МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ
т. 23, № 1 (1978)

УДК 517.5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ЛУЗИНА

В. Г. Кановей

В [1], [2] Н. Н. Лузин опубликовал (с доказательством) одну теорему, утверждающую неборелевость построенного им очень простого множества. М. А. Лунина [3] обнаружила неточность в доказательстве Лузина. Доказывается, что теорема Лузина тем не менее справедлива. Библ. 6 назв.

В 1926 г. Н. Н. Лузин описал с помощью «законов арифметики» некоторое множество и предложил доказательство того, что это множество не является борелевским (из метода доказательства вытекало, в частности, что рассматриваемое множество оказывалось аналитическим). Построение примера и соответствующее доказательство составляют содержание заметки Н. Н. Лузина [1], а также раздела 61 его мемуара [2].

Как обнаружила М. А. Лунина [3], предложенное Н. Н. Лузиным доказательство неверно. Тем не менее можно показать, что «арифметический пример» Н. Н. Лузина обладает желаемыми свойствами, т. е. является примером аналитического, но не борелевского множества. Здесь дается доказательство этого факта.

Н. Н. Лузин рассматривал подмножества совокупности всех иррациональных чисел отрезка [0, 1]. Иногда бывает более удобно (что мы и будем делать) рассматривать подмножества бэровского пространства [4, стр. 227], состоящего из всевозможных последовательностей натуральных чисел и гомеоморфного совокупности всех иррациональных чисел отрезка [0,1] в силу представления иррационального числа x непрерывной дробью:

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k + \ddots}}}$$

В системе обозначений [5], [6], связанных с проективной иерархией, рассматриваемое в [1] множество определяется следующим образом. Вводится бэровское пространство $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ всех функций из натурального ряда $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ в $\mathbf{N}$ (т. е. всех последовательностей натуральных чисел). Функция (последовательность) $\alpha = (\alpha_n,\ n \in \mathbf{N}) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ называется составной [1], если «среди ее членов имеется бесконечное множество чисел, делящихся одно на другое». Совокупность E всех составных последовательностей и образует пример Н. Н. Лузина.

Утверждение [1]. *Множество E является аналитическим, но не борелевским.*

В определении составной последовательности имеется неясность. Именно, допускается ли, чтобы среди элементов «бесконечного множества чисел» были одинаковые натуральные числа, являющиеся различными (т. е. с разными номерами) членами последовательности $(\alpha_n,\ n \in \mathbf{N})$? Например, является ли составной последовательность, определяемая условием $\alpha_n = 1$ при всех $n \in \mathbf{N}$?

Истолковывая определение составной последовательности двумя способами, мы получаем соответственно две «реализации» множества E, указанного Н. Н. Лузиным.

$E_1 = \{\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$: существует такая функция

$\gamma \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, что $\gamma(k) \neq \gamma(n)$ при всех $k \neq n$

и $\alpha(\gamma(k+1))/(\alpha(\gamma(k)))$ является целым числом при любом $k \in \mathbf{N}\}$;

$E_2 = \{\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$: существует такая функция

$\gamma \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, что $\alpha(\gamma(k+1)) / \alpha(\gamma(k))$ — целое

число, большее или равное 2, при любом $k \in \mathbf{N}\}$.

При одном толковании определения составной последовательности будет $E = E_1$, при другом — $E = E_2$; $E_2 \subseteq E_1$.

Докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Множества E_1 и E_2 являются аналитическими, но не борелевскими.*

Доказательство этой теоремы состоит из двух лемм.

ЛЕММА 1. *Множества E_1 и E_2 — аналитические.*

ЛЕММА 2. *Множества E_1 и E_2 — не борелевские.*

Доказательство леммы 1 проводится синтаксическим методом. Пусть α и γ — переменные, пробегающие N^{N}; n и k — переменные, пробегающие N; $\times$ — умножение натуральных чисел. Из определения E_1 ясно, что $E_1 = \{\alpha : \varphi(\alpha)\}$, где $\varphi(\alpha)$ — следующая формула:

$$\exists\gamma\, [\forall k \exists n\, [\alpha(\gamma(k+1)) = n \times \alpha(\gamma(k))]\, \& \\ \& \forall k \forall n\, [k \neq n \to \gamma(k) \neq \gamma(n)]].$$

Формула $\varphi(\alpha)$ является, очевидно, Σ_1^1-формулой, и поэтому $E_1 = \{\alpha : \varphi(\alpha)\}$ — Σ_1^1-множество, т. е., в частности, аналитическое множество (определение Σ_1^1-формул и их связь с аналитическими множествами см. [6]).

Совершенно аналогично доказывается и аналитичность множества E_2 (нужно воспользоваться формулой

$$\exists\gamma \forall k \exists n\, [\alpha(\gamma(k+1)) = n \times \alpha(\gamma(k))\ \&\ n \geqslant 2]).$$

Доказательство леммы 2. Фиксируем некоторое аналитическое, но не борелевское множество $Q \subseteq \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$. Идея доказательства состоит в построении такой борелевской функции F из N^{N} в N^{N}, что $\alpha \in Q \equiv F(\alpha) \in E_1 \equiv F(\alpha) \in E_2$ для любого $\alpha \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$.

Обратимся к деталям. Через J обозначается совокупность всех последовательностей натуральных чисел конечной ненулевой длины. По определению аналитического множества [5, стр. 349] существует такая система $H = \{H_e : e \in J\}$ замкнутых подмножеств N^{N}, что $Q = \bigcup_{f \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}} \bigcap_{n \in \mathrm{N}} H_{f|n}$ ($f\,|\,n$ — сужение функции f на первые n натуральных чисел, т. е. первые n членов последовательности f). При этом H можно считать регулярной системой, т. е. если e_1 — продолжение e_2, то $H_{e_1} \subseteq H_{e_2}$ [5, стр. 339]. Для всякого $\alpha \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$ определяем $t(\alpha) = \{e \in J : \alpha \in H_e\}$.

Пусть $q \subseteq J$. Будем говорить, что q имеет бесконечный путь, если найдется такая бесконечная последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ элементов q, что e_{k+1} — собственное (т. е. $e_{k+1} \neq e_k$) продолжение e_k при всяком k.

ЛЕММА 3. *Пусть $\alpha \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$. Тогда $\alpha \in Q$, если и только если $t(\alpha)$ имеет бесконечный путь.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in Q$. Тогда по выбору H имеем $\alpha \in \bigcap_{n \in \mathrm{N}} H_{f|n}$ для некоторого $f \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$. Значит, $f|1, f|2, \ldots, f|k, \ldots$ — искомый бесконечный путь в $t(\alpha)$.

Наоборот, пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ — бесконечный путь в $t(\alpha)$, m_k — длина последовательности e_k. Ясно, что существует такое $f \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$, что $e_k = f \mid m_k$ при любом k. По определению $t(\alpha)$ это означает, что $\alpha \in H_{f \mid m_k}$ при любом k. Теперь в силу регулярности системы H и очевидного неравенства $m_{k+1} > m_k$ при любом k получаем: если $m \in \mathrm{N}$, то $\alpha \in H_{f|m}$. Но, согласно выбору системы H, последнее и означает $\alpha \in Q$. Лемма доказана.

Пусть теперь $P = \{p_{km} : k,m \in \mathrm{N}\} \cup \{p_n : n \in N\}$ — некоторая нумерация совокупности P всех простых чисел без повторений, т. е. $p_n = p_{km}$ невозможно ни при каких m, k и n; из $p_{n_1} = p_{n_2}$ следует $n_1 = n_2$; из $p_{k_1 m_1} = p_{k_2 m_2}$ следует $k_1 = k_2$ и $m_1 = m_2$.

Для всякой последовательности $e = (m_1, \ldots, m_k) \in J$ определяем натуральное число $p(e) = p_{1m_1} \times \ldots \times p_{km_k}$. Отметим следующий очевидный факт.

Замечание. Пусть $e_1, e_2, \in J$. Тогда e_2 — собственное продолжение e_1, если и только если $p(e_2)$ делится на $p(e_1)$ и $p(e_2)/p(e_1) \geqslant 2$.

Докажем теперь лемму, играющую ключевую роль.

ЛЕММА 4. *Пусть $q \subseteq J$, $U = \{p(e)\colon e \in q\}$ и $\beta \in N^N$ определено условием $\beta(n) = n$ при $n \in U$ и $\beta(n) = p_n$ при $n \notin U$. Тогда следующие три утверждения попарно эквивалентны:*

1) *q имеет бесконечный путь;*
2) $\beta \in E_2$;
3) $\beta \in E_1$.

Доказательство. Заметим, что из определения β следует $\beta \in E_1 \equiv \beta \in E_2$ (поскольку при $k \neq n$ будет $\beta(k) \neq \beta(n)$). Поэтому достаточно доказать эквивалентность только двух первых утверждений из условия леммы.

Пусть сперва $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ — бесконечный путь в q. Определяем функцию $\gamma \in \mathrm{N}^{\mathrm{N}}$ условием $\gamma(k) = p(e_k)$.

Тогда из замечания следует, что $\beta(\gamma(k+1))/\beta(\gamma(k)) = \gamma(k+1)/\gamma(k) = p(e_{k+1})/p(e_k)$ — целое число, большее или равное 2, при любом k. Это по определению означает $\beta \in E_2$.

Наоборот, пусть $\beta \in E_2$. Тогда существует такая функция $\gamma \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, что $\beta(\gamma(k+1))/(\beta(\gamma(k)))$ — целое число, большее или равное 2, при любом k. Из определения β ясно, что можно подобрать такую последовательность $e_1, e_2, \ldots, e_k, \ldots$ элементов q, что $p(e_k) = \gamma(k)$ при любом k. Из замечания следует, что эта последовательность и будет бесконечным путем в q. Лемма доказана.

Приступим теперь к определению функции F. Пусть $\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Определяем $F(\alpha) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ условием: $F(\alpha)(n) = n$ при $n \in \{p(e)\colon e \in t(\alpha)\}$; $F(\alpha)(n) = p_n$ в противном случае.

ЛЕММА 5. *Функция F является борелевской функцией из $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ в $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, т. е. F — борелевское подмножество $\mathbf{N}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$.*

Доказательство. Ясно, что $F = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} U_n$, где всякое U_n определяется следующим образом: 1) если $n = p(e)$, $e \in J$, то $U_n = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{N}^{\mathbf{N}}\colon [\alpha \in H_e \to \beta(n) = n] \;\&\; [\alpha \notin H_e \to \beta(n) = p_n]\}$; 2) если $n \notin \{p(e)\colon e \in J\}$, то $U_n = \{(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{N}^{\mathbf{N}}\colon \beta(n) = p_n\}$. Но каждое U_n — борелевское (так как каждое H_e замкнуто). Отсюда лемма очевидна.

ЛЕММА 6. *Пусть $\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$. Тогда $\alpha \in Q \equiv F(\alpha) \in E_1 \equiv F(\alpha) \in E_2$.*

Доказательство получается из лемм 3 и 4.

Завершаем доказательство леммы 2. Предположим противное, т. е. пусть E_i — борелевское множество; $i = 1$ или $i = 2$. Тогда из леммы 6 следует, что $Q = \{\alpha \in \mathbf{N}^{\mathbf{N}}\colon F(\alpha) \in E_i\}$ — также борелевское множество (так как F — борелевская функция по лемме 5, а прообраз борелевского множества по борелевской функции — борелевское множество, см. [5, стр. 384—385, доказательство следствия 5]), что противоречит выбору Q. Противоречие завершает доказательство леммы 2.

Автор благодарен В. А. Успенскому за внимание к работе и М. А. Луниной на ценные замечания.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступило 4.III.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Лузин Н. Н., Арифметический пример функции, не входящей в классификацию Бэра, Собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1958, 315—316.

[2] Лузин Н. Н., Об аналитических множествах. Собр. соч., т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1958, 380—459.

[3] Лунина М. А., Об арифметическом примере Лузина аналитического множества, не являющегося борелевским, Матем. заметки, **22**, № 4 (1977), 525—534.

[4] Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, М.— Л., Гостехиздат, 1948.

[5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, М., «Мир», 1970.

[6] Addison J. W., Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory, Fund. Math., 46 (1959), 123—135.