МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 17, № 6 (1975), 939—946

УДК 517.11

О МАЖОРИРОВАНИИ НАЧАЛЬНЫХ СЕГМЕНТОВ СТЕПЕНЕЙ КОНСТРУКТИВНОСТИ

В. Г. Кановей

Пусть $\mathfrak{M}$ — фиксированная счетная стандартная транзитивная модель $ZF+V=L$. Рассматривается структура Mod степеней конструктивности относительно $\mathfrak{M}$ всех действительных чисел x таких, что $\mathfrak{M}(x)$ — модель. Начальный сегмент $Q \subseteq \mathrm{Mod}$ называется модельным, если некоторое расширение $\mathfrak{M}$ с теми же ординалами содержит степени конструктивности действительных чисел из Q и только их (и является моделью ZFC). Доказывается теорема: Если Q — модельный начальный сегмент, то $\exists x\, [\forall y[x \in \mathrm{Mod}\ \&$

$$[y \in Q \to y < x]]\ \& \forall z \exists y\, [z < x \to y \in Q \& \sim [y < z]]].$$

Библ. 4 назв.

Введение. Пусть L — счетная стандартная транзитивная (с. с. т.) модель ZFC, $\mathfrak{M} \models V = L$. Для $x \subseteq \omega_0$ образуем $L(x)$ — конструктивное замыкание $L \cup \{x\}$ по ординалам из L (см. [1]). Пусть $\mathrm{Mod}^0 = \{x \mid L(x)$ — модель $ZFC\ \&\ x \subseteq \omega_0\}$.

Введем на Mod^0 порядок: $x \preccurlyeq y \equiv x \in L(y)$, эквивалентность:

$$x \approx y \equiv x \preccurlyeq y \ \&\ y \preccurlyeq x.$$

Пусть Mod — факторизация; $[x] = \{y \mid y \approx x\}$; $[x] \leqslant [y] \equiv x \preccurlyeq y$; $\mathrm{Mod} = \{[x] \mid x \in \mathrm{Mod}^0\}$.

Пусть Q — начальный сегмент Mod. Назовем Q модельным сегментом, если $\exists \mathfrak{M}\, [L \subseteq \mathfrak{M}\ \&\ \mathfrak{M}$ — с. с. т. модель $ZFC\ \&\ \mathrm{On}^{\mathfrak{M}} = \mathrm{On}^L\ \&\forall x\, [x \in \mathfrak{M}\ \&\ x \subseteq \omega_0 \to [x] \in Q]$ $\&\ \forall x\, [[x] \in Q \to x \in \mathfrak{M}]]$.

Тривиально доказывается, что если Q — модельный начальный сегмент Mod, то он мажорируется некоторым $[x] \in \mathrm{Mod}$. В настоящей статье рассматривается вопрос наличия наименьшей мажоранты, а именно доказывается

ТЕОРЕМА А. *Пусть Q — модельный начальный сегмент* Mod. *Тогда найдется такое* $[x] \in \mathrm{Mod}$, *что*

$$\forall y\,[[y] \in Q \to [y] \preccurlyeq [x]]\ \&\ \forall z \exists y\,[[z] \preccurlyeq [x]\ \&\ [z] \neq [x] \to$$
$$\to [y] \in Q\ \&\ \sim [[y] \preccurlyeq [z]]].$$

Для доказательства этой теоремы доказывается вспомогательная теорема.

ТЕОРЕМА В. *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *с. с. т. модель* ZFC, *имеющая вид* $L(X)$, *где* $X \in \mathfrak{M}$, $X \subseteq \omega_1^{\mathfrak{M}}$. *Тогда найдется такое* $x \subseteq \omega_0$, *что* $\mathfrak{M}(x)$ — *модель* ZFC,

$$L(x) = \mathfrak{M}(x) \quad \text{и} \quad \forall y\,[y \in (\mathfrak{M}(x) - \mathfrak{M})\,\&\,y \subseteq \omega_0 \to x \in \mathfrak{M}(y)].$$

Последняя теорема является, очевидно, усилением результата Сакса [2] о минимальных степенях (усиление касается $L(x) = \mathfrak{M}(x)$).

Покажем кратко, как из В следует А. Пусть Q — модельный начальный сегмент Mod. Значит, существует модель $\mathfrak{N}^0$,

$$\mathfrak{N}^0 \models ZFC,\ \mathrm{On}^L = \mathrm{On}^{\mathfrak{N}^0},\ \forall x\,[x \in \mathfrak{N}^0\ \&\ x \subseteq \omega_0 \to [x] \in Q],$$
$$\forall x\,[[x] \in Q \to x \in \mathfrak{N}^0].$$

В силу $\mathfrak{N}^0 \models ZFC$ в $\mathfrak{N}^0$ найдется полное упорядочение $S(\omega_0) \cap \mathfrak{N}^0$ по типу $\exp^{\mathfrak{N}^0}(\omega_0)$ (обозначения: $S(u) = \{x \mid x \subseteq u\}$, $\exp(u) = \mathrm{card}\,(S(u))$ в предположении аксиомы выбора). Пусть $X = \{\langle x_\alpha, \alpha\rangle \mid \alpha \in \exp^{\mathfrak{N}^0}(\omega_0)\}$ — это полное упорядочение. Рассмотрим $\mathfrak{N} = L(X)$. Легко видеть, что $X \in \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \models ZFC$, $\forall x\,[x \in \mathfrak{N} \cap S(\omega_0) \to [x] \in Q]$, $\forall x\,[[x] \in Q \to x \in \mathfrak{N}]$. Легко видеть также, что если расширить $\mathfrak{N}$ генерической «склейкой» $\omega_1^{\mathfrak{N}}$ и $\exp^{\mathfrak{N}}(\omega_0)$ (взяв в качестве вынуждающих условий функции $f\colon D \to \exp^{\mathfrak{N}}(\omega_0)$, где D — произвольное счетное подмножество $\omega_1^{\mathfrak{N}}$ и, естественно, $f \in \mathfrak{N}$) до модели $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}$ будет удовлетворять тем же свойствам, что и $\mathfrak{N}$, и дополнительно условию теоремы В. Ясно, что если $x \subseteq \omega_0$ таково, как в теореме В, то $[x]$ будет искомым теоремы А. Поэтому рассмотрим В.

Если $\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям теоремы В, то в $\mathfrak{M}$ легко подобрать множество $X = \{\langle \alpha, x_\alpha\rangle \mid \alpha \in \omega_1^{\mathfrak{M}}\}$ такое, что $\forall \alpha\,[\alpha \in \omega_1^{\mathfrak{M}} \to x_\alpha \subseteq \omega_0]$, $\mathfrak{M} = L(X)$, $\forall \alpha\,[\alpha \in \omega_1^{\mathfrak{M}} \to \alpha$ счетно в $L(x_\alpha)]$ и $\forall \alpha\,[\alpha \in \omega_1^{\mathfrak{M}} \to \{\langle \beta, x_\beta\rangle \mid \beta \in \alpha\} \in L(x_\alpha)]$. Считаем, также, что

$\forall x\, [x \in \mathfrak{M} \cap S(\omega_0) \to \mathfrak{M} \neq L(x)]$, так как иначе теорему можно было бы доказать методом [2], выбрав перфектно-генерическое относительно $\mathfrak{M} = L(x)$, $a \subseteq \omega_0$ так, что $\forall n\, [n \in x \equiv 2n \in a]$. В этом случае, очевидно, можно предполагать

$$\forall \alpha\, [\alpha \in \omega_1^{\mathfrak{M}} \to x_\alpha \notin L(\{\langle \beta, x_\beta \rangle \mid \beta \in \alpha\})].$$

На протяжении §§ 1—5 предполагается, что $\mathfrak{M} = L(X)$ удовлетворяет вышеперечисленным условиям.

§ 1. Основные обозначения.

1.1. Пусть для $\lambda \in \omega_1^{\mathfrak{M}}$ $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{M}(\{\langle \alpha, x_\alpha \rangle | \alpha \in \lambda\})$, $\leqslant(\lambda)$—канонический полный порядок на $\mathfrak{M}_\lambda$. Семейство $\{\leqslant(\lambda) \mid \lambda \in \omega_1^{\mathfrak{M}}\}$ можно выбрать так, что $\lambda \leqslant \mu \to \leqslant(\lambda)$ совпадает на $\mathfrak{M}_\lambda$ с индуцированным $\leqslant(\mu)$. Пусть $\theta_\lambda = \exp^{\mathfrak{M}_\lambda}(\omega_0)$. Считаем, что $\leqslant(\lambda)$ упорядочивает $\mathfrak{M}_\lambda \cap S(\omega_0)$ по типу θ_λ. Определим для $x \in \mathfrak{M}_\lambda$ $N_\lambda(x)$ — номер x в смысле $\leqslant(\lambda)$ и для $x \in \mathfrak{M}_{\omega_1}$ $\lambda(x) = \inf\{\lambda \mid x \in \in \mathfrak{M}_\lambda\}$.

1.2. Пусть F_x — какая-то эффективная кодировка замкнутых подмножеств $S(\omega_0)$ действительными числами, причем ϕ — код ϕ и ω_0 — код $S(\omega_0)$. Будем писать $x \leqslant_F y \equiv F_y \subseteq F_x$, $x \leqslant_{FB} y \equiv F_y \subseteq F_x \,\&\, F_y$ нигде не плотно в F_x; $x \wedge y$ — код $F_x \cap F_y$; $x \vee y$ — код $F_x \vee F_y$; $l(x)$ — длина наименьшего сегмента в $S(\omega_0)$, целиком содержащего F_x.

Если $f\colon K \to S(\omega_0)$, то $\bigwedge\limits_{i \in K} f(i)$ будем обозначать код $\bigcap\limits_{i \in K} F_{f(i)}$ и $\bigvee\limits_{i \in K} f(i)$ — код $\bigcup\limits_{i \in K} F_{f(i)}$ (если это множество замкнуто).

1.3. Пусть $Z \subseteq S(\omega_0) \cap \mathfrak{M}$. Назовем Z *λ-полуоднородным*, если $\forall x \forall \mu \exists y\, [x \in Z \,\&\, \mu \in \lambda \to \lambda(y) \geqslant \mu \,\&\, y \geqslant_{FB} x \,\&\, y \in Z \,\&\, F_x$ — совершенно].

Пусть $Y \subseteq S(\omega_0) \cap \mathfrak{M}_\lambda$ λ-полуоднородно. Семейство $S = \{\langle i, m, S_m^i \rangle \mid m \in \omega_0 \,\&\, i \in 2\}$ называется λY-семейством, если

(i) $\forall m \forall i\, [S_m^i \subseteq Y]$;

(ii) $\forall m \forall i \forall x \forall y\, [x \in S_m^i \,\&\, y \in Y \,\&\, y \geqslant_F x \to y \in S_m^i]$;

(iii) $\forall m \forall x \forall i \forall y\, [x \in S_m^i \,\&\, y \in S_m^i \to x \vee y \in S_m^i]$;

(iv) $\forall m \forall x \exists i \exists y\, [x \in Y \to y \geqslant_{FB} x \,\&\, y \in S_m^i]$;

(v) $\forall m\, [S^0_m \cap S^1_m = \phi]$;

(vi) $\forall x \forall y \exists m \exists u \exists v\, [x \in Y \,\&\, y \in Y \to u \geqslant_{FB} x \,\&\, v \geqslant_{FB} y \,\&\, u \in S^0_m \,\&\, v \in S^1_m]$.

§ 2. Непредельный случай.

2.1. Пусть $Y \subseteq S(\omega_0) \cap \mathfrak{M}_{\lambda+1}$ $(\lambda+1)$-полуоднородно, $S \in \mathfrak{M}_{\lambda+1}$ — $(\lambda+1)Z$-семейство, $z \in Y$. Определим на $S(\omega_0)$ функцию $H_{\lambda+1, S, z}(x) = y$ так:

(i) если $x \notin F_z$, считаем y неопределенным, иначе, полагаем $z_0 = z$;

(ii) строим $\langle \bar{t}, \bar{u} \rangle = \min\limits_{\leqslant(\lambda+1)} \{\langle t, u\rangle \mid t \wedge u = \phi \,\&\, t \vee u \geqslant_{FB} z_0 \,\&\, l(u) + l(t) \leqslant (1/2) l(z_0) \,\&\, \exists m\, [t \in S^0_m \,\&\, u \in S^1_m]\}$,

$$\langle \bar{\bar{t}}, \bar{\bar{u}} \rangle = \min_{\leqslant(\lambda+1)} \{\langle t, u\rangle \mid t \wedge u = \phi \,\&\, t \vee u \geqslant_{FB} z_0 \,\&\, l(u) + l(t) \leqslant (1/2)\, l(z_0) \,\&\, \exists m\, [t \in S^0_m \,\&\, u \in S^1_m] \,\&\, x \in F_u \cup F_t\};$$

(iii) если $\langle \bar{\bar{t}}, \bar{\bar{u}} \rangle$ или $\langle \bar{t}, \bar{u} \rangle$ неопределенны, считаем y неопределенным. Иначе, при $\langle \bar{t}, \bar{u} \rangle = \langle \bar{\bar{t}}, \bar{\bar{u}} \rangle$ считаем $0 \in y$, а при $\langle \bar{t}, \bar{u} \rangle \neq \langle \bar{\bar{t}}, \bar{\bar{u}} \rangle$ — $0 \notin y$. Полагаем $z_1 = \bar{\bar{u}}$ или $z_1 = \bar{\bar{t}}$ в зависимости от $x \in F_{\bar{\bar{u}}}$ или $x \in F_{\bar{\bar{t}}}$;

(iv) переходим к (ii) с заменой z_0 на z_1 и распознаем $1 \in y$ и т. д.

ЛЕММА 2.2. *Пусть* λ, Z, Y, S, z *как в* 2.1. *Тогда* $\mathfrak{M}_{\lambda+2} \models \exists x \forall y\, [x \subseteq \omega_0 \,\&\, F_x$ — *совершенно* $\&\, [y \in F_x \to H_{\lambda+1, S, z}(y) = x_{\lambda+1}]]$.

Доказательство проводим в $\mathfrak{M}_{\lambda+2}$. Пусть $E = 2^{\langle\omega_0\rangle}$, для $t \in E$ пусть $h(t) = D(t)$ — область определения t; $h(t) \in \omega_0$. Пусть $\phi \in E$, $h(\phi) = 0$; $\langle 0\rangle \in E$, $\langle 1\rangle \in E$, $h(\langle 0\rangle) = h(\langle 1\rangle) = 1$.

Пусть для $u, t \in E$ $ut \in E$ таково, что

$$h(ut) = h(u) + h(t);\quad k < h(u) \to ut(k) = u(k);$$
$$k < h(t) \to ut(h(u) + k) = t(k).$$

Определим $u \leqslant t$, если $\exists v\, [v \in E \,\&\, uv = t]$.

Пусть $f\colon E \to Y$ — такая функция, что

(i) $s \leqslant t \to f(s) \leqslant_{FB} f(t)$, $l(f(s)) \leqslant 1/2^{h(s)}$, $f(\phi) = z$;

(ii) $f(s\langle 0\rangle) \wedge f(s\langle 1\rangle) = \phi$;

(iii) если $h(s) \in x_{\lambda+1}$, то $\langle f(s\langle 0\rangle), f(s\langle 1\rangle)\rangle = \min\limits_{\leqslant(\lambda+1)} \{\langle t, u\rangle \mid F_t$ и F_u — совершенные $\& (t \vee u) \geqslant$
$\geqslant_{FB} f(s) \& \exists m [t \in S^0_m \& u \in S^1_m] \& l(u) + l(t) \leqslant$
$\leqslant (^1/_2) l(f(s))\} = \langle \bar{t}, \bar{u}\rangle$;

(iv) если $h(s) \notin x_{\lambda+1}$, то $\langle f(s\langle 0\rangle), f(s\langle 1\rangle)\rangle = \min\limits_{\leqslant(\lambda+1)} \{\langle t, u\rangle \mid t \vee u \geqslant_{FB} f(s) \& \exists m [t \in S^0_m \& u \in S^1_m] \& F_t$ и F_u — совершенные $\& (t \vee u) \wedge (\bar{t} \vee \bar{u}) = \phi \& l(u) + l(t) \leqslant (^1/_2) l(f(s))\}$.

Рассмотрим $x = \bigwedge\limits_{n\in\omega_0} \bigvee\limits_{h(s)=n} f(s)$. Легко видеть, что F_x — совершенно (доказательство аналогично [3]), а равенство $H_{\lambda+1, S, z}(y) = x_{\lambda+1}$ для всякого $y \in F_x$ следует из определения F_x и функции H.

Функцию f такого рода легко можно построить, учитывая полуоднородность Y и свойства S.

Лемма доказана.

Отметим, что в силу свойств $X = \{\langle\alpha, x_\alpha\rangle \mid \alpha \in \omega_1^{\mathfrak{M}}\}$ построенное x не может лежать в $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$, так как, взяв в $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$ какое-то $y \in F_x$, мы могли бы построить $x_{\lambda+1} = H_{\lambda+1, S, z}(y)$ в $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$, чего нельзя сделать в силу $x_{\lambda+1} \notin \mathfrak{M}_{\lambda+1}$.

Наименьшее в смысле $\leqslant(\lambda+2)$ x, построенное способом 2.2, будем обозначать $x = W(\lambda+1, S, z)$.

§ 3. Предельный случай.

3.1. Пусть λ предельный, $Y \subseteq S(\omega_0) \cap \mathfrak{M}_\lambda$ λ-полуоднородно, $S \in \mathfrak{M}_\lambda$ — λY-семейство, $z \in Y$.

Определим $H_{\lambda, S, z}(x)$ аналогично 2.1 (только $\min\limits_{\leqslant(\lambda+1)}$ меняется на $\min\limits_{\leqslant(\lambda)}$).

ЛЕММА 3.2. *Пусть* $\lambda \in \omega_1^{\mathfrak{M}}$ *пределен*, Z, Y, S, z *как в* 3.1. *Тогда* $\mathfrak{M}_{\lambda+1} \models \exists x \forall y \forall \mu [x \subseteq \omega_0 \& F_x$ — *совершенно* $\& [y \in F_x \to H_{\lambda, S, z}(y) = x_\lambda] \& [\mu < \lambda \to \exists x' [x' \in \mathfrak{M}_\lambda \& \lambda(x') \geqslant \mu \& x \geqslant_{FB} x']]]$.

Доказательство (в $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$). Для доказательства достаточно построить функцию $f\colon E \to Y$, удовлетворяющую 2.2, (i) — (iv) (с заменой $\min\limits_{\leqslant(\lambda+1)}$ на $\min\limits_{\leqslant(\lambda)}$) и дополнительному требованию:

(v) найдется возрастающая функция $\mu\colon \omega_0 \to \lambda$ такая, что $\sup\limits_{n\in\omega_0} \mu(n) = \lambda$ и $\forall s [s \in E \to \lambda(f(s)) \geqslant \mu(h(s))]$.

Требование (v) нужно для обеспечения дополнительного требования к x.

Как и в 2.2., считаем лемму доказанной.

Пусть $x = W(\lambda, S, z)$ — наименьшее в смысле $\leqslant (\lambda + 1)$ $x \in \mathfrak{M}_{\lambda+1}$, которое может быть построено как в лемме 3.2.

Опять отметим $x \notin \mathfrak{M}_{\lambda+1}$.

3.3. Можно считать, что если $S_1 \neq S_2$, $z_1 \neq z_2$, то $F_{W(\lambda,S_1,z_1)} \cap F_{W(\lambda,S_2,z_2)} = \phi$ (при любом $\lambda \in \omega_1$).

§ 4. Приступим к доказательству теоремы В.

Построим в $\mathfrak{M}$ семейство множеств $\{Z_\alpha \mid \alpha \in \omega_1^{\mathfrak{M}}\}$, удовлетворяющее таким свойствам:

(i) $Z_\alpha \subseteq S(\omega_0)$, $Z_\alpha \in \mathfrak{M}_\alpha$ α-полуоднородно;

(ii) $Z_\alpha \subseteq Z_{\alpha+1}$, $Z_{\alpha+1} - Z_\alpha \neq \phi$;

(iii) $\alpha < \beta \mathbin{\&} x \in Z_\beta \mathbin{\&} \lambda(x) = \beta \to \exists y\ [y \in Z_\alpha \mathbin{\&} x \geqslant_{FB} y \mathbin{\&} \lambda(y) = \alpha]$;

(iv) если Z_λ построено, то полагаем $\bar{Z}_\lambda = \{W(\lambda, S, z) \mid \exists Y [Y \subseteq Z_\lambda^*\ \lambda$-полуоднородно, $\& Y \in \mathfrak{M}_\lambda \mathbin{\&} S$—$\lambda Y$-семейство $\& z \in Y]\}$ и $Z_{\lambda+1} = Z_\lambda \cup \{y \mid F_y$ — совершенно $\& \exists x\ [x \in \bar{Z}_\lambda \mathbin{\&} y \geqslant_F x] \mathbin{\&} y \in \mathfrak{M}_{\lambda+1}\}$; где $Z_\lambda^* = Z_\lambda$ при предельном λ и $Z_\lambda^* = Z_\lambda - Z_\beta$ при $\lambda = \beta + 1$.

(v) $\alpha < \beta < \omega_1^{\mathfrak{M}} \mathbin{\&} x \in Z_\alpha \to \exists y\ [y \in Z_\beta \mathbin{\&} \lambda(y) = \beta \mathbin{\&} y \geqslant_{FB} x]$;

(vi) Для предельных λ $Z_\lambda = \bigcup_{\alpha \in \lambda} Z_\alpha$;

(vii) $Z_0 = \mathfrak{M}_0 \cap S(\omega_0) = L \cap S(\omega_0)$.

Легко видеть, что пункты (vii), (vi), (iv) определяют построение Z_α, причем все остальные пункты будут соблюдаться (что следует из лемм 2.2, 3.2 и определения $W(\lambda, S, z)$).

Также очевидно, что $\{\langle Z_\alpha, \alpha\rangle \mid \alpha \in \lambda\} \in \mathfrak{M}_\lambda$. Положим $P = \bigcup_{\alpha \in \omega_1} Z_\alpha$.

§ 5. Свойства Р как множества вынуждающих условий.

5.1. Пусть $G \subseteq P$ — $\mathfrak{M}$-генерический фильтр на P. Очевидно, что G однозначно определяет действительное число $a = a_G = \bigcap_{x \in G} F_x$ и определяется им: $G = G_a = \{x \mid x \in P \mathbin{\&} a \in F_x\}$.

Пусть $G \subseteq P$ — $\mathfrak{M}$-генерический фильтр на P.

ЛЕММА 5.2.

$$\{\langle \alpha, x_\alpha\rangle \mid \alpha \in \omega_1^{\mathfrak{M}}\} \in L(a_G).$$

Доказательство. Покажем, что $x_0 \in L(a_G)$. В самом деле, $Z_0 \in L$ и $a_G \in F_x$ для некоторого $x \in \overline{Z}_0$ (это следует из 4.1 (iii), (iv), (v) и (vii)). Значит, $x_0 = H_{0Sz}(a_G)$ для некоторых $S, z \in \mathfrak{M}_0$, т. е. $S, z \in L$. Значит, H_{0Sz} определима в L и $x_0 \in L(a_G)$.

Пусть мы уже доказали

$$\{\langle\alpha, x_\alpha\rangle \mid \alpha \in \lambda\} \in L(a_G).$$

Тогда таким же способом строим $x_\lambda = H_{\lambda Sz}(a_G)$ и имеем $x_\lambda \in L(a_G)$.

Ясно, что таким образом по a_G и L мы эффективно восстановим все x_α (ведь и Z_α строились эффективно). Лемма доказана.

ЛЕММА 5.3. *Для некоторого $\mathfrak{M}$-генерического $G \subseteq P$, a_G минимально над $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть (в $\mathfrak{M}$) $c \in V^{(P)}$ и $p \in P$, причем

$$d \Vdash «c \in \check{\omega}_0 \;\&\; c \notin \mathfrak{M} \;\&\; a_G \notin \mathfrak{M}(c)».$$

Ясно, что можно считать $p = \omega_0$ (код $S(\omega_0)$). Образуем

$$S_m^0 = \{p \mid p \in P \;\&\; p \Vdash «\check{m} \notin c»\}$$

и

$$S_m^1 = \{p \mid p \in P \;\&\; p \Vdash «\check{m} \in c»\}.$$

Легко видеть, что $S = \{\langle i, m, S_m^i\rangle \mid m \in \omega_0 \;\&\; i \in 2\}$ удовлетворяет 1.3 (i)—(vi) с заменой Y на P.

В силу нашего требования к $\mathfrak{M}$ ясно, что $S \in \mathfrak{M}_{\omega_1} = \mathfrak{M}$,

Значит, методом Сколема — Левенгейма можно построить такой предельный $\lambda \in \omega_1^{\mathfrak{M}}$ и такое $Y \subseteq Z_\lambda$, что $Y \in \mathfrak{M}_\lambda$, Y λ-полуоднородно; $S_m^i(\lambda) = \{p \mid p \in S_m^i \cap \mathfrak{M}_\lambda\} \in \mathfrak{M}_\lambda$; $S(\lambda) = \{\langle i, m, S_m^i(\lambda)\rangle \mid m \in \omega_0 \;\&\; i \in z\}$ — λY-семейство. Рассмотрим $x = W(\lambda, S(\lambda), \omega_0) \in \mathfrak{M}_{\lambda+1} \cap P$. Как в [3] или [2], нетрудно доказать, что $x \Vdash «a_G \in L(c, \check{x}, \check{S}(\lambda))»$, т. е. $x \Vdash \langle\!\langle a_G \in \mathfrak{M}(c)\rangle\!\rangle$, что противоречит предположению. Лемма доказана.

Из леммы 5.2 и 5.3 немедленно следует теорема В.

Теорема B и некоторые подобные опубликованы в [4].

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 15.I.1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I e n s e n R. B., Modelle der Mengenlehre, Lectures Notes in math., **37**, Berlin, Springer — Verlag, 1967.

[2] S a c k s G. E., Forcing with perfect closed sets, Proc. Symp in Pure Math., **13**, № 1 (1971), 331—357.

[3] I e n s e n R. B., Definable set of minimal degree, Math. Logik and Found. of Set Theory, North — Holl, Amst., 1968, 122—128.

[4] К а н о в е й В. Г., Определимость с помощью степеней конструктивности, Третья Всесоюзная конференция по математической логике, Новосибирск, Изд-во СО АН СССР 1974, 92—94.