

К ПРОБЛЕМАМ Н. Н. ЛУЗИНА О ВЛОЖИМОСТИ И РАСЩЕПЛЕНИИ ПРОЕКТИВНЫХ МНОЖЕСТВ

В. Г. Кановой

§ 1. Постановка проблем и основные результаты. Пусть $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ — натуральный ряд, и $I = {}^\omega\omega = \{x: x \text{ есть функция из } \omega \text{ в } \omega\}$ — пространство Бэра [1, стр. 154] (гомеоморфное множеству всех иррациональных точек числовой прямой). Проективные подмножества пространств I^m , $m \geq 1$, получаются из открытых в этих пространствах множеств повторным применением двух операций: дополнения и проекции. Дополнением множества $X \subseteq I^m$ называется разность $I^m - X$. Проекцией множества $P \subseteq I^{m+1}$ называется множество

$$\text{пр } P = \{\langle x_1, \dots, x_m \rangle: \exists y (\langle x_1, \dots, x_m, y \rangle \in P)\}.$$

Проективные множества организованы в проективную иерархию, образованную классами Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 . Определение этих классов проходит индукцией по $n \in \omega$ (см. [2, гл. 8, § 2]):

Σ_0^1 есть совокупность всех открытых подмножеств пространств вида I^m ;

Π_n^1 есть совокупность всех дополнений множеств класса Σ_n^1 ;

Σ_{n+1}^1 есть совокупность всех проекций множеств класса Π_n^1 ;

$$\Delta_n^1 = \Sigma_n^1 \cap \Pi_n^1.$$

Множество называется проективным, если оно принадлежит одному из проективных классов. В классической

системе обозначений Н. Н. Лузина [3, стр. 586] классы Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 имели обозначения A_n , CA_n , B_n соответственно.

Множество $P \subseteq I^2$ называется однозначным, если каждое его вертикальное сечение $P_x = \{y: \langle x, y \rangle \in P\}$ содержит не более одной точки, и называется счетнозначным, если каждое P_x не более чем счетно. Теория однозначных и счетнозначных множеств первого уровня проективной иерархии приняла законченный вид в гл. IV Лекций об аналитических множествах и их приложениях Н. Н. Лузина (в [3 стр. 189—224]). Там доказано, в частности, что каждое однозначное (или счетнозначное) множество класса Σ_1^1 можно вложить в однозначное (соответственно счетнозначное) Δ_1^1 -множество. Кроме того, каждое счетнозначное множество класса Δ_1^1 (или класса Σ_1^1) можно представить в виде объединения счетного числа однозначных множеств того же класса Δ_1^1 (соответственно класса Σ_1^1). Доказательства этих результатов см. также [4, стр. 72—82] и [5, § 1].

Дав определение проективных классов, Н. Н. Лузин [3, стр. 230—242] ставит ряд вопросов, общий смысл которых сводится к следующему: можно ли перенести некоторые теоремы о проективных множествах первого уровня проективной иерархии на более высокие уровни? Среди этих вопросов — вопросы о справедливости при различных значениях n следующих четырех предложений:

1.1. Каждое однозначное Σ_n^1 -множество можно вложить в однозначное множество класса Δ_n^1 .

1.2. Каждое счетнозначное Σ_n^1 -множество можно вложить в счетнозначное множество класса Δ_n^1 .

1.3. Каждое счетнозначное Δ_n^1 -множество является объединением счетного числа однозначных множеств класса Δ_n^1 .

1.4. Каждое счетнозначное Π_{n-1}^1 -множество является объединением счетного числа однозначных множеств класса Π_{n-1}^1 .

(Последнее предложение сформулировано Лузиным для класса CA_n , т. е. Π_n^1 ; сдвиг на 1 в нашей формулировке сделан для единообразия формулировок основных результатов.)

При $n = 0$ предложения 1.1, 1.2, 1.3 тривиально истинны, так как счетнозначное открытое множество может быть только пустым множеством, а предложение 1.4 не имеет смысла. Впрочем лузинские постановки не затрагивают случая $n = 0$: иерархия классов A_n, CA_n, B_n по определению начиналась с $n = 1$.

Как было отмечено выше, доказательство истинности первых трех предложений при $n = 1$ содержится в [3]. Об истинности или ложности предложения 1.4 при $n = 1$ (т. е. о возможности представить каждое счетнозначное замкнутое множество в виде объединения счетного числа однозначных замкнутых множеств) автору ничего не известно. П. С. Новиков и Л. В. Келдыш [6] указали, что предложение 1.1 ложно при $n = 2$. Остальные вопросы оставлены в [6] открытыми даже для случая $n = 2$. Вопрос о справедливости предложения 1.4 при $n = 2$ выделен А. А. Ляпуновым [4, стр. 72]. Мы доказываем, что при $n = 2$ ложно каждое из предложений 1.2, 1.3, 1.4:

ТЕОРЕМА 1. *Существует однозначное Σ_2^1 -множество, которое нельзя вложить ни в какое счетнозначное множество класса Π_2^1 .*

ТЕОРЕМА 2. *Существует счетнозначное Π_1^1 -множество, не являющееся объединением счетного числа однозначных множеств класса Σ_2^1 (и тем более классов Δ_2^1 и Π_1^1).*

Что касается значений $n \geq 3$, то мало надежды разрешить вопросы об истинности рассматриваемых предложений в классическом смысле, т. е. доказать или опровергнуть их средствами аксиом ZF или ZFC (теория множеств Цермело — Френкеля без аксиомы выбора AC или с AC соответственно [2], [7], [8]). Поддается исследованию лишь вопрос о непротиворечивости этих предложений и их отрицаний.

Наиболее простой способ доказательства непротиворечивости состоит в выводе рассматриваемого предложения из аксиомы конструктивности $V = L$ (об этой аксиоме см. [2, гл. 5], или [7], [8]). Эта аксиома не противоречит аксиомам ZFC, ввиду чего любое ее следствие также не противоречит ZFC.

В работе [6] отмечено, что аксиома $V = L$ влечет отрицание предложения 1.1 для всех n , «начиная с некоторого $N \geq 3$ ».

ТЕОРЕМА 3. Если $n \geq 3$ и выполняется $V = L$, то существует однозначное Σ_n^1 -множество, которое нельзя вложить ни в какое счетнозначное множество класса Π_n^1 .

ТЕОРЕМА 4. Если $n \geq 3$ и выполняется $V = L$, то существует счетнозначное Π_{n-1}^1 -множество, не являющееся объединением счетного числа однозначных множеств класса Σ_n^1 .

Таким образом, аксиома конструктивности влечет ложность предложений 1.1—1.4 для всех $n \geq 3$. Следовательно, отрицания этих четырех предложений не противоречат ZFC при $n \geq 3$. Иными словами, средств системы ZFC недостаточно для того, чтобы доказать одно из этих предложений для какого-нибудь $n \geq 3$. Следующая теорема дает непротиворечивость отрицаний 1.3 и 1.4 даже в более сильном виде, чем это обеспечивается теоремами 2 и 4.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что гипотеза о существовании строго недостижимого кардинала не противоречит теории ZFC. Тогда этой теории не противоречит и предположение о том, что существует счетнозначное Π_1^1 -множество, не являющееся объединением счетного числа однозначных проективных множеств любого класса.

Определение строго недостижимого кардинала можно найти в [2, гл. 3] или в [7, гл. 9], где также объясняется естественность гипотезы о его существовании. Теорему 5 мы доказываем с помощью модели Леви — Соловея [9], в которой все проективные множества измеримы по Лебегу. Эта модель используется и в доказательстве следующей теоремы, дающей непротиворечивость предложения 1.2 при любом $n \geq 3$.

ТЕОРЕМА 6. В условиях теоремы 5 теории ZFC не противоречит предположение о том, что каждое счетнозначное проективное множество можно вложить в счетнозначное множество класса Σ_2^1 .

Непротиворечивость самих предложений 1.1, 1.3, 1.4 (а не их отрицаний) остается открытой проблемой.

Если отказаться от полной аксиомы выбора AC, заменив ее принципом зависимого выбора DC, постулирующим возможность счетной последовательности выборов в случае, когда непустое множество, из которого производится n -й выбор, зависит от предыдущих выборов [2, гл. 2], [8], то теоремы 5 и 6 можно усилить:

ТЕОРЕМА 7. В условиях теоремы 5 предложение о существовании счетнозначного Π_1^1 -множества, не являющегося объединением счетного числа любых однозначных множеств, не противоречит теории $ZF + DC$.

ТЕОРЕМА 8. В условиях теоремы 5 предложение о том, что каждое счетнозначное множество можно вложить в счетнозначное Σ_2^1 -множество, не противоречит теории $ZF + DC$.

Нетрудно убедиться, что предложения, о которых идет речь в теоремах 7 и 8, противоречат более сильной теории ZFC .

Содержанием предлагаемой статьи является доказательство теорем 1—8.

§ 2. Основные факты, используемые в доказательствах теорем 1—4. Мы используем обозначения Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 и $\Sigma_n^{1,p}$, $\Pi_n^{1,p}$, $\Delta_n^{1,p}$ (где $p \in I$) для классов эффективной иерархии, см. [2, гл. 8], или [7, гл. 7]. В известном смысле Σ_n^1 есть совокупность всех Σ_n^1 -множеств с рекурсивным кодом, а $\Sigma_n^{1,p}$ есть совокупность всех Σ_n^1 -множеств, код которых рекурсивен относительно p . Классы эффективной иерархии содержат подмножества пространств вида $I^m \times \omega^k$ (где $m, k \in \omega$), а не только подмножества пространств I^m . Заметим, что если $X \in \Sigma_n^1$, то $X \in \Sigma_n^{1,p}$ для подходящего $p \in I$ и аналогично для Π и Δ .

Принципом униформизации для класса Γ называется утверждение о том, что для каждого множества $P \subseteq I^2$ класса Γ найдется такое однозначное множество $Q \subseteq P$ того же класса Γ , что $\text{пр } Q = \text{пр } P$. Следующая теорема униформизации Новикова — Кондо — Аддисона доказана, например, в [2, гл. 8], или в [7, гл. 7].

2.1. ТЕОРЕМА. Пусть $p \in I$. Тогда принцип униформизации справедлив для класса $\Pi_1^{1,p}$, а также для класса Π_1^1 .

2.2. Следствие. Если $p \in I$, то принцип униформизации справедлив для класса $\Sigma_2^{1,p}$. Он также справедлив для класса Σ_2^1 .

2.3. Следствие. Если $p \in I$ и множество $X \subseteq I$ класса $\Sigma_2^{1,p}$ не пусто, то найдется $\Delta_2^{1,p}$ -точка $x \in X$.

Для доказательства 2.3 нужно применить 2.2 к множеству $\{a\} \times X$, где $a = \omega \times \{0\} \in I$. Доказательство

2.2 достигается применением теоремы 2.1 к множеству $Q \subseteq I^2$ класса $\Pi_1^{1,p}$ (или Π_1^1), проекция пр Q которого равна $G''P$, где $P \subseteq I^2$ — данное множество класса $\Sigma_2^{1,p}$ (или Σ_2^1), а G — канонический гомеоморфизм I^2 на I , определяемый условием

$$z = G(x, y) \leftrightarrow \forall i (z(2i) = x(i) \wedge z(2i+1) = y(i)).$$

Подробнее см. [2, гл. 8, § 4].

Класс $L[x]$ всех множеств, конструктивных относительно данной точки $x \in I$, есть наименьший класс, содержащий x и все ординалы, и являющийся моделью ZFC (см. [5, § 2], или [8]). Каждому $x \in I$ можно сопоставить бинарное отношение $<_x$ на I так, что будут выполняться следующие три условия (см. [5, § 2]).

2.4. $<_x$ является полным упорядочением множества $L[x] \cap I$ по типу $\leq \omega_1$.

2.5. $\{\langle x, y, z \rangle : y <_{xz} z\} \in \Sigma_2^1$.

2.6. Если $n \geq 2$, $p \in I$ и отношение $Q(x, y, z, w, \dots)$ принадлежит классу $\Delta_n^{1,p}$, то отношения

$$\exists y <_{xz} Q(x, y, z, w, \dots), \quad \forall y <_{xz} Q(x, y, z, w, \dots)$$

принадлежат тому же классу $\Delta_n^{1,p}$.

Следующая теорема, называемая обычно в литературе теоремой униформизации Аддисона, доказывается с помощью 2.4—2.6 выбором $<_{\omega \times \{0\}}$ — наименьшей точки в каждом вертикальном сечении.

2.7. ТЕОРЕМА. Пусть $p \in I$, $n \geq 2$ и выполняется $V = L$. Тогда принцип униформизации справедлив для классов $\Delta_n^{1,p}$ и Δ_n^1 .

2.8. Следствие. В условиях 2.7 принцип униформизации справедлив для классов $\Sigma_n^{1,p}$ и Σ_n^1 .

2.9. Следствие. В условиях 2.7 каждое непустое $\Sigma_n^{1,p}$ -множество $X \subseteq I$ содержит $\Delta_n^{1,p}$ -точку $x \in X$.

Вывод 2.8 и 2.9 из 2.7 ничем не отличается от вывода 2.2 и 2.3 из теоремы 2.1.

2.10. Следствие. Если $y <_{xz} z$, то $y \in \Delta_2^{1,x,z}$.

Доказательство. Для каждого $u \in I$ положим $|u| = \{(u)_m : m \in \omega\} - \{(u)_0\}$, где $(u)_m \in I$ дается равенством $(u)_m(k) = u(2^m(2k+1) - 1)$. Следующее множество

$$U = \{u \in I : u = \{w : w <_{xz} z\}\}$$

непусто согласно 2.4 и принадлежит $\Delta_2^{1,x,z}$ согласно 2.5 и 2.6. Следовательно, в силу 2.3 найдется точка $u \in U$ класса $\Delta_2^{1,x,z}$. Но $u = (u)_m$ для некоторого m .

2.11. ТЕОРЕМА. Пусть $x \in I$ и φ есть замкнутая Σ_2^1 -формула с параметрами из $L[x]$. Тогда справедлива эквивалентность

$$(\varphi \text{ истинна}) \leftrightarrow (\varphi \text{ истинна в } L[x]).$$

Эта теорема является специальным случаем принципа абсолютности Шенфилда (см. [7, стр. 457], или [5, § 2]). Σ_n^1 -формулой называется всякая формула вида $Q\psi$, где кванторная приставка Q состоит из чередующихся кванторов $\exists$ и $\forall$ в числе $n + 1$, из которых самый правый по ω , все остальные — по I , а самый левый квантор Q есть квантор $\exists$ (по I); наконец, ψ должна быть рекурсивной формулой (с переменными как по ω , так и по I). Понятие Π_n^1 -формулы вводится аналогично, только кванторная приставка должна начинаться с $\forall$.

Класс $\Sigma_n^{1,p}$ образован в точности теми множествами, которые можно определить с помощью Σ_n^1 -формулы с единственным параметром p .

2.12. Следствие (из 2.11). Если $x \in I$ и множество $u \subseteq \omega$ принадлежит классу $\Sigma_2^{1,x}$, то $u \in L[x]$ и $v \in L[x]$ истинно $u \in \Sigma_2^{1,x}$.

§ 3. Доказательство теорем 1 и 3. В соответствии с 2.2 и 2.8, достаточно доказать, что если $n \geq 2$ и принцип униформизации имеет место для класса Σ_n^1 , то существует однозначное Σ_n^1 -множество, которое нельзя вложить ни в какое счетнозначное множество класса Π_n^1 . Доказательство этого утверждения начнем с Σ_n^1 -множества $U \subseteq I^3$, универсального в том смысле, что

(*) для каждого Σ_n^1 -множества $X \subseteq I^2$ найдется точка $x \in I$ такая, что $X = \{\langle y, z \rangle : \langle x, y, z \rangle \in U\}$.

О существовании универсальных множеств см. [2, гл. 8].

Множество $Z = \{\langle x, z \rangle : \langle x, x, z \rangle \in U\}$ также принадлежит классу Σ_n^1 . Значит, согласно нашему предположению найдется однозначное Σ_n^1 -множество $P \subseteq Z$ такое, что $\text{пр } P = \text{пр } Z$. Покажем, что это множество P и яв-

ляется искомым, т. е. что его нельзя вложить в счетнозначное Π_n^1 -множество.

Предположим противное: $P \subseteq Q$, где множество $Q \subseteq \subseteq I^2$ класса Π_n^1 счетнозначное. Разность $X = I^2 - Q$ принадлежит Σ_n^1 . Поэтому в силу (*) найдется точка $x \in I$ такая, что $X_x = Z_x$. Но из включений $P \subseteq Q$ и $P \subseteq Z$ следует $P_x \subseteq Q_x \cap Z_x$, т. е. $P_x \subseteq Q_x \cap X_x$ по выбору x . Значит, P_x пусто, так как $X = I^2 - Q$. Тем самым и $X_x = Z_x$ — пустое множество ввиду того, что $\text{пр } P = \text{пр } Z$. Но этого не может быть, поскольку X есть дополнение счетнозначного множества. Полученное противоречие заканчивает доказательство теорем 1 и 3.

§ 4. Доказательство теорем 2 и 4. В соответствии с условиями этих теорем, фиксируем натуральное $n \geq 2$ и предполагаем, что выполняется следующее условие:

4.1. Либо $n = 2$, либо $n \geq 3 \wedge V = L$.

В этом предположении вначале будет построено счетнозначное множество класса Σ_n^1 , не расщепляющееся на счетное число однозначных Σ_n^1 -множеств. На протяжении § 4 буквы x, y, z, w обозначают точки пространства I , а буквы k, l, m — натуральные числа.

Используя подходящий вариант теоремы об универсальном множестве [2, гл. 8, § 4], можно подобрать Σ_n^1 -формулу $\theta(k, x, l)$, универсальную в смысле такого утверждения:

4.2. Ко всякому $x \in I$ и всякому $\Sigma_n^{1,x}$ -множеству $u \subseteq \omega$ найдется такое $k \in \omega$, что $u = \{l: \theta(k, x, l)\}$. Через f_{kx} ($\in {}^\omega 2$) обозначим характеристическую функцию множества $\{l: \theta(k, x, l)\}$, и рассмотрим множество

$$U = \{\langle x, f_{kx} \rangle: x \in I \wedge k \in \omega\}.$$

Множество U очевидно счетнозначно. Следующие две леммы показывают, что оно как раз и образует искомый пример.

4.3. ЛЕММА. U не является объединением счетного числа однозначных множеств класса Σ_n^1 .

Доказательство. Пусть напротив, $U = \bigcup_{m \in \omega} U_m$, где каждое множество U_m однозначно и принадлежит классу Σ_n^1 . Найдется $x \in I$ такое, что все U_m являются $\Sigma_n^{1,x}$ -множествами. Рассмотрим произвольное множество $u \subseteq \omega$ такое, что $u \in \Sigma_n^{1,x} - \Delta_n^{1,x}$. Харак-

характеристическая функция f множества u принадлежит сечению U_x по определению U и в силу 4.2. Следовательно, f принадлежит одному из множеств $U_{mx} = \{y : \langle x, y \rangle \in \in U_m\}$. Но U_{mx} является $\Sigma_n^{1,x}$ -множеством с не более чем одной точкой. Следовательно, $f \in \Delta_n^{1,x}$ в силу 2.3 или 2.9 (при $n = 2$ и при $n \geq 3 \wedge V = L$ соответственно). Стало быть, и множество $u = \{l : f(l) = 1\}$ принадлежит классу $\Delta_n^{1,x}$, что противоречит выбору u .

4.4. ЛЕММА. U является Σ_n^1 -множеством.

Доказательство. Будучи Σ_n^1 -формулой, формула θ имеет вид $\exists y \psi(y, k, x, l)$, где ψ есть Π_{n-1}^1 -формула. Через $\psi^*(z, y, k, x, l)$ обозначим формулу, полученную из ψ релятивизацией к множеству $\text{pred}_x(z) = \{w : w <_x z\}$, т. е. заменой всех кванторов $\exists w, \forall w$ (по I) на $\exists w <_x z, \forall w <_x z$ соответственно. Через f_{kx}^z обозначим характеристическую функцию множества $\{l : \theta^*(z, k, x, l)\}$, где θ^* есть формула $\exists y <_x z \psi^*(z, y, k, x, l)$.

Каждой точке $x \in I$ сопоставим множества

$$E_x = \{z \in L[x] : \forall k, l \forall y <_x z \\ (\psi^*(z, y, k, x, l) \leftrightarrow \psi(y, k, x, l))\},$$

$$S_x = \{y \in I : y \text{ можно определить формулой, являющейся конъюнкцией } \Sigma_n^1\text{-формулы с параметром } x \text{ и } \Pi_n^1\text{-формулы с параметром } x\},$$

$$D_x = \{y \in I : y \in \Delta_n^{1,x}\} (\subseteq S_x).$$

Доказываются следующие четыре утверждения:

- (1) Если $k \in \omega, x \in I, z \in E_x$ и $D_x \subseteq \text{pred}_x(z)$, то $f_{kx} = f_{kx}^z$.
- (2) Если $\langle x, f \rangle \in U$, то $f \in S_x$.
- (3) Если $x \in I$, то найдется такое $z \in E_x$, что $S_x \subseteq \text{pred}_x(z)$.
- (4) Множество $\{\langle x, z \rangle : x \in I \wedge z \in E_x\}$ принадлежит Σ_n^1 .

Доказательство (1). По определению E_x , достаточно доказать эквивалентность

$$\exists y <_x z \psi(y, k, x, l) \leftrightarrow \exists y \psi(y, k, x, l).$$

Импликация слева направо очевидна. Докажем обратную импликацию. Пусть $\exists y\psi(y, k, x, l)$. Тогда $\Pi_{n-1}^{1,x}$ -множество $Y = \{y : \psi(y, k, x, l)\}$ непусто. Следовательно, Y содержит $\Delta_n^{1,x}$ -точку $y \in Y$ в силу 2.3 или 2.9. Тогда $y \in D_x$, и поэтому $y <_x z$ согласно формулировке (1).

Утверждение (2) очевидно из определения U и того обстоятельства, что θ есть Σ_n^1 -формула.

Д о к а з а т е л ь с т в о (3). Согласно предположению 4.1, возможны два случая: $n \geq 3 \wedge V = L$, или $n = 2$.

Случай 1: $n \geq 3$ и $V = L$. Рассмотрим $<_x$ -наименьшую точку $z \in I$ такую, что $z \notin \Delta_{n+1}^{1,x}$. Вследствие 2.10 множество $\text{pred}_x(z)$ есть в точности совокупность всех $\Delta_{n+1}^{1,x}$ — точек $w \in I$. Отсюда немедленно получаем $S_x \subseteq \text{pred}_x(z)$. Кроме того, стандартные теоретико-модельные рассуждения позволяют вывести из 2.9, что если замкнутая Σ_{n+1}^1 -формула φ имеет параметры только из множества $\text{pred}_x(z)$, а φ^* получается релятивизацией φ к множеству $\text{pred}_x(z)$, то имеет место эквивалентность $\varphi \leftrightarrow \varphi^*$. Отсюда следует $z \in E_x$.

Случай 2: $n = 2$. Рассуждая в $L[x]$ аналогично случаю 1, находим $z \in L[x] \cap I$ такое, что $S_x^{L[x]} \subseteq \text{pred}_x(z)^{L[x]}$ и $z \in E_x^{L[x]}$, где $S_x^{L[x]}$ есть «множество S_x , определенное в $L[x]$ », и т. п.. Но из 2.11 следует $S_x^{L[x]} = S_x$, а из 2.5 и 2.11 получаем $\text{pred}_x(z)^{L[x]} = \text{pred}_x(z)$. Последнее равенство и теорема 2.11 (для формулы ψ) приводят к соотношению $E_x^{L[x]} = E_x$. Итак, $z \in E_x$ и $S_x \subseteq \text{pred}_x(z)$.

Наконец, доказательство утверждения (4) получается непосредственным анализом определений с помощью 2.6. Вместо $z \in L[x]$ нужно записать $z <_x x \vee x <_x z \vee x = z$ и воспользоваться утверждением 2.5. Фактически, если $n \geq 3$, то множество (4) принадлежит даже классу Δ_n^1 , но это нам не понадобится.

Продолжая доказательство леммы 4.4, дадим доказательство такого равенства:

$$(5) \quad U = \{\langle x, f \rangle : \exists k \exists z (z \in E_x \wedge f <_x z \wedge f = f_{kx}^z)\}.$$

Пусть $\langle x, f \rangle \in U$, т. е. $f = f_{kx}$ для некоторого k . Согласно (3), существует точка $z \in E_x$ такая, что $S_x \subseteq \text{pred}_x(z)$. Тогда $f = f_{kx}^z$ в силу (1), и $f <_x z$ в силу (2).

Обратно, пусть $z \in E_x$ и $f = f_{kx}^z <_x z$. Если при этом $D_x \subseteq \text{pred}_x(z)$, то из (1) следует $f = f_{kx}^z$, т. е. $\langle x, f \rangle \in U$ по определению. Пусть теперь $D_x \not\subseteq \text{pred}_x(z)$. Возьмем $y \in D_x$ так, чтобы $\neg y <_x z$. Заметим, что $z \in L[x]$, так как $z \in E_x$. Кроме того, $y \in L[x]$ (в случае $V = L$ это очевидно, а в случае $n = 2$ следует из 2.12, поскольку $y \in D_x$ означает, что $y \in \Delta_2^{1,x}$). Значит, $z \leq_x y$, откуда $f <_x y$, и, наконец, $f \in \Delta_2^{1,x,y}$ ввиду 2.12. Но $y \in \Delta_n^{1,x}$. Следовательно, $f \in \Delta_n^{1,x}$, т. е. f есть характеристическая функция $\Delta_n^{1,x}$ -множества $\{l: f(l) = 1\}$. Это и дает $\langle x, f \rangle \in U$.

Равенство (5) доказано. Теперь лемма 4.4 без труда выводится из (5) и (4) с помощью 2.5 и 2.6.

Таким образом, в предположении 4.1 мы имеем счетнозначное Σ_n^1 -множество U , не являющееся объединением счетного числа однозначных Σ_n^1 -множеств. Покажем, как из этого множества можно получить Π_{n-1}^1 -множество с такими же свойствами.

4.5. Предложение. В условиях 4.1 каждое Σ_n^1 -множество является проекцией однозначного множества класса Π_{n-1}^1 .

В случае $n = 2$ это предложение элементарно вытекает из 2.1. В случае $n \geq 3 \wedge V = L$ оно доказано в [5, § 2].

Применим 4.5 к Σ_n^1 -множеству $G''U$ (определение гомеоморфизма $G: I^2$ на I см. § 2). Пусть однозначное Π_{n-1}^1 -множество $Q \subseteq I^2$ таково, что $G''U = \text{пр } Q$. Множество

$$P = \{\langle x, G(y, z) \rangle: \langle G(x, y), z \rangle \in Q\}$$

принадлежит классу Π_{n-1}^1 , будучи непрерывным прообразом Q (ведь G непрерывно в обе стороны). Из счетнозначности U и однозначности Q тривиально следует счетнозначность P . Наконец, если бы P являлось объединением $\bigcup_{m \in \omega} P_m$ однозначных Σ_n^1 -множеств P_m , то, определив

$$U_m = \{\langle x, y \rangle: \exists z (\langle x, G(y, z) \rangle \in P_m)\},$$

мы получили бы $U = \bigcup_{m \in \omega} U_m$, и каждое U_m однозначно и принадлежит классу Σ_n^1 , что противоречит лемме 4.3.

Доказательство теорем 2 и 4 закончено.

4.6. З а м е ч а н и е. Если $n \geq 2$ и выполняется аксиома конструктивности $V = L$, то каждое счетнозначное Σ_n^1 -множество $P \subseteq I^2$ является объединением счетного числа однозначных Δ_{n+1}^1 -множеств. В самом деле, множество $W = \{\langle x, y \rangle: P_x = |y|\}$ принадлежит классу Δ_{n+1}^1 (точнее, является пересечением Σ_n^1 -множества с Π_n^1 -множеством). Согласно 2.7, найдется однозначное Δ_{n+1}^1 -множество $Q \subseteq W$ такое, что $\text{pr } Q = \text{pr } W$. Для каждого $m \in \omega$ положим

$$P_m = P \cap \{\langle x, (y)_m \rangle: \langle x, y \rangle \in Q \wedge m \in \omega\}.$$

Все множества P_m однозначны, принадлежат классу Δ_{n+1}^1 , а их объединение совпадает с данным множеством P .

§ 5. Доказательство теорем 5 и 6. Несколько слов о модели Леви — Соловея [9], используемой в доказательствах этих теорем. Фиксируется счетная транзитивная $\in$ -модель M теории $ZF + V = L$ со строго недостижимым в M кардиналом $\Omega \in M$. Каждую счетную транзитивную модель M' теории ZFC такую, что $M \subseteq M'$ и Ω остается строго недостижимым в M' кардиналом, называем Ω — моделью. В частности, сама M есть Ω — модель.

Множество $\mathcal{P}$ (в [9] оно обозначено через $\mathcal{P}_\Omega$) состоит из всех конечных множеств $p \subseteq \Omega \times \omega \times \Omega$ таких, что $\forall \alpha < \Omega$ (множество $\{\langle k, \beta \rangle: \langle \alpha, k, \beta \rangle \in p\}$

есть функция).

Множество $\mathcal{P}$ упорядочивается обратным включению: $p \leq q \leftrightarrow q \subseteq p$. Оно принадлежит каждой Ω -модели.

Множество $D \subseteq \mathcal{P}$ называется плотным в $\mathcal{P}$, если для каждого $p \in \mathcal{P}$ найдется такое $q \in D$, что $q \leq p$.

Пусть M' есть Ω -модель. Множество $G \subseteq \mathcal{P}$ называется $\mathcal{P}$ — генерическим над M' при выполнении следующих трех условий:

$$1) p \in \mathcal{P} \wedge q \in G \wedge p \geq q \rightarrow p \in G,$$

$$2) \forall p, q \in G \quad \exists r \in G \quad (r \leq p \wedge r \leq q),$$

3) если множество $D \in M'$, $D \subseteq \mathcal{P}$ плотно в $\mathcal{P}$, то пересечение $G \cap D$ непусто.

В этом случае существует обозначаемая через $M'[G]$ наименьшая счетная транзитивная $\in$ -модель теории ZFC, содержащая все множества из M' и множество G . Эта модель и есть генерическое расширение Леви — Соловея модели M' .

5.1. Предложение [9, следствие 3.5, стр. 17]. Пусть $G' \subseteq \mathcal{P}$ является $\mathcal{P}$ -генерическим множеством над Ω -моделью M' , а точка $f \in M' [G'] \cap I$ является M' -определимой в $M' [G']$ (т. е. f определима в $M' [G']$ некоторой $\in$ -формулой с параметрами только из M'). Тогда $f \in M'$.

5.2. Предложение [9, рассуждения 1.7—1.11, стр. 42—46]. Если M' и G' таковы, как в 5.1, и множество $X \in M' [G']$, $X \subseteq I$ является M' -определимым в $M' [G']$, и $X \not\subseteq M'$, то X несчетно в $M' [G']$.

С этого момента фиксируем $\mathcal{P}$ -генерическое над M множество $G \subseteq \mathcal{P}$. Покажем, что модель $N = M [G]$ является искомой для теорем 5 и 6 в смысле следующей теоремы:

5.3. ТЕОРЕМА. В N истинны такие два предложения:

(А) Существует счетнозначное Π_1^1 -множество, не являющееся объединением счетного числа однозначных проективных множеств.

(Б) Каждое счетнозначное проективное множество можно вложить в счетнозначное Σ_2^1 -множество.

Доказательство теоремы 5.3 известным способом [10, стр. 273—275] может быть преобразовано в доказательство теорем 5 и 6. Доказательство теоремы 5.3 начнем с формулировки еще одного предложения, собирающего несколько свойств моделей Леви — Соловея, доказанных в [9]. Доказательства предложений 5.1, 5.2, 5.4 содержатся также в [5, § 4].

5.4. Предложение. (а) [9, п. 1.4, стр. 5]. N есть счетная транзитивная $\in$ -модель теории ZFC с тем же ординальным рядом, что и M .

(б) [9, следствие 2, стр. 16]. Если $x \in N \cap I$, то Ω остается недостижимым кардиналом в $M [x]$, т. е. $M [x]$ будет Ω -моделью. Кроме того, $M [x] \cap I$ счетно в N .

(в) [9, п. 4.1, стр. 18]. Если $x \in N \cap I$, то существует такое $\mathcal{P}$ -генерическое над $M [x]$ множество $G' \subseteq \mathcal{P}$, что $N = M [x][G']$.

Смысл утверждений (б) и (в) состоит в том, что модель N устроена одинаково относительно всех своих подмоделей вида $M [x]$, $x \in I$.

5.5. Следствие. Если $x, f \in N \cap I$ и точка f является $M [x]$ -определимой в N , то $f \in M [x]$.

5.6. Следствие. Если $x \in N \cap I$ и множество $X \in N$, $X \subseteq I$ счетно и $M[x]$ -определимо в N , то $X \subseteq M[x]$.

Доказательство следует из 5.1, 5.2, 5.4.

5.7. ЛЕММА. Пусть $x, y \in N \cap I$. Тогда

$$y \in M[x] \leftrightarrow \text{в } N \text{ истинно } y \in L[x].$$

Доказательство тривиально: раз в M истинна аксиома конструктивности $V = L$ по предположению, то M есть совокупность всех конструктивных в N множеств.

Доказательство утверждения (А). Рассмотрим множество

$$U = \{\langle x, y \rangle : x, y \in N \cap I \wedge y \in M[x]\}.$$

5.8. ЛЕММА. U есть счетнозначное Σ_2^1 -множество в N .

Доказательство. Счетнозначность U следует из 5.4 (б). Далее, в силу 5.7 в N истинно $U = \{\langle x, y \rangle : y \in L[x]\}$, ввиду чего $U \in \Sigma_2^1$ в N выполняется согласно 2.5 (запись $y \in L[x]$ следует заменить на $y <_x x \vee x <_{<_x y} y \vee x = y$).

Остается проверить,¹ что U не является в N объединением счетного числа однозначных проективных множеств. Мы докажем более сильное утверждение, для формулировки которого необходимо ввести одно понятие. Множество $X \in N$ называется $M - I$ -определимым в N , если X определимо в N некоторой $\in$ -формулой с параметрами только из $M \cup (N \cap I)$. В модели N каждое проективное множество и любая счетная последовательность проективных множеств являются $M - I$ -определимыми.

5.9. ЛЕММА. Пусть $\langle P_m : m \in \omega \rangle \in N$ есть $M - I$ -определимая в N последовательность однозначных множеств $P_m \subseteq I$. Тогда $U \neq \bigcup_{m \in \omega} P_m$.

Доказательство. Пусть, напротив, U совпадает с объединением множеств P_m . Все параметры $p \in I$, фигурирующие в определении последовательности множеств P_m , можно заменить некоторым одним параметром $x \in N \cap I$. Пусть $u = \{m \in \omega : \exists y (\langle x, y \rangle \in P_m)\}$. Для каждого $m \in \omega$ существует и единственная точка y такая, что $\langle x, y \rangle \in P_m$. Обозначим ее через y_m . По предположению

противного, имеем равенство

$$U_x = \{y_m: m \in \omega\}.$$

Согласно выбору x , последовательность $\langle P_m: m \in \in \omega \rangle$ является $M[x]$ -определимой в N . Поэтому и последовательность $\langle y_m: m \in \omega \rangle$ будет $M[x]$ -определимой в N . Следовательно, характеристическая функция $f \in {}^\omega 2$ множества

$$\{2^m \cdot 3^k \cdot 5^i: m \in u \wedge k \in \omega \wedge i = y_m(k)\}$$

также $M[x]$ -определима в N . Таким образом, $f \in M[x]$ в силу 5.5. Отсюда нетрудно вывести, что $\langle y_m: m \in \omega \rangle \in \in M[x]$ и что множество $U_x = \{y_m: m \in \omega\}$ принадлежит $M[x]$ и счетно в $M[x]$. Но $U_x = M[x] \cap I$ по определению U . Получилось противоречие с теоремой Кантора в $M[x]$.

5.10. Следствие. *U не является в N объединением счетного числа однозначных проективных множеств.*

Теперь доказательство утверждения (А) получается из 5.8 и 5.10 с помощью теоремы 2.1 совершенно аналогично тому, как мы получили в § 4 доказательство теоремы 2 из лемм 4.3 и 4.4.

Доказательство утверждения (Б). Как и выше, мы доказываем более сильное утверждение.

5.11. ЛЕММА. *Пусть множество $P \in N$, $P \subseteq I^2$ счетнозначно и M — I -определимо в N . Тогда P можно вложить в N в счетнозначное Σ_2^1 -множество.*

Доказательство Пусть $p \in N \cap I$ таково, что множество P является $M \cup \{p\}$ -определимым, т. е. $M[p]$ -определимым в N . Повторив доказательство леммы 5.8, нетрудно показать, что множество

$$Q = \{\langle x, y \rangle: x, y \in N \cap I \wedge y \in M[x, p]\}$$

счетнозначно и принадлежит Σ_2^1, p в N . Остается проверить $P \subseteq Q$. Фиксируем $x \in I$ и докажем, что $P_x \subseteq Q_x$. По выбору x , множество $P_x = \{y: \langle x, y \rangle \in P\}$ счетно и $M[x, p]$ -определимо в N . Значит, $P_x \subseteq M[x, p]$ в силу 5.6. Но $Q_x = M[x, p] \cap I$ по определению Q . Лемма доказана.

Этим закончено доказательство теоремы 5.3 и теорем 5 и 6 § 1.

§ 6. Доказательство теорем 7 и 8. Для доказательства этих теорем рассмотрим специальную подмодель N^* мо-

дели N из § 5. Начнем с нескольких определений. Множество $X \in N$ называется ω Ord-определимым в N , если X определимо в N некоторой $\in$ -формулой с параметрами только из совокупности всех функций $f \in N$ из ω в ординальный ряд. Множество $X \in N$ называется наследственно ω Ord-определимым в N , если само X , все элементы X , все элементы элементов X и т. д. ω Ord-определимы в N .

Через N^* обозначим совокупность всех наследственно ω Ord-определимых в N множеств $X \in N$ (вторая модель Леви — Соловея). Следующие утверждения доказаны в [9, стр. 51—52], а также в [5, п. 25].

6.1. N^* — счетная транзитивная модель теории $ZF + + DC$.

6.2. $N^* \cap I = N \cap I$

6.3. Каждое множество $X \in N^*$ является $M - I$ -определимым в модели N .

6.4. ТЕОРЕМА. В N^* истинны следующие два предложения:

(А) Существует счетнозначное Π_1^1 -множество, не являющееся объединением счетного числа (любых) однозначных множеств.

(Б) Каждое счетнозначное множество можно вложить в счетнозначное множество класса Σ_2^1 .

Доказательство. (А) Согласно 6.2, проективные иерархии моделей N и N^* совпадают. Поэтому множество U из доказательства теоремы 5.3 (А) счетнозначно и принадлежит классу Σ_2^1 в N^* . Кроме того, если последовательность $\langle P_m: m \in \omega \rangle$ однозначных множеств $P_m \subseteq \subseteq I^2$ принадлежит N^* , то она $M - I$ -определима в N согласно 6.3, и поэтому $U \neq \bigcup_m P_m$ согласно 5.9. Таким образом, в N^* истинно: множество $U \subseteq I^2$ принадлежит классу Σ_2^1 , счетнозначно и не является объединением счетного числа однозначных множеств. Как и в § 4 и § 5, отсюда следует утверждение (А).

Вывод утверждения (Б) из 5.11 проходит аналогично.

Результаты 6.1 и 6.4 показывают, что модель N^* в самом деле является моделью для теорем 7 и 8.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., «Наука», 1977.
- [2] Справочная книга по математической логике, ч. 2: теория множеств, М., «Наука», 1982.
- [3] Лузин Н. Н., Собр. соч., т. 2, М., Изд. АН СССР, 1958.
- [4] Ляпунов А. А., Вопросы теории множеств и теории функций М., «Наука», 1979.
- [5] Кановой В. Г., Проективная иерархия Н. Н. Лузина: современное состояние теории, в кн. [2] стр. 273—364.
- [6] Новиков П. С., Келдыш Л. В., Комментарии к работам Н. Н. Лузина, в кн. [3] стр. 725—739.
- [7] Шенфилд Дж., Математическая логика, М., «Наука», 1975.
- [8] Йех Т., Теория множеств и метод форсинга, М., «Мир», 1973.
- [9] Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. Math. 92, № 1 (1970), 1—56.
- [10] Коэн П. Дж., Теория множеств и континуум-гипотеза, М. «Мир», 1969.