

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 30, № 3 (1981)

ТЕОРИИ ЦЕРМЕЛО БЕЗ АКСИОМЫ СТЕПЕНИ И ЦЕРМЕЛО — ФРЕНКЕЛЯ БЕЗ АКСИОМЫ СТЕПЕНИ РАВНОНЕПРОТИВОРЕЧИВЫ

В. Г. Кановей

Бъедение. В теории Цермело — Френкеля ZF без аксиомы выбора доказуема непротиворечивость теории Цермело Z без аксиомы выбора, так как совокупность всех множеств ранга $< \omega + \omega$ образует модель Z [1, стр. 99]. Таким образом, по второй теореме Геделя, теории ZF и Z неравнонепротиворечивы (естественно, в предположении непротиворечивости теории ZF). Содержанием предлагаемой заметки является доказательство следующей теоремы, показывающей, что после удаления из рассматриваемых теорий аксиомы степени, ситуация меняется:

ТЕОРЕМА. *Теории Z^- и ZF^- , получающиеся из Z и ZF соответственно удалением аксиомы степени, равнонепротиворечивы. Более того, ZF^- можно интерпретировать в Z^- .*

Равнонепротиворечивость Z^- и ZF^- (и ряда других теорий) объявлена без доказательства в [2] со ссылкой на [3], где также без доказательства объявлен эквивалентный результат. Опубликованные доказательства сформулированной теоремы автору неизвестны.

Опишем структуру доказательства. В § 1 изучается специальная промежуточная теория T , получающаяся добавлением к Z^- некоторых частных случаев аксиомы подстановки и утверждения о счетности каждого множества. Эти дополнительные аксиомы дают возможность доказать аксиому подстановки с транзитивной областью значений. Здесь же дается эскиз интерпретации T в Z^- ,

основанный на известной идее моделирования наследственно счетных множеств с помощью специальных бинарных отношений на ω (см. [2]).

Несмотря на отсутствие в T полной аксиомы подстановки, эта теория достаточно сильна для построения конструктивной иерархии ($L_\alpha: \alpha \in \text{On}$) и доказательства ее основных свойств. Мы делаем это в § 2.

Наконец, в § 3 вводится особая совокупность ординалов Ω (либо совпадающая с On , либо являющаяся собственным начальным сегментом On), и обладающая тем свойством, что класс $L^* = \bigcup_{\alpha \in \text{On}} L_\alpha$ образует модель теории ZF^- . Теорема 3.3 о неподвижной точке играет ключевую роль в проверке аксиомы подстановки в L^* .

Все основные теоретико-множественные обозначения мы берем из [4]. Малыми буквами обозначаем только множества, а большими — и классы, и множества. Классы могут быть удалены из всех рассуждений (ценой увеличения громоздкости) способом, указанным в [4, примечание 1, стр. 136]. Классы F , удовлетворяющие определению функции (т. е. каждый элемент F — пара, и $(u, v_1) \in F \wedge (u, v_2) \in F \rightarrow v_1 = v_2$) условимся называть *функционалами*, а функциями — только функционалы, являющиеся множествами.

§ 1. Теория T . Для каждого бинарного отношения (т. е. множества пар) ε определим $\text{dom } \varepsilon = \{u: \exists v (u \varepsilon v)\}$ ($u \varepsilon v$ — сокращение для $(u, v) \in \varepsilon$), $\text{rng } \varepsilon = \{v: \exists u (u \varepsilon v)\}$, и $|\varepsilon| = \text{dom } \varepsilon \cup \text{rng } \varepsilon$. Бинарное отношение ε назовем *ЭФ-отношением*, если выполняются такие два условия:

(1) если $x \subseteq |\varepsilon|$ непусто, то найдется такое $u \in x$, что $\bigcap v \varepsilon u$, каково бы ни было $v \in x$;

(2) если $u, v \in |\varepsilon|$, и для каждого $w \in |\varepsilon|$ выполняется эквивалентность $w \varepsilon u \leftrightarrow w \varepsilon v$, то $u = v$.

Условие (2) есть условие *экстенциональности*, а условие (1) — условие *фундированности* отношения ε . Если множество x транзитивно, то $\subseteq$ -отношение на x будет ЭФ-отношением [4, стр. 31].

Если ε и δ являются ЭФ-отношениями, а f — биекция $|\varepsilon|$ на $|\delta|$, и $u \varepsilon v \leftrightarrow f(u) \delta f(v)$ для любой пары $u, v \in |\varepsilon|$, то пишем, что f переводит ε в δ . Если найдется биекция, переводящая ε в δ , то условимся писать $\varepsilon = * \delta$.

Если ε является ЭФ-отношением, и $u \in |\varepsilon|$, то положим

$p_\varepsilon(u) = \{v \in |\varepsilon| : \text{для некоторых } w_0, w_1, \dots, w_n \text{ выполняется } v = w_0 \varepsilon w_1 \varepsilon \dots \varepsilon w_n = u\}$

(возможно $n = 0$, и тогда $u = v$), и $\lambda_\varepsilon(u) = \varepsilon \cap (p_\varepsilon(u) \times p_\varepsilon(u))$ ((сужение ε на $p_\varepsilon(u)$). Ясно, что $\lambda_\varepsilon(u)$ будет ЭФ-отношением с $|\lambda_\varepsilon(u)| = p_\varepsilon(u)$.

Если ЭФ-отношение ε таково, что $\varepsilon = \lambda_\varepsilon(u)$ (или, что то же самое, $|\varepsilon| = p_\varepsilon(u)$) для некоторого $u \in |\varepsilon|$, то это u , как нетрудно проверить, единственно; обозначим его $u = t(\varepsilon)$. В этом случае ε назовем *вершинным* ЭФ (ВЭФ)-отношением. Если ε и δ являются ВЭФ-отношениями, $w = t(\delta)$ и найдется такое $v \in |\delta|$, что $\varepsilon = *\lambda_\delta(v)$ и $v\delta w$, то пишем $\varepsilon \in *\delta$.

После этих предварительных определений введем теорию T , состоящую из всех аксиом Z^- и следующих трех аксиом:

Sq: для каждого x существует (множество) $x \times x$;

Cnt: для каждого непустого x существует функция из натурального ряда ω на x ;

Repr: для каждого ЭФ-отношения ε найдется такое транзитивное множество x , что $\varepsilon = *\varepsilon_x$, где $\varepsilon_x = \{(u, v) : u, v \in x \text{ и } u \varepsilon v\}$.

Отметим, что Sq и Repr — теоремы ZF (для Repr см. [4, стр. 31]).

Покажем, что теория T интерпретируема в Z^- . Прежде всего, отметим, что T интерпретируема в $Z^- + (\omega \times \omega \text{ существует})$. В самом деле, пусть D есть класс всех ВЭФ-отношений ε таких, что $|\varepsilon| \subseteq \omega$. Для каждой ε -формулы φ через φ^* обозначим формулу, полученную из φ заменой всех вхождений $=$ и $\subseteq$ на $*$ и $\subseteq^*$ соответственно, и релятивизацией всех кванторов и свободных переменных к D .

Несложная, хотя и довольно кропотливая проверка, позволяет для каждой аксиомы φ теории T вывести в $Z^- + (\omega \times \omega \text{ существует})$ формулу φ^* (мы опускаем эту проверку; аналогичный материал читатель найдет в [2]). Но это и означает, что T интерпретируется в указанной теории. Отметим, что аксиома о существовании $\omega \times \omega$ используется лишь в выводе формулы (аксиома бесконечности)*.

Чтобы избавиться в этом рассуждении от предположения о существовании $\omega \times \omega$, для $m, n \in \omega$ определим $\langle m, n \rangle = 2^m (2n + 1) - 1$. Заменим в определениях,

связанных с ЭФ-отношениями, а также в определении класса D , каждую пару (m, n) «квазипарой» $\langle m, n \rangle$. Все проведенные выше рассуждения останутся в силе после такой замены, и гипотеза о существовании $\omega \times \omega$ окажется ненужной.

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1.1. *Теория T интерпретируется в Z^- . В частности, T и Z^- равнонепротиворечивы.*

С этого момента и до конца работы все рассуждения проходят в теории T . Отметим, что аксиомы T позволяют использовать операции $x \times y$, $\text{dom } f$, $\text{rng } f$, $f''x$ (образ f на x), $f|_x$ (сужение f на x), получая при этом множества. Специфика дополнительных аксиом T видна из доказательства следующей леммы:

ЛЕММА 1.2. *Пусть Φ — функционал, и множество $z \subseteq \text{dom } \Phi$ таково, что класс $X = \Phi''z$ транзитивен. Тогда X является множеством.*

Доказательство. Аксиома Cnt (вместе с аксиомами Z^-) позволяет не ограничивая общности предполагать, что $z \subseteq \omega$. Далее, можно не ограничивая общности предполагать, что Φ — биекция (если это не так, то функционал

$$\Phi' = \{(m, p) \in \Phi : \forall n \in z (n < m \rightarrow (n, p) \notin \Phi)\}$$

будет биекцией из некоторого $z' \subseteq z$ на X).

В этих предположениях нетрудно проверить, что отношение

$$\varepsilon = \{(m, n) : m, n \in \omega \text{ и } \Phi(m) \in \Phi(n)\}$$

будет ЭФ-отношением с $|\varepsilon| = z$ (отметим, что ε — множество в силу аксиом выделения и Sq). Значит, по аксиоме Perf найдется транзитивное x и биекция f , переводящая ε_x в ε . Полагая

$$\Psi = \{(u, \Phi(f(u))) : u \in x\},$$

имеем: Ψ является биекцией x на X , причем для всех $u, v \in x$ выполняется эквивалентность $u \in v \leftrightarrow \Psi(u) \in \Psi(v)$.

В этой ситуации стандартной $\in$ -индукцией (с учетом аксиомы регулярности) нетрудно доказать, что $\Psi(u) = u$ для любого $u \in x$. Стало быть, $X = x$ — множество, что и требовалось.

§ 2. Конструктивные множества. Рассмотрим следующий набор геделевых операций:

$$F_0(x, y) = \{x, y\}; \quad F_1(x, y) = x \times y;$$

$$F_2(x, y) = x - y; \quad F_3(x, y) = \text{dom } x;$$

$$F_4(x, y) = \{(u, v) \in x: u \in v\};$$

$$F_5(x, y) = \{(a, b, c): (b, c, a) \in x\};$$

$$F_6(x, y) = \{(a, b, c): (c, b, a) \in x\};$$

$$F_7(x, y) = \{(a, b, c): (a, c, b) \in x\};$$

$$F_8(x, y) = x \cup y; \quad F_9(x, y) = x''y.$$

Операции $F_1 - F_7$ взяты из [4, стр. 33], а F_8 и F_9 добавлены по техническим причинам. Отметим, что если x и y — множества, и $i \leq 9$, то $F_i(x, y)$ — также множество (нужно применить Sq и аксиомы Z^-).

Класс или множество X назовем g -замкнутым, если для всех $x, y \in X$ и $i \leq 9$ будет $F_i(x, y) \in X$. Для всякого X , через $S(X)$ обозначим замыкание X относительно геделевых операций, т. е. наименьший по включению g -замкнутый класс, подклассом которого является X . При этом $X \subseteq S(X)$ (так как $x = F_2(x, F_2(x, x))$), а если класс X транзитивен, то и $S(X)$ будет транзитивным (благодаря наличию операции F_0).

ЛЕММА 2.1 (усиление (1.2)) Пусть F — функционал, $x \subseteq \text{dom } F$, и класс $Y = S(F''x)$ транзитивен. Тогда Y и $F''x$ — множества.

Доказательство. Аксиома Cnt дает функцию $f: \omega$ на x . Для $m, n \in \omega$ и $i \leq 9$ положим

$$h(m, n, i) = 10(2^m(2n + 1) - 1) + i.$$

Легко видеть, что h является биекцией $\omega \times \omega \times \{0, \dots, 9\}$ на ω , причем $h(m, n, i) \geq m$ и $h(m, n, i) \geq n$.

Определим на множестве ω функционал Φ следующим образом: $\Phi(2l) = F(f(l))$ для всех $l \in \omega$, и если $k = h(m, n, i)$, то $\Phi(2k + 1) = F_i(\Phi(m), \Phi(n))$. В соответствии с выбором f и h , мы имеем $\Phi: \omega$ на Y . Но класс Y транзитивен по условию. Значит, Y является множеством согласно 1.2. Теперь и $F''x \subseteq Y$ также множество по аксиоме выделения. Лемма доказана.

Следствие 2.2. Если множество x транзитивно, то $S(x)$ является множеством.

Доказательство. Возьмем $F = \{(u, u): u \in x\}$ и воспользуемся леммой.

Перейдем к вопросам, непосредственно связанным с конструктивной иерархией. Эта иерархия напомним образована множествами L_α , которые определяются индукцией по α для всякого ординала α следующим образом: $L_0 = \emptyset$, и если $\alpha > 0$ и все множества L_γ , $\gamma < \alpha$, уже построены, то $L_\alpha = S(\{L_\gamma : \gamma < \alpha\})$.

Возможность определений трансфинитной индукцией обычно обосновывается аксиомой подстановки, которой нет в теории T . Однако мы можем даже средствами T установить, что для всякого ординала α , L_α определено и является множеством. Достаточно доказать следующую лемму:

ЛЕММА 2.3. *Если последовательность $(L_\gamma : \gamma < \alpha)$ уже построена в соответствии с данным определением (но не обязательно является множеством), то $L_\alpha = S(\{L_\gamma : \gamma < \alpha\})$ — множество.*

Перед доказательством этой леммы отметим следующие свойства множеств L_α (пока формулируемые, строго говоря, лишь для тех ординалов α , для которых L_α существует; но после доказательства леммы 2.3 они станут справедливыми для всех ординалов α):

2.3а. Если ординал α предельный, то $L_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} L_\gamma$.

2.3б. $L_{\alpha+1} = S(L_\alpha \cup \{L_\alpha\})$.

2.3в. L_α — транзитивное и ε -замкнутое множество.

2.3г. Если $\gamma < \alpha$, то $L_\gamma \in L_\alpha$ и $L_\gamma \subseteq L_\alpha$.

Первые два утверждения очевидны по определению, а два последних доказываются индукцией по α и γ с помощью первых.

Доказательство леммы 2.3. Благодаря 2.2 и 2.3б, достаточно рассмотреть случай предельного α . Тогда $L_\alpha = \bigcup_{\gamma < \alpha} L_\gamma$ будет транзитивным классом в силу 2.3б, 2.3г. Применяя лемму 2.1 при $x = \alpha$ и $F = (L_\gamma : \gamma < \alpha)$, имеем: L_α — множество, что и требовалось.

Итак, L_α определено и является множеством для любого $\alpha \in \text{On}$. Введем класс $L = S(\{L_\gamma : \gamma \in \text{On}\})$ всех конструктивных множеств, и сформулируем два свойства этого класса, которые нетрудно получить из 2.3а — 2.3в.

2.3д.
$$L = \bigcup_{\gamma \in \text{On}} L_\gamma.$$

2.3е. Класс L транзитивен и ε -замкнут.

Рассмотрим вопрос определимости конструктивного построения в классе L и в множествах L_α . Если X — класс, то для каждой формулы φ через φ^X обозначим результат релятивизации φ к X (т. е. замены кванторов $\exists u$, $\forall u$ на $\exists u \in X$, $\forall u \in X$, и введения конъюнктивного члена $u \in X$ для всякой свободной переменной u). Если $Y \subseteq X$, и найдется формула $\varphi(x)$ с параметрами из X (возможно, вовсе без параметров) такая, что $Y = \{x \in X : \varphi^X(x)\}$, то скажем, что Y *определимо в X* , или что Y *есть класс в X* .

Пусть $\alpha \in \text{On}$. *Конструирующей α -функцией* (к. α -ф.) назовем всякую функцию f , определенную на α и такую, что $f(\gamma) = S(f''\gamma)$ для всех $\gamma < \alpha$. (Единственной к. α -ф. является последовательность $f_\alpha = (L_\gamma : \gamma < \alpha)$.) Через $C(\gamma, z)$ обозначим следующую формулу:

$$\gamma \in \text{On} \wedge \exists f (f \text{ есть к. } (\gamma + 1)\text{-ф. и } z = f(\gamma)).$$

ТЕОРЕМА 2.4. $(L_\gamma : \gamma \in \text{On}) = \{(\gamma, z) \in L : C^L(\gamma, z)\}$.
Если ординал α пределен, то

$$(L_\gamma : \gamma < \alpha) = \{(\gamma, z) \in L_\alpha : C^{L_\alpha}(\gamma, z)\}.$$

Таким образом $(L_\gamma : \gamma \in \text{On})$ — класс в L , а $f_\alpha = (L_\gamma : \gamma < \alpha)$ — класс в L_α , если α пределен.

Доказательство. Через A обозначим первое утверждение теоремы, а через A_α — второе ($\alpha \in \text{On}$ пределен). Через B_α обозначим вспомогательное утверждение $f_\alpha \in L_{\alpha+1}$. Установим связи между A , A_α , B_α .

Утверждение (1). Если $(\forall \beta \in \text{On}) B_\beta$, то A .
Если ординал α пределен и $(\forall \beta < \alpha) B_\beta$, то A_α .

Докажем только первую часть; вторая доказывается аналогично. Из 2.3е и определения S следует: если $x, y \in L$ и $S(x) \in L$, то $(y = S(x))^L \leftrightarrow y = S(x)$. Значит, по определению операций F_3 и F_9 и определению к. α -ф., мы имеем: если $\gamma, f \in L$, то

$$(f \text{ есть к. } \gamma\text{-ф.})^L \leftrightarrow f \text{ есть к. } \gamma\text{-ф.}$$

Теперь A следует непосредственно из определения формулы C .

Утверждение (2). Если ординал α пределен, и выполняется A_α , то также выполняется B_α .

Действительно, A_α означает, что f_α является классом в L_α . Поэтому утверждение (2) вытекает из такой леммы:

ЛЕММА 2.5. *Если класс X транзитивен и γ -замкнут (например, $X = L_{\alpha+1}$) и $x \in X$ (например, $x = L_\alpha$), а множество $y \subseteq x$ определимо в x , то $y \in X$.*

Доказательство этой леммы проходит совершенно аналогично доказательству [4, лемма 31], или теоремы [1, стр. 195].

Утверждение (3). *Если B_α , то $B_{\alpha+1}$.*

В самом деле, с одной стороны, $f_{\alpha+1} = f_\alpha \cup \{(\alpha, L_\alpha)\}$, и поэтому $f_{\alpha+1}$ получается из f_α и L_α подходящей суперпозицией операций F_0, F_3, F_8 . С другой стороны, $f_\alpha \in L_{\alpha+2}$ по 2.3г и предположению B_α , и $L_\alpha \in L_{\alpha+2}$ в силу 2.3г. Применение 2.3в завершает доказательство.

Доказанные утверждения (1) — (3) очевидным образом позволяют индукцией по α доказать B_α для всех α , A_α — для всех предельных α , и A . Теорема доказана.

Следствие 2.6. $\text{On} \subseteq L$. *Если ординал α предельен, то $\alpha \subseteq L_\alpha$.*

Доказательство. По теореме, класс $F = (L_\gamma: \gamma \in \text{On})$ определим в L . В частности, $F \subseteq L$. Тем самым, и $\text{On} = \text{dom } F \subseteq L$ (класс L транзитивен, 2.3е). Второе утверждение проверяется аналогично.

Теперь мы можем доказать следующую теорему о полном упорядочении класса L и множеств L_α :

ТЕОРЕМА 2.7. *Существует полное упорядочение класса L , определяемое в L . Если ординал α предельен, то существует полное упорядочение множества L_α , определяемое в L_α .*

Доказательство проведем только для L ; доказательство для L_α аналогично. Индукцией по $n \in \omega$ определим класс $K_n \subseteq L$ и полное упорядочение $<_n$ этого класса следующим образом. Положим $K_0 = \{L_\gamma: \gamma \in \text{On}\}$, и будем писать $L_\gamma <_0 L_\delta$, если $L_\gamma \in L_\delta$ (т. е. если $\gamma < \delta$, 2.3г).

Предположим, что K_n и $<_n$ уже определены. Положим

$$K_{n+1} = \{(u, v, i): u, v \in K_n \text{ и } i \leq 9\},$$

а $<_{n+1}$ определим как лексикографический порядок (в смысле $<_n$ на первых двух компонентах, и обычного порядка натуральных чисел — на третьей).

Далее, для каждого $p \in K = \bigcup_{n \in \omega} K_n$ следующим образом определим множество $F(p)$. Если $p = L_\gamma \in K_0$, то $F(p) = L_\gamma$. Если $p = (u, v, i)$ и множества $F(u)$, $F(v)$

уже определены, то $F(p) = F_i(F(u), F(v))$. По определению L имеем: F — функционал из $K (\subseteq L)$ на L .

Таким образом, для каждого $x \in L$ можно определить $n(x)$ как наименьшее из таких $n \in \omega$, что $x = F(p)$ для некоторого $p \in K_n$, и определить $p(x)$ как $<_{n(x)}$ — наименьшее из таких $p \in K_{n(x)}$, что $x = F(p)$. Теперь можно ввести искомый порядок на L , полагая $x < y$, если

$$n(x) < n(y) \vee (n(x) = n(y) \wedge p(x) <_{n(x)} p(y)).$$

Нетрудно проверить, что $<$ в самом деле вполне упорядочивает класс L . А определимость $<$ в L доказывается скучной проверкой определимости в L всех промежуточных построений с учетом γ -замкнутости L . Исходный класс $\{L_\gamma: \gamma \in \text{On}\} = K_0$, участвующий в построении L , определим в L по теореме 2.4. Подробности мы оставляем читателю.

§ 3. Интерпретация ZF^- в T . Напомним, что все рассуждения проходят в теории T . Через Ω обозначим совокупность всех ординалов α таких, что для каждого $\beta \leq \alpha$, $\beta > 0$, найдется функция $g \in L_{\beta+1}$ из ω на L_β . Ясно, что либо $\Omega = \text{On}$, либо Ω — ординал. Следующая лемма показывает, что во втором случае ординал Ω пределен.

ЛЕММА 3.1. $0 \in \Omega$. Если $\alpha \in \Omega$, то $\alpha + 1 \in \Omega$.

Доказательство. Ясно, что $0 \in \Omega$. Пусть $\alpha \in \Omega$. Для доказательства $\alpha + 1 \in \Omega$ нужно построить функцию $g \in L_{\alpha+2}$ из ω на $L_{\alpha+1}$.

Если $\alpha > 0$, то поступаем следующим образом. По определению, найдется функция $f \in L_{\alpha+1}$ из ω на L_α . Положим $g(0) = L_\alpha$, $g(2l+2) = f(l)$ для всех l , и если $k = h(m, n, i)$ (определение h см. в доказательстве 2.1), то $g(2k+1) = F_i(g(m), g(n))$. Тогда, с одной стороны, g будет функцией из ω на множество $L_{\alpha+1} = S(\{L_\alpha\} \cup \text{rng } f)$ (по 2.3б и в соответствии с выбором f и h). А с другой стороны, g определимо в $L_{\alpha+1}$, так как $f \in L_{\alpha+1}$ и $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$. Поэтому $g \in L_{\alpha+2}$ в силу 2.5, что и требовалось.

Если же $\alpha = 0$, то определим g несколько иначе: $g(0) = \emptyset$, и если $k = h(m, n, i)$, то $g(k+1) = F_i(g(m), g(n))$. Снова g — функция из ω на $L_1 = S(\{\emptyset\})$, определяемая в L_1 (так как L_1 есть совокупность всех множеств конечного ранга). Лемма доказана.

Класс (возможно, множество) $L^* = \bigcup_{\alpha \in \Omega} L_\alpha$ и будет нашей моделью для ZF^- . Отметим некоторые свойства этого класса.

3.2а. Либо $\Omega = \text{On}$, и тогда $L^* = L$, либо Ω — предельный ординал, и в этом случае $L^* = L_\Omega$.

Доказательство следует из леммы 3.1 и 2.3а, 2.3д.

3.2б. В обоих случаях L^* — транзитивный ε -замкнутый класс, и $\Omega \subseteq L^*$.

Это следует из 3.2а и 2.3в, 2.3е, 2.6.

Теперь выполнение в L^* аксиом пары, регулярности, экстенциональности очевидно. Рассмотрим остальные аксиомы ZF^- .

3.2в. Аксиома бесконечности верна в L^* . Именно, $\omega \in L^*$.

Действительно, $L_1 = S(\{\emptyset\})$ есть совокупность всех множеств конечного ранга. Значит, $\omega \subseteq L_1$ и ω определимо в L_1 . Следовательно, $\omega \in L_2$ в силу 2.5. Но $L_2 \subseteq L^*$ согласно 3.1.

3.2г. Аксиома объединения верна в L^* .

Пусть $x \in L^*$, т. е. $x \in L_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Omega$. Но L_α транзитивно, откуда $\bigcup x \subseteq L_\alpha$. Значит, $\bigcup x$ является классом в L_α , $\bigcup x \in L_{\alpha+1}$ по лемме 2.5, и $\bigcup x \in L^*$ в силу 3.1.

3.2д. Если $x \in L^*$, то найдется функция $g \in L^*$, определенная на ω и такая, что $x \subseteq \text{rng } g$.

В самом деле, раз $x \in L^*$, то $x \in L_\alpha$ для некоторого $\alpha \in \Omega$. Тогда $x \subseteq L_\alpha$ по 2.3в. Теперь используем лемму 3.1 с учетом определения Ω .

3.2е. Класс $(L_\gamma : \gamma \in \Omega)$ определим в L^* .

3.2ж. Существует полное упорядочение класса L^* , определяемое в L^* .

Эти два утверждения следуют из 3.2а и теорем 2.4, 2.7.

В дальнейшем через $<^*$ обозначаем определяемое в L^* полное упорядочение класса L^* (существование которого гарантируется утверждением 3.2ж).

Остается проверить аксиому подстановки в L^* . Введем следующее определение. Если $\beta \in \Omega$, и функционал F таков, что для каждого $z \in L_\beta \cap \text{dom } F$ выполняется $F(z) \in L_\beta$, то β называем неподвижной точкой для F . Решающую роль в проверке аксиомы подстановки в L^* играет

ТЕОРЕМА 3.3 (о неподвижной точке). Для любого набора функционалов $G_0, G_1, \dots, G_k$, определяемых в L^* ,

и любого $\alpha \in \Omega$ найдется ординал $\beta \geq \alpha$, $\beta \in \Omega$, являющийся неподвижной точкой для каждого из G_i .

Доказательство использует две вспомогательные леммы.

ЛЕММА 3.3а. Если функционал $F: \omega \rightarrow \Omega$ определим в L^* , то найдется ординал $\alpha \in \Omega$ такой, что $\text{rng } F \subseteq \alpha$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда будет $L^* = \bigcup_{n \in \omega} L_{F(n)}$. Для каждого $n \in \omega$ через g_n обозначим наименьшую в смысле $<^*$ из таких функций $g \in L^*$, что $\text{dom } g = \omega$ и $L_{F(n)} \subseteq \text{rng } g$ (такие функции существуют по 3.2д). Если $l = 2^n(2m+1) - 1$, то положим $G(l) = g_n(m)$.

По выбору g_n имеем: G — функционал из ω на L^* . Кроме того, G определим в L^* , что следует из 3.2е и определмости F и $<^*$.

Если теперь $\Omega = \text{On}$, то в силу транзитивности L^* класс L^* будет множеством по лемме 1.2. Значит, и класс On ($\subseteq L^*$ по 3.2б) является множеством по аксиоме выделения, что невозможно.

Если же $\Omega \in \text{On}$, то $L^* = L_\Omega$, и из 2.5 и определмости G следует $G \in L_{\Omega+1}$. Таким образом, $\Omega \in \Omega$ по определению Ω , что невозможно. Лемма доказана.

ЛЕММА 3.3б. Если функционал F определим в L^* , и $x \in L^*$, то найдется такой ординал $\alpha \in \Omega$, что множество $F''x = \{F(u): u \in x \cap \text{dom } F\}$ включено в L_α .

Доказательство. Не ограничивая общности предполагаем, что $\text{dom } F = L^*$. Согласно 3.2д, найдется функция $g \in L^*$ такая, что $\text{dom } g = \omega$ и $x \subseteq \text{rng } g$. Для каждого n через $G(n)$ обозначим наименьший из таких ординалов $\gamma \in \Omega$, что $F(g(n)) \in L_\gamma$. Тогда G будет функционалом из ω в Ω , определимым в L^* по выбору F и в силу 3.2е, так как $g \in L^*$ (отметим, что $\Omega \subseteq L^*$, 3.2б). Применение предыдущей леммы и 2.3г завершает доказательство.

Вернемся к доказательству теоремы 3.3. Согласно лемме 3.3б, для каждого ординала $\gamma \in \Omega$ можно подобрать $\delta \in \Omega$, $\delta \geq \gamma$ так, что $G_i''L_\gamma \subseteq L_\delta$ для всех $i \leq k$. Через $G(\gamma)$ обозначим наименьший из таких ординалов δ . Определим теперь $F(0) = \alpha$, и далее $F(n+1) = G(F(n))$ индукцией по n . Функционал $F: \omega \rightarrow \Omega$ определим в L^* в силу 3.2е и выбора G_i . Поэтому, по лемме 3.3а, ординал $\beta = \bigcup \text{rng } F$ принадлежит Ω . Этот ординал β и будет,

очевидно, неподвижной точкой для всех G_i , удовлетворяющей неравенству $\beta \geq \alpha$. Теорема доказана.

Пусть $x_1, \dots, x_m$ — все свободные переменные формулы $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, не имеющей параметров. Скажем, что ординал $\beta \in \Omega$ отражает φ , если для всех $p_1, \dots, p_m \in L_\beta$ выполняется эквивалентность

$$\varphi^{L_\beta}(p_1, \dots, p_m) \leftrightarrow \varphi^{L^*}(p_1, \dots, p_m).$$

С л е д с т в и е 3.4 (принцип отражения). *Если формула φ не содержит параметров, и $\alpha \in \Omega$, то найдется ординал $\beta \in \Omega$, $\beta \geq \alpha$, отражающий φ .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Не ограничивая общности, считаем, что φ не содержит квантора $\forall$ (в противном случае $\forall$ можно заменить на $\neg \exists \neg$). Пусть $\varphi_0, \dots, \varphi_k$ — список всех подформул формулы φ , начинающихся с $\exists$ (сама φ считается своей подформулой). Каждому $i \leq k$ сопоставим функционал G_i следующим образом.

Пусть ψ_i есть $\exists y \chi(y, x_1, \dots, x_m)$ (χ и m , естественно, зависят от i). Если кортеж $p = (p_1, \dots, p_m) \in L^*$ таков, что существует множество $q \in L^*$, удовлетворяющее $\chi^{L^*}(q, p_1, \dots, p_m)$, то через $G_i(p)$ обозначим наименьшее в смысле $<^*$ из таких q . Каждый функционал G_i определим в L^* , так как порядок $<^*$ определим в L^* .

По теореме 3.3, найдется ординал $\beta \in \Omega$, $\beta \geq \alpha$, являющийся неподвижной точкой для каждого G_i . Теперь индукцией по числу логических символов в подформуле нетрудно проверить, что β отражает каждую подформулу формулы φ , и в частности, отражает φ , что и требовалось.

С л е д с т в и е 3.5. *Если $\alpha \in \Omega$, и $X \subseteq L_\alpha$ является классом в L^* , то $X \in L^*$ (аксиома выделения в L^*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть формула $\varphi(y, x_1, \dots, x_m)$ без параметров, и множества $p_1, \dots, p_m \in L^*$ таковы, что

$$X = \{y \in L^*: \varphi^{L^*}(y, p_1, \dots, p_m)\}.$$

По следствию 3.4, найдется ординал $\beta \in \Omega$, $\beta \geq \alpha$, отражающий φ и такой, что все p_i принадлежат L_β . Тогда

$$X = \{y \in L_\beta: \varphi^{L_\beta}(y, p_1, \dots, p_m)\},$$

т. е. X определимо в L_β . Применение лемм 2.5 и 3.1 завершает доказательство.

Уже собран весь необходимый материал для доказательства аксиомы подстановки в L^* .

Пусть функционал F определим в L^* , и $x \in L^*$, $x \subseteq \text{dom } F$. Нужно доказать, что $F''x \in L^*$. Но по лемме 3.36 найдется ординал $\alpha \in \Omega$ такой, что $F''x \subseteq L_\alpha$. Теперь искомое следует из 3.5.

Итак, в (классе или множестве) L^* истинны все аксиомы теории ZF^- (можно показать, что в L^* истинны также аксиома выбора и аксиома конструктивности). Фактически, этот результат можно переформулировать так: если $\lambda^*(x)$ — формула, канонически определяющая класс L^* в виде $L^* = \{x: \lambda^*(x)\}$, то, какова бы ни была аксиома φ теории ZF^- , релятивизация φ к формуле $\lambda^*(x)$ доказуема в T . Это и означает, что теория ZF^- интерпретируема в T . Соединяя этот результат с теоремой 1.1, получаем доказательство теоремы из введения.

Автор глубоко признателен А. Г. Драгалину за обсуждение работы и ценные замечания.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
25.VII.1978

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Коэн П., Теория множеств и континуум-гипотеза, М., «Мир», 1969.
- [2] Apt K.-P., Marek W., Second order arithmetic and related topics, Ann. Math. Log'c, 6, № 5 (1974), 177—229.
- [3] Kreisel G., A survey of proof theory, J. Symbolic Logic, 33, № 3 (1968), 321—388.
- [4] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.