. все константы $A$ — элементы $\bigcup_{\gamma<\Omega} S_\gamma$ и все кванторы $A$ ограничены некоторыми ординалами $\beta < \Omega$), $p$ — вынуждающее условие.*

*Тогда, если $\forall x \in p\,[\mathfrak{M}(x) \models A]$, то $p \Vdash A$ и если $p \Vdash A$, то $\{x \in p \mid \mathfrak{M}(x) \Vdash \sim A\}$ имеет мощность меньше $\Omega$.*

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по рангу формулы $A$ (определяемому, как в [2]) разбором случаев; при этом из кванторов и связок рассматриваются лишь $\sim$, $\&$ и $\exists$.

1. Пусть $A$ — элементарное суждение, $A = $ «$|\alpha| \in a$». Тогда из определения вынуждения элементарных суждений следует

$$\forall x \in p\,[\mathfrak{M}(x) = \text{«}|\alpha| \in a\text{»}] \to \forall x \in p\,[\,|\alpha| \in x] \to$$
$$\to p \Vdash \text{«}|\alpha| \in a\text{»}.$$

Обратно, пусть $p \Vdash$ «$|\alpha| \in a$». Пусть $q = \{x \in p \mid \cdot$ $\cdot\, |\alpha \in x\}$. Ясно, что мощность $q$ меньше $\Omega$ (так как иначе $q \Vdash$ «$|\alpha| \notin a$», т. е. $\{\exp \mid \mathfrak{M}(x) \Vdash$ «$|\alpha| \notin a$»$\}$ имеет мощность $< \Omega$.

2. Пусть $A$—отрицание, $A = \sim B$ и $\forall x \in p\,[\mathfrak{M} \models (x) \models$ $\models \sim B]$. Покажем, что $p \Vdash \sim B$. В самом деле, иначе нашлось бы $q \geqslant p$ такое, что $q \Vdash B$. Теперь по индуктивному предположению находим, что существует по крайней мере одно $x \in q$ такое, что $\mathfrak{M}(x) \models B$. Но это противоречит $q \subseteq p$ и $\forall x \in p\,[\mathfrak{M}(x) \models \sim B]$.

Обратно, если $p \Vdash \sim B$ и нашлось бы $q \in P$, $q \geqslant p$ такое, что $\forall x \in q\,[\mathfrak{M}(x) \models B]$, то, по предположению индукции, $q \Vdash B$, что противоречит $q \geqslant p$ и $p \Vdash \sim B$.

3. Пусть $A = B \,\&\, C$, $\forall x \in p\,[\mathfrak{M}(x) \models B \,\&\, C]$. Но тогда $\forall x \in p\,[\mathfrak{M}(x) \models B]$, откуда по индуктивному предположению $p \Vdash B$. Аналогично, $p \Vdash C$. Значит, $p \Vdash B\,\&$ $\&\, C$.

Обратно, пусть $p \Vdash B \,\&\, C$. Тогда множества $q_1 =$ $= \{x \in p \mid \mathfrak{M}(x) \models \sim B\}$ и $q_2 = \{x \in p \mid \mathfrak{M}(x) \models \sim C\}$ имеют мощность $< \Omega$, т. е. $\{x \in p \mid \mathfrak{M}(x) \models [B \,\&\, C]\}$ имеет мощность $< \Omega$.

4. Пусть $A = \exists_\gamma x B(x)$, $\gamma < \Omega$, и $\forall y \in p\,[\mathfrak{M}(y) \models$ $\models A]$. Предположим противное. Тогда найдется такое ус-

ловие $q \geqslant p$, что $q \,|\!\!\vdash \forall_\gamma x \sim B\,(x)$, т. е. для всякого $c \in \bigcup_{\beta<\gamma} S_\beta$ $q \,|\!\!\vdash \sim B\,(c)$.

Положим для всякого такого $c$ $\underset{c}{q} = \{x \in q \mid \mathfrak{M}\,(x) \models \models B\,(c)\}$. Отметим, что $q = \bigcup_c q_c$ (это следует из того, что для аналогично определенных множеств $p_c$ из предпосылки $\mathfrak{M}\,(x) \models A$ выполняется $p = \bigcup_c p_c$, и $q_c = q \cap p_c$). Значит, по крайней мере одно из $q_c$ имеет мощность $\Omega$. Пусть $r$ — это $q_c$. По определению $q_c$ видно, что $\forall x \in r\,[\mathfrak{M}\,(x) \models B\,(c)]$. Значит, $r \,|\!\!\vdash B\,(c)$, что противоречит $r \geqslant q$ и $q \,|\!\!\vdash \sim B\,(c)$.

Обратно, пусть $p \,\|\!\!- \exists_\gamma\, xB\,(x)$, но некоторое $q \geqslant p$ таково, что $\forall x \in q\,[\mathfrak{M}\,(x) \models \sim \exists_\gamma xB\,(x)]$, т. е. для всякого $c \in \bigcup_{\beta<\gamma} S_\beta$ и $x \in q$, $\mathfrak{M}\,(x) \models \sim B$. Но $q \geqslant p$ и $q \,\|\!\!- \exists_\gamma \cdot \cdot xB\,(x)$. Значит, есть $r \geqslant q$, $r$ Forc $\exists_\gamma\, xB\,(x)$, откуда видно, что есть $c \in \bigcup_{\beta<\gamma} S_\beta$ такое, что $r \,\|\!\!- B\,(c)$. Теперь по индуктивному предположению находим, что есть по крайней мере одно $x \in r$ такое, что $\mathfrak{M}\,(x) \models B\,(c)$; это противоречит указанному выше свойству $q$ и $r \geqslant q$.

5. Пусть $A$ есть $c_1 \in c_2$, где $c_1 \in S_\alpha$, $c_2 \in S_\beta$, $\beta \subseteq \alpha < \Omega$ и $\forall x \in p\,[\mathfrak{M}(x) \models «c_1 \in c_2»]$. В силу транзитивности построения $\mathfrak{M}(x)$ это значит, что $\forall x \in p \exists c \in \bigcup_{\gamma<\beta} S_\gamma\,[\mathfrak{M}(x) \models \models «c_1 = c \,\&\, c \in c_2»]$. Для всякого $c \in \bigcup_{\gamma<\beta} S_\gamma$ обозначим $p_c = \{x \in p \mid \mathfrak{M}(x) \models «c_1 = c \,\&\, c \in c_2»\}$.

Тогда одно из $p_c$ имеет мощность $\Omega$. Пусть $r$ — это $p_c$. Тогда $\forall x \in r\,[\mathfrak{M}\,(x) \models «c_1 = c \,\&\, c \in c_2»]$. Теперь, по предположению индукции,

$$r \,\|\!\!- «c_1 = c \,\&\, c \in c_2», \text{ т. е. } r \,\|\!\!- «c_1 \in c_2».$$

Обратно, пусть $p \,\|\!\!- «c_1 \in c_2»$, но есть $q \geqslant p$ такое, что для всякого $c \in \bigcup_{\gamma<\beta} S_\gamma$ и $x \in q$, $\mathfrak{M}(x) \models «c_1 \neq c \vee c \notin c_2»$. Но тогда $q \,\|\!\!- «c_1 \neq c \vee c \notin c_2»$ для всякого $c \in \bigcup_{\gamma<\beta} S_\gamma$, т. е. $q \,\|\!\!- «c_1 \notin c_2»$, что противоречит $q \geqslant p$.

6. Пусть $A$ есть $c_1 = c_2$, $c_1 \in S_2$, $c_2 \in S_\beta$, $\alpha \leqslant \beta < \Omega$. Тогда $p \,\|\!\!- A \to \forall c \in \bigcup_{\gamma<\alpha} S_\gamma\,[p \,\|\!\!- «c \in c_1 \equiv c \in c_2»]$, откуда, по предположению индукции, для всякого $c \in \bigcup_{\gamma<\alpha} S_\gamma$ $\{x \in p \mid \mathfrak{M}\,(x) \models «\sim [c \in c_1 \equiv c \in c_2]»\}$ имеет мощность $< \Omega$,

т. е., учитывая транзитивность построения $\mathfrak{M}(x)$, $\{x \in \in p \mid \mathfrak{M}(x) \models « \sim [c_1 = c_2]»\}$ имеет мощность $< \Omega$.

Обратно, пусть $\forall x \in p\, [\mathfrak{M}(x) \models «c_1 = c_2»]$. Тогда для всякого $c \in \bigcup_{\gamma<\alpha} S_\gamma$ $\mathfrak{M}(x) \models «c \in c_1 \equiv c \in c_2»$, т. е. $p \Vdash «c \in \in c_1 \equiv c \in c_2»$, откуда сразу ясно, что $p \Vdash «c_1 = c_2»$.

7. Последний случай, $A = «c_1 \in c_2»$, $c_1 \in S_\alpha$, $c_2 \in S_\beta$, $\alpha < \beta < \Omega$. Пусть $c_2 = A(x, c', \ldots, c^n)$. Если $p \Vdash «c_1 \in c_2»$, то $p \Vdash A(c_1, c', \ldots, c^n)$ и $\forall x \in p\, [\mathfrak{M}(x) \models A(c_1, c^1, \ldots, c^n)]$, т. е. $\forall x \in p\, [\mathfrak{M}(x) \models «c_1 \in c_2»]$ (за исключением, может быть, $< \Omega$ таких $x$).

Обратно, пусть $\forall x \in p\, [\mathfrak{M}(x) \models «c_1 \in c_2»]$. Тогда

$$\forall x \in p\, [\mathfrak{M}(x) \models A(c_1, c^1, \ldots, c^n)],\ p \Vdash A(c_1, c^1, \ldots, c^n)$$

и $p \Vdash «c_1 \in c_2»$. Разбором случаев лемма доказана.

Теперь доказательство теоремы 2 получается несложными выкладками.

Пусть $c \in \bigcup_{\alpha<\Omega} S_\alpha$ и условие $p$ таковы, что $p \Vdash$ «$c$ — неконструктивно и $c \subseteq |\tau|$» для некоторого $\tau < \lambda$.

Для всякого подмножества $y \subseteq \tau$ положим $p_y = \{x \in \in p \mid \mathfrak{M}(x) \models «c = |y|»\}$. Рассмотрим $q = p - \bigcup_{y \subseteq \tau} p_y$. Ясно, что мощность $q$ меньше $\Omega$ (ибо иначе $q$ было бы условием и $\forall x \in q\, [\mathfrak{M}(x) \models «c \not\subseteq |\tau|»]$, что противоречит лемме 2.1 и $q \geqslant p$). Также легко видеть, что $\{y \mid y \subseteq \subseteq \tau\}$ имеет мощность $< \Omega$. Значит, одно из $p_y$ имеет мощность $\Omega$. Пусть $r$ — это $p_y$. Тогда $\forall x \in r\, [\mathfrak{M}(x) \models «c = =|y|»]$, откуда по лемме 2.1 находим, что $r \models «c = y»$ (где $|z|$ — такой элемент параметрического пространства, что $|\bar{z}| = z$ всегда; его существование доказано, например, в [1]), т. е. $r \Vdash$ «$c$ конструктивно».

Полученное противоречие доказывает теорему.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 28.XII.1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М., 1948.
[2] Коэн, Р. J., Теория множеств и континуум гипотеза, М., 1969.
[3] Easton W. B., Powers of regular cardinals Ann. Math. Logic, 1, № 2 (1970), 69—112.